



COPPE/UFRJ

MODELAGEM NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO REDOR DE CORPOS
AERODINÂMICOS UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES

Victor Santoro Santiago

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Rio de Janeiro
Dezembro de 2008

MODELAGEM NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO REDOR DE CORPOS
AERODINÂMICOS UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES

Victor Santoro Santiago

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Miguel Hiroo Hirata, Ph.D.

Prof. Francesco Scofano Neto, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2008

Santiago, Victor Santoro

Modelagem Numérica do Escoamento ao Redor de
Corpos Aerodinâmicos Utilizando o Método de Vórtices/
Victor Santoro Santiago. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE,
2008.

XV, 275 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de
Engenharia Mecânica, 2008.

Referências Bibliográficas: p. 223-237.

1. Método de Vórtices. 2. Aerofólio. 3. Aerodinâmica.
4. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido 5.
Geração de Vorticidade I. Bodstein, Gustavo César
Rachid. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um exercício de humildade. É admitir a impossibilidade do sucesso autônomo, que, se por um lado faz com que nos sintamos menores diante da realidade, por outro nos faz maiores como pessoas.

Livre de qualquer pensamento egocêntrico, fica claro que este trabalho foi conduzido por muitas pessoas. A todas elas devo minha gratidão. Entretanto, começo meus agradecimentos dirigindo meu pensamento àquele que estava comigo em todos os passos e em todas as decisões. Agradeço a Deus por tudo. Sem ele a me guiar, sem ele a me permitir uma vida saudável e equilibrada, certamente eu não estaria escrevendo estas palavras. Obrigado meu Deus.

Agradeço à minha família, que esteve comigo durante todo este período de estudos, me apoiando e me fortificando, dando sentido ao meu dia-a-dia. Obrigado à minha esposa Renata, sempre carinhosa e dedicada. Eu não teria a menor condição de me dedicar com a concentração necessária, sem a ajuda desta mãe zelosa e responsável, que me disponibilizava a tranquilidade essencial para o trabalho de pesquisa. Às minhas filhas, Susana e Daniela, devo agradecer pela felicidade de poder sentir a vida em sua plenitude. A elas, além de agradecer, devo desculpar-me pelos inevitáveis, porém, eventuais momentos de ausência. Obrigado ao meu querido pai Justo, e à minha querida mãe Carmelina. Sem dúvida alguma, o exemplo contínuo e a dedicação incondicional dos meus pais formaram a condição inicial que bem direcionou a minha vida.

Agradeço de maneira especial ao meu orientador, Professor Gustavo. Sua capacidade de trabalho, facilidade de convivência, organização, dedicação ao trabalho, bom humor, além é claro de sua enorme bagagem de conhecimentos e vontade de transmiti-los, criaram o ambiente certo para o meu amadurecimento profissional.

Agradeço a todos os professores do Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ, os quais conduziram os cursos e matérias necessárias à minha pós-graduação, além de estarem sempre à disposição para ajudar, tirar dúvidas, disponibilizar laboratórios, emprestarem livros e programas, sempre com muito entusiasmo e dedicação.

Agradeço ao Exército Brasileiro, instituição sublime que resume todo e qualquer sentimento de nação, a qual me acolheu ainda como criança, me formando como pessoa, cidadão, militar e profissional. Agradeço ao Instituto Militar de Engenharia, e a todos os seus professores, sobretudo aos amigos do Departamento de Engenharia

Mecânica e de Materiais, pela sólida formação de Engenheiro Militar e de Mestre em Engenharia Mecânica.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MODELAGEM NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO REDOR DE CORPOS AERODINÂMICOS UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES

Victor Santoro Santiago

Dezembro/2008

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Programa: Engenharia Mecânica

Nesta tese um modelo numérico para a solução de escoamentos bidimensionais, viscosos, incompressíveis e não permanentes ao redor de corpos aerodinâmicos é desenvolvido utilizando o método de vórtices. O campo de vorticidade é discretizado em vórtices de Lamb e o corpo é discretizado em um polígono de painéis curvos. A contribuição do corpo é calculada através do método dos painéis com vórtices lineares. Um novo esquema de geração de vórtices é proposto, o qual combina os painéis com uma camada de vórtices adjacentes aos painéis. As condições de não-penetração e não-escorregamento são impostas simultaneamente nos pontos de controle dos painéis, permitindo que as intensidades de cada vórtice nascente e painel sejam calculadas. Os raios dos núcleos dos vórtices nascentes são estimados por um modelo de área de difusão baseado no problema da placa impulsiva de Rayleigh e tal que haja sobreposição dos núcleos. As trajetórias dos vórtices são calculadas com o método de Adams-Bashforth de 2ª-ordem e as velocidades induzidas com o método de expansão em multipolos adaptativo. Quatro modelos de difusão de vorticidade são implementados: Avanço Randômico, Redistribuição de Vorticidade, Velocidade de Difusão, e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Os resultados indicam que o MCNC é o mais conveniente porque é acurado e fácil de implementar. Um algoritmo de aglomeração é empregado para reduzir o número de vórtices na simulação. O modelo numérico é validado para o problema da placa plana de Blasius e simulações do escoamento ao redor de um aerofólio NACA 0012 são realizadas para diversos ângulos de ataque e números de Reynolds.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NUMERICAL MODELING OF THE FLOW AROUND AERODYNAMIC BODIES
USING THE VORTEX METHOD

Victor Santoro Santiago

December/2008

Advisor: Gustavo César Rachid Bodstein

Department: Mechanical Engineering

In this thesis a numerical model for the solution of two-dimensional, viscous, incompressible and unsteady flows around aerodynamic bodies is developed using the vortex method. The vorticity field is discretized into a cloud of Lamb vortices, whereas the body is discretized into a polygon with curved panels. The body contribution is accounted for through a piecewise-continuous linear-vortex panel method. A new vortex generation scheme at the body surface is proposed that combines the body panels with a layer of nascent vortices that are adjacent to the panels. Both the no-slip and the no-penetration boundary conditions are simultaneously enforced at the panel control points, allowing for the calculation of the strength of each nascent vortex and panel node. The nascent vortices are created with a core radius estimated from a diffusion area model based on the Rayleigh's impulsive-plate problem and such that core overlapping is maintained. Vortices are convected using the adaptive fast multipole method to calculate their induced velocities and the 2nd-order Adams-Bashforth time-marching scheme to integrate their trajectories in time. Four vorticity diffusion methods are implemented: Random Walk Method, Vorticity Redistribution Method, Velocity Diffusion Method and Corrected Core Spreading Method (CCSM). Results indicate that the CCSM is the most convenient because it is accurate and easy to implement. A merging algorithm is employed to reduce the number of vortices in the simulation. The numerical model is validated for the Blasius flat-plate problem and simulations of the flow around a NACA 0012 airfoil are carried out for several values of the angle of attack and Reynolds number.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação	4
1.2. Descrição do problema físico	5
1.3. Descrição do trabalho a ser desenvolvido	12
1.4. Objetivos	15
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1. Escoamento ao redor de aerofólios	17
2.1.1. Trabalhos analíticos	18
2.1.2. Trabalhos Experimentais	18
2.1.3. Trabalhos numéricos	20
2.2. Método dos Painéis	24
2.3. Método de Vórtices	25
2.3.1. Convecção – Métodos de Expansão em Multipolos	34
2.3.2. Difusão viscosa	35
CAPÍTULO 3 - MODELO MATEMÁTICO	40
3.1. Hipóteses simplificadoras	40
3.2. Problema de Valor de Contorno	42
3.3. Equação de Transporte da Vorticidade	43
3.4. Relação Velocidade–Vorticidade: A Lei de Biot-Savart	45
3.5. Modelagem da vorticidade	47
3.6. Método dos Painéis	51
3.7. Condição de contorno - utilização simultânea de painéis e vórtices para discretização do corpo	58
3.8. Difusão da vorticidade na superfície sólida e nascimento de novos vórtices	60
3.9. Condição de conservação de circulação	66
3.10. Carregamentos sobre o corpo	67
3.10.1. LEWIS (1991)	68
3.10.2. WU (1981)	68

3.10.3. SHINTANI & AKAMATSU (1994)	70
CAPÍTULO 4 - MÉTODO NUMÉRICO	77
4.1. Método dos Vórtices	78
4.1.1. Descrição geral	78
4.1.2. Equacionamento e algoritmo do Método de Vórtices	80
4.2. Solução potencial – Método dos Painéis	82
4.2.1. Soluções elementares	83
4.2.1.1. Fonte	84
4.2.1.2. Dipolo	86
4.2.1.3. Vórtice	88
4.2.2. Implementação numérica	91
4.2.2.1. Distribuição de vorticidade constante	93
4.2.2.2. Distribuição de vorticidade linear	97
4.2.2.3. Painéis curvos	102
4.3. Condição de contorno - utilização simultânea de painéis e vórtices	109
4.4. Difusão da vorticidade na superfície sólida e nascimento de novos vórtices	113
4.5. Convecção dos Vórtices	115
4.5.1. Método de Expansão em Multipolos Adaptativo – MEMA	118
4.6. Processo difusivo	121
4.6.1. Método do Avanço Randômico – MAR	121
4.6.2. Método da Redistribuição de Vorticidade – MRV	122
4.6.3. Método da Velocidade de Difusão – MVD	124
4.6.4. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido – MCNC	125
4.7. Avanço Temporal	127
4.8. Mecanismos de redução do número de vórtices	129
4.8.1. Aglomeração direta	129
4.8.2. Aglomeração utilizando a hierarquia de caixas do MEMA	136
4.8.3. Corte	136
4.9. Correção do campo de vorticidade para vórtices que cruzam a superfície	137
4.10. Correção para vórtices que penetram no corpo	138
4.11. Suavização da velocidade induzida por vórtices muito próximos aos pontos de controle	139

4.12 Atualização das Condições de Contorno	142
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS DOS TESTES DE DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO	144
5.1. Incorporação do efeito da curvatura no Método dos Painéis	146
5.2. Avaliação do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo – MEMA	155
5.3. Processo de aglomeração	162
5.4. Métodos de Difusão Aplicados ao Vórtice Pontual	166
5.4.1. Método do Avanço Randômico – MAR	167
5.4.2. Método da Redistribuição de Vorticidade – MRV	170
5.4.3. Método da Velocidade de Difusão – MVD	171
5.4.4. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido – MCNC	172
CAPÍTULO 6 - PLACA PLANA - RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO	177
6.1. Análise de convergência	179
6.2. Escoamento em placa plana – validação	187
CAPÍTULO 7 - AEROFÓLIO - ANÁLISE DE RESULTADOS	190
7.1. Verificação dos parâmetros numéricos e análise de convergência para aerofólios	191
7.2. Apresentação dos resultados	194
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES	210
8.1. Método de Painéis	211
8.1.1. Aplicação de curvatura na superfície sólida	212
8.1.2. Utilização de sub-painéis	213
8.2. Condição de contorno na superfície – utilização simultânea de painéis e vórtices	213
8.3. Método de difusão	214
8.4. Convecção – Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA)	215
8.5. Aglomeração	217
8.6. Método de geração de vorticidade na parede	218

8.7. Carregamento sobre a superfície	218
8.8. Resultados para placa plana	219
8.9. Resultados para aerofólios	220
8.10. Sugestões para trabalhos futuros	221
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	223
APÊNDICE A	238
APÊNDICE B	256
APÊNDICE C	274

LISTA DE SÍMBOLOS

- A** - matriz de influência para painéis com distribuição constante de vorticidade
 A_j - elemento de influência para painéis com distribuição constante ou linear
 A'_j - elemento de influência para painéis com distribuição linear
 A_{ij} - elemento da matriz de influência para painéis com vorticidade constante
 A_B - área dos vórtices nascentes
 A_W - área dos vórtices da esteira
 A_S - área do contorno do corpo
 A_∞ - área do contorno no infinito
a - matriz de influência distribuição linear de vorticidade e/ou painéis curvos
 a_{ij} - elemento da matriz de influência para painéis com distribuição linear e/ou curvos
B - matriz de influência para dipolos
b - vetor independente
 b_i - elemento do vetor independente
 b_{IMP} - elemento do vetor independente para CC de impenetrabilidade
 b_{NE} - elemento do vetor independente para CC de não-escorregamento
 c - corda do aerofólio
 c_{ij} - coeficiente de influência do painel j sobre o painel i relativo à parte constante
 C - curva Material
 C_B - área das folhas de vorticidade
 C_d - coeficiente de arrasto
 C_f - coeficiente de atrito
 C_L - Coeficiente de sustentação
 C_p - Coeficiente de pressão
erfc - função erro
 f - força de superfície
 f_{ij}^n - parcela de circulação f_{ij}^n que é transferida do vórtice i para j no tempo n
 G - função de Green
 h/σ - grau de recobrimento dos núcleos dos vórtices
 h_v - distância de difusão
 k - constante de proporcionalidade entre δ_t e $\Delta\ell$
 L - número de vórtices por painel

L - tamanho máximo dos raios dos núcleos dos vórtices
 l_M - resolução mínima
 l_m - resolução máxima
 ℓ_{ij} - coeficiente de influência do painel j sobre o painel i relativo à parte linear
 M - número de vórtices na esteira
 $\mathbf{n}$ - vetor normal à superfície do corpo
 N - número de painéis
 N_{sub} - número de sub-painéis
 p - pressão absoluta
 P - número randômico
 P_{IMP} - elemento da matriz de influência para painéis e CC de impenetrabilidade
 P_{NE} - elemento da matriz de influência para painéis e CC de não-escorregamento
 Q - Número randômico
 q_r - componente de velocidade do sistema de coordenadas polares
 q_θ - componente de velocidade do sistema de coordenadas polares
 R_j - região ocupada pelo corpo j
 R_f - região ocupada pelo fluido
 r - coordenada do sistema polar
 $\mathbf{r}'$ - variável auxiliar de integração
 r_1 - variável do sistema do painel
 r_2 - variável do sistema do painel
 Re - Número de Reynolds
 S - superfície de integração
 s - direção superficial
 S_∞ - superfície de integração do escoamento incidente
 S_C - superfície de integração do corpo
 S_e - superfície de integração da esteira
 t - tempo
 $\mathbf{t}$ - vetor tangente
 $\mathbf{u}$ - vetor velocidade
 u - componente do vetor velocidade na direção x
 u_d - componente x da velocidade de difusão

u_{p_j} - componentes x da velocidade induzida pelo painel j no sistema do painel
 U_∞ - vetor velocidade do escoamento uniforme
 U_∞ - componente x da velocidade do escoamento uniforme
 V_{IMP} - elemento da matriz de influência para vórtices e CC de impenetrabilidade
 P_{NE} - elemento da matriz de influência para vórtices e CC de não-eskorregamento
 v - componente do vetor velocidade na direção y
 v_d - componente y da velocidade de difusão
 v_{p_j} - componente y da velocidade induzida pelo painel j no sistema do painel
 V_∞ - componente y da velocidade do escoamento uniforme
 X - coordenada do sistema cartesiano global
 x - coordenada do sistema cartesiano do painel
 Y - coordenada do sistema cartesiano global
 y - coordenada do sistema cartesiano do painel

 α - ângulo de ataque, parâmetro do MCNC
 β - ângulo de inclinação dos painéis
 δ_n - distância de difusão
 δ_1 - derivada da função de curvatura dos painéis no nó inicial do painel
 δ_2 - derivada da função de curvatura dos painéis no nó final do painel
 δA - área de difusão
 $\Delta \ell$ - comprimento do painel i
 Δr - distância de difusão randômica
 Δt - discretização do tempo
 Δp_i - variação de pressão sobre o painel i
 Δx_C - deslocamento convectivo na direção x
 Δy_C - deslocamento convectivo na direção y
 Δx_D - deslocamento difusivo na direção x
 Δy_D - deslocamento difusivo na direção y
 $\Delta \theta$ - ângulo de difusão randômico
 ε - raio da esfera

- ϕ - potencial de velocidade
- ϕ_i - potencial de velocidade interno
- ϕ_∞ - potencial de velocidade do escoamento incidente
- η - polinômio cúbico para painéis curvos
- Γ - circulação dos vórtices
- γ - intensidade dos vórtices
- γ_0 - componente constante da distribuição de vorticidade linear em painéis curvos
- γ_1 - coeficiente angular da distribuição de vorticidade linear em painéis curvos
- μ - intensidade de um dipolo
- σ - intensidade de uma fonte
- θ - coordenada do sistema polar
- θ_1 - ângulo do sistema do painel
- θ_2 - ângulo do sistema do painel
- ρ - massa específica
- σ - raio do núcleo dos vórtices
- σ_0 - raio inicial do núcleo dos vórtices
- ω - Vorticidade
- $\boldsymbol{\omega}$ - Vetor vorticidade
- Ω - velocidade angular de rotação
- ν - viscosidade cinemática
- ξ - variável auxiliar de integração não dimensional

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Fenômenos físicos que envolvem fluidos, sejam eles líquidos ou gasosos, estão comumente presentes na natureza e, por esta razão, sempre foram alvo da observação e da curiosidade do homem. Como exemplo pode-se citar os fenômenos relacionados à propagação de ondas nos oceanos e na atmosfera, os escoamentos líquidos em rios e em canais, os fenômenos climáticos como o vento e a chuva, diluição de particulados em meios fluidos, convecção de gases provenientes de queimas, entre outros.

Desde as civilizações mais antigas de que se tem notícia, até os dias atuais, as necessidades do ser humano em interferir na natureza esbarram no conhecimento das leis que regem os fenômenos físicos relacionados à mecânica dos fluidos. Assim foram os estudos para a utilização da força dos ventos como fonte de energia em terra ou em mar, como também as pesquisas para irrigação na agricultura com a utilização de canais e a formação de redes de suprimento de água e de esgoto sanitário nas cidades.

No século XVIII o interesse pelo estudo das ciências e em particular da mecânica dos fluidos tomou muito impulso com a revolução industrial. Neste período surgiu a máquina a vapor, que revolucionou a produção industrial e criou as condições necessárias ao aparecimento de novas máquinas. Deste modo, o conhecimento de como criar e desenvolver dispositivos e ferramentas que lidavam com fluidos estimulou e impulsionou a pesquisa e o estudo dos fenômenos físicos relacionados ao uso de lubrificantes, fluidos de arrefecimento, gases para pressurização de linhas, sistemas pneumáticos, etc.

Mas foi no século XIX e início do século XX que a mecânica dos fluidos teve seu maior crescimento, sobretudo na área de aerodinâmica. O grande interesse do ser humano em projetar máquinas voadoras, o que se tornou viável nesta fase devido ao aparecimento do motor a combustão interna, fez surgir pesquisas e trabalhos que tinham como objetivo estudar escoamentos externos. Surgiram então os primeiros perfis aerodinâmicos e, simultaneamente, as primeiras teorias físicas e matemáticas relacionadas à camada limite e à turbulência.

Recentemente a mecânica dos fluidos vem sendo bastante utilizada como ferramenta na engenharia aeroespacial, permitindo o desenvolvimento de novas aeronaves, mísseis com maior alcance, foguetes e veículos lançadores de satélites mais eficientes. Já na engenharia mecânica vem auxiliando no desenvolvimento de bombas, turbinas a gás, caldeiras, geradores, turbinas eólicas e trocadores de calor mais eficientes. Na engenharia química, vem permitindo a construção de melhores ferramentas para mistura de reagentes, câmaras gasosas com rendimento superior e dispositivos que otimizam a queima de gases. Na engenharia ambiental vem contribuindo para o estudo da diluição de poluentes na atmosfera, assim como tem tornado possível estabelecer o impacto do despejo de detritos industriais em rios e oceanos, apontando as melhores soluções para minimização das conseqüências.

Uma área de pesquisa bastante atual e que possui enorme potencial para crescimento é a importante nanoindústria, onde a mecânica dos fluidos permite que se projete e construa máquinas em dimensões nanométricas, cuja utilização vai da informática à medicina.

A modelagem matemática dos fenômenos relacionados à fluidos é bastante complexa devido à grande riqueza da física envolvida, à enorme faixa de variação das propriedades de cada fluido, e sobretudo devido às fortes não linearidades inerentes ao comportamento de líquidos e gases. Pode-se verificar estas características observando a equação de Navier-Stokes, a qual possui solução fechada apenas para uma limitada classe de problemas, onde várias simplificações se tornam necessárias e podem conduzir a resultados não adequados aos interesses da engenharia. Mesmo as equações de camada limite, obtidas com as simplificações de Prandtl, como também as equações de Euler, obtidas com a eliminação dos efeitos viscosos, ainda não possuem solução analítica conhecida. Com tudo isto, as soluções numéricas passam a ter enorme importância e, a partir do surgimento e desenvolvimento da computação científica, tiveram grandes avanços nas últimas décadas.

Os métodos numéricos conhecidos atualmente podem ser classificados como aproximados, pois se originam dos Métodos dos Resíduos Ponderados (MANSUR *et al.*). São exemplos os Métodos das Diferenças Finitas, os quais se baseiam na formulação original dos Métodos de Resíduos Ponderados e os Métodos dos Elementos Finitos, baseados nas formulações fracas dos Métodos de Resíduos Ponderados.

No que se refere à Mecânica dos Fluidos, tais soluções numéricas são aproximações realizadas pela transformação das equações diferenciais parciais, como a equação de Navier-Stokes, em sistemas de equações algébricas, os quais têm solução analítica ou numérica conhecida.

Pode-se também transformar tal equação diferencial parcial em um sistema de equações diferenciais ordinárias através de alguns tipos de transformações analíticas como a Transformada de Laplace ou a Transformada Integral, no entanto estas técnicas conduzem a problemas fortemente dependentes das condições de contorno, o que, para muitas geometrias de interesse, e sobretudo para escoamentos externos, torna difícil sua utilização. Este tipo de abordagem não fará parte deste trabalho.

O método numérico utilizado neste trabalho é uma combinação do Método de Vórtices com o Método dos Painéis, descrito por Lewis (1991), onde o primeiro se encarrega de simular a evolução da dinâmica do escoamento através da discretização do campo de vorticidade, tendo como bases teóricas as leis de Helmholtz, e o segundo se encarrega de resolver o escoamento potencial, satisfazendo a condição de contorno no sólido, uma vez que a condição de contorno no infinito é implicitamente satisfeita pelas funções básicas escolhidas como solução.

Diferentemente dos Métodos de Diferenças Finitas e dos Métodos de Elementos Finitos, os quais utilizam a descrição Euleriana e discretizam o meio fluido em pontos de uma malha de cálculo, o Método de Vórtices utilizado neste trabalho utiliza a descrição Lagrangeana e não discretiza o fluido em pontos de uma malha auxiliar. Por esta razão pode-se dizer que o Método de Vórtices é livre dos problemas inerentes aos métodos que utilizam malhas, quais sejam, a dificuldade para representação de geometrias complexas e o problema da difusão numérica associada.

Esta metodologia é aplicável a uma série de problemas comuns na engenharia onde escoamentos externos ou internos geram carregamentos sobre corpos. Pode-se citar como exemplos de aplicações encontradas na literatura: carregamentos em construções e estruturas terrestres e aquáticas; determinação de esforços em veículos terrestres, aquáticos e aeronaves; escoamentos em turbomáquinas e turbinas eólicas.

1.1. Motivação

A crescente utilização de aparatos que se baseiam em corpos com superfícies aerodinâmicas tem feito com que o estudo deste tipo de escoamento ganhe destaque, quer na pesquisa científica básica, quer no desenvolvimento de novos produtos. Define-se corpo aerodinâmico como aquele cuja forma é especialmente desenhada com o objetivo de se manipular as forças resultantes do contato deste com o escoamento que o circunda. Assim ocorre no projeto de aerofólios para asas e para superfícies de controle em aeronaves e em veículos terrestres e aquáticos, onde as forças a serem controladas são a força de arrasto e a força de sustentação. A crescente preocupação com o rendimento dos equipamentos, o que é acirrado pela concorrência e pela disputa de mercados consumidores, é um dos fatores que tem atraído investimentos da indústria para esta área. Objetiva-se construir máquinas e equipamentos cada vez mais velozes, mais econômicos e com maior mobilidade, o que só é possível através do aprofundamento da pesquisa e do estudo dos mecanismos que governam os fenômenos físicos envolvidos.

O estudo de perfis aerodinâmicos ganha ainda mais importância pelo fato destes não serem apenas utilizados em aeronaves e em veículos terrestres e aquáticos. São também utilizados em mísseis, em foguetes, em veículos lançadores de satélites, em pás de turbinas a gás e eólicas, em rotores de bombas de todas as espécies, em redutores de velocidade e conversores de torque de diversos equipamentos hidráulicos, em sistemas de ventilação industriais e residenciais, dentre outros. O estudo do escoamento ao redor destes corpos é de fundamental importância para a manipulação das forças que se originam na superfície de contato com o escoamento, uma vez que estas, além da importância no que refere ao projeto estrutural da máquina ou do equipamento em questão, muitas vezes são o objetivo ou o produto final a ser otimizado. Estas forças surgem como reação à variação da quantidade de movimento que o corpo exerce sobre o fluido, e como resultado direto do atrito entre as superfícies de contato, dois fenômenos extremamente complexos e, como citado anteriormente, de difícil solução, levando-se em consideração a modelagem matemática, numérica e as ferramentas computacionais disponíveis.

Deste modo, devido ao grande interesse por parte da ciência e da engenharia, e também motivado pela complexidade do problema em questão e pelo elevado grau de dificuldade de

sua solução, fica evidenciado o motivo pelo qual se considera de grande importância o estudo deste tema, seja do ponto de vista teórico, experimental ou numérico.

1.2. Descrição do problema físico

Como dito anteriormente, o surgimento de forças superficiais em corpos imersos em escoamentos tem sua origem na mudança da quantidade de movimento do fluido, uma vez que o corpo é visto como uma restrição ao seu deslocamento. Os fatores que influenciam diretamente nestas forças de superfície estão intimamente relacionados à orientação entre o escoamento e o corpo, assim como mantêm grande dependência com relação à velocidade relativa entre estes e com as propriedades termofísicas do fluido.

O corpo esbelto ou aerodinâmico tem seu formato projetado especialmente para a aplicação a que este se destina, sendo simétrico quando o objetivo é apenas a redução da força de arrasto, e assimétrico quando se deseja controlar a relação sustentação/arrasto (LD). Define-se como força de arrasto a componente da força de contato entre o corpo e o fluido que age na direção e no sentido do escoamento, ao passo que a força de sustentação é a componente na direção normal ao escoamento.

O surgimento da força de sustentação está relacionado à quebra da simetria do escoamento ao redor de corpos, o que é conseguido utilizando-se um aerofólio assimétrico, ou seja, aquele cuja curvatura da linha média entre a superfície superior e inferior não coincide com a linha da corda, a qual liga o bordo de ataque ao bordo de fuga. Outra maneira de se quebrar a simetria do escoamento, e, conseqüentemente, se gerar a força de sustentação, é criar uma angulação entre o aerofólio e o escoamento, denominada ângulo de ataque, conforme pode ser visto na Fig. 1.1.

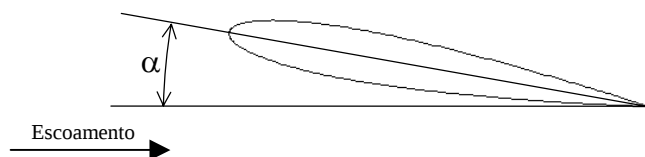


Figura 1.1 – Ângulo de ataque (α)

O ângulo de ataque é o fator mais utilizado para o controle das forças de sustentação e arrasto. Sua variação é utilizada em veículos aéreos, terrestres e aquáticos através de

superfícies de controle como profundores, lemes e ailerons, conforme Fig. 1.2. Já em pás de turbomáquinas, assim como em hélices de motores de aeronaves e embarcações, o ângulo de ataque é variado alterando-se o passo destes dispositivos para adequá-los às diversas condições de operação, tais como variações na velocidade e no torque.

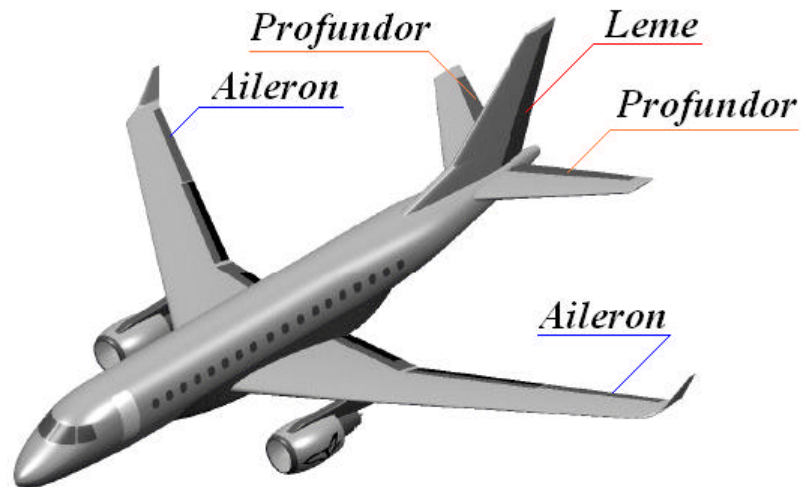


Figura 1.2 - Profundor, leme e aileron
(<http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/short.html>)

A variação da geometria do aerofólio também pode ser utilizada com o objetivo de controlar as forças de arrasto e sustentação. Tais dispositivos são utilizados em aeronaves, onde são denominados flaps e slats, conforme Fig 1.3, cada qual com diferentes formas de atuação e objetivo.

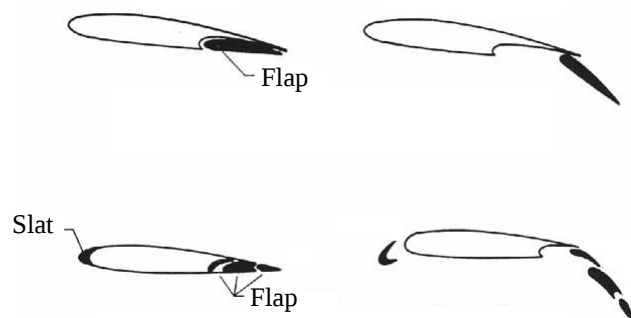


Figura 1.3 – Flap e slat
(http://www.centennialofflight.gov/essay/Theories_of_Flight/Devices/TH17G5.htm)

Como dito anteriormente, o formato de um corpo aerodinâmico é projetado para que as forças de arrasto e sustentação sejam manipuladas adequadamente, o que é feito levando-se em consideração os diversos fenômenos físicos. Assim, quando um fluido escoar sobre a superfície de um sólido, irá criar regiões onde as forças de inércia e viscosas atuam de forma diferenciada. Estas regiões necessitam de tratamentos especiais, e por isto têm sido objeto de estudo ao longo dos anos.

Até o início do século XX a solução analítica para escoamentos externos permanentes só era conhecida para dois casos particulares. O primeiro para o caso de escoamentos viscosos com baixo número de Reynolds, onde o termo convectivo não linear da equação de Navier-Stokes é negligenciado, e o balanço das forças se dá entre a pressão e a viscosidade (Kundu, 1990). O segundo para o caso de escoamentos não viscosos, onde ocorre um balanço de forças entre a inércia e a pressão. Somente em 1905 Prandtl formulou a teoria de camada limite, segundo a qual os efeitos viscosos poderiam ser desprezados em todas as regiões do escoamento com exceção de uma fina camada próxima à superfície, onde a condição de contorno de não deslizamento deve ser satisfeita. Assim pode-se concluir que as forças de origem viscosas são importantes na camada limite e na esteira, ao passo que fora destas regiões as forças viscosas podem ser desprezadas.

A camada limite pode ser descrita como a região próxima ao corpo onde a velocidade parte do valor zero, onde satisfaz a condição de não-deslizamento, até um valor finito próximo da velocidade do escoamento não perturbado. Não existe teoria matemática que a comprove (Batchelor, 1970), porém, sua grande aceitação no meio acadêmico deve-se ao fato desta obter suporte na observação e experimentação, fazendo uma conexão entre a expectativa intuitiva de se desconsiderar os efeitos viscosos na maior parte do fluido quando a viscosidade é baixa, com o fato de se ter que satisfazer a condição de não-deslizamento na superfície do corpo, por menor que seja esta viscosidade.

Deste modo, pode-se citar inicialmente quatro regiões onde as forças de inércia e as forças viscosas atuam de forma diferente. Uma região próxima à superfície do corpo, denominada camada limite, uma segunda região à jusante do corpo denominada esteira viscosa, uma terceira região, irrotacional e fora da camada limite, mas que ainda sofre influência da presença do corpo, e, por último, uma quarta região, suficientemente afastada do corpo, onde o escoamento incidente não mais percebe a presença deste. A existência da

camada limite é necessária para a satisfação da condição de contorno de não deslizamento, conforme previu Prandtl, porém, sua espessura é altamente dependente do número de Reynolds, o que pode gerar padrões de escoamento bastante diferentes para a mesma geometria.

Assim, com baixos valores de número de Reynolds, tem-se uma espessura da camada limite relativamente grande, e conseqüentemente a esteira se torna espessa, como pode ser visto na Fig. 1.4.

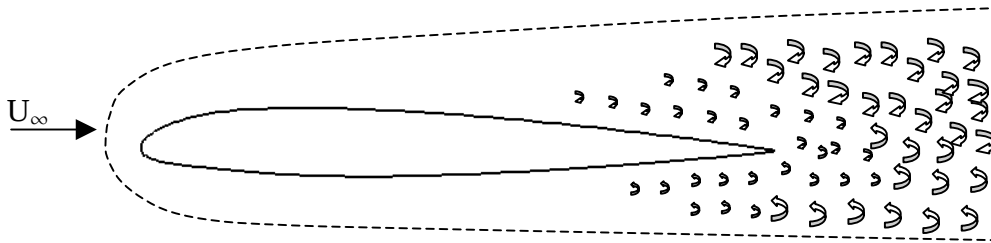


Figura 1.4 – Esquema de camada limite com baixo Reynolds

Por outro lado, a espessura da camada limite diminui com o aumento do número de Reynolds, tendendo a zero quando o número de Reynolds tende a infinito. Uma camada limite e esteira de menor espessura podem ser vistas na Fig. 1.5.

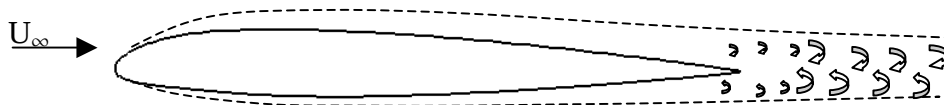


Figura 1.5– Esquema de camada limite com alto Reynolds

Outro fator que modifica o escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos é a separação da camada limite, que, apesar de mais comum em corpos rombudos, pode ser observada também em corpos esbeltos, onde sua ocorrência será ditada pelo número de Reynolds, pelo ângulo de ataque e geometria do aerofólio, por fenômenos de transição laminar-turbulenta, e pela presença de gradiente adverso de pressão.

A separação da camada limite pode implicar no estol, conforme a visualização da Fig. 1.6, situação que implica em queda do coeficiente de sustentação.

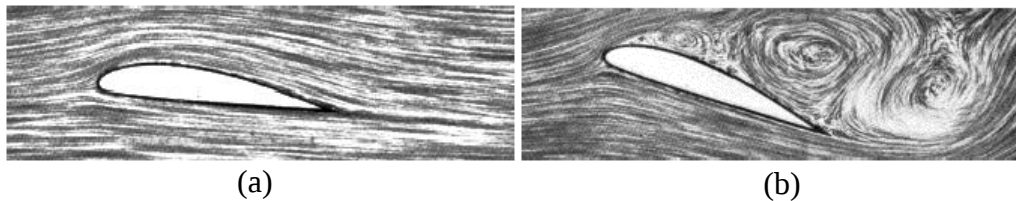


Figura 1.6 – Escoamento ao redor de um aerofólio:
(a) ângulo de ataque baixo; (b) ângulo de ataque alto.
(Dewi,1998)

A separação é um fenômeno que ocorre quando o escoamento não tem condições de acompanhar a superfície do aerofólio, o que pode ocorrer devido aos fatores listados acima. Tal situação é percebida pela mudança brusca na distribuição de pressão da superfície do corpo, com conseqüente diminuição na força de sustentação. Verifica-se na Fig 1.7 o aumento linear do coeficiente de sustentação (C_L) em função do ângulo de ataque, até a ocorrência do estol, enquanto o coeficiente de arrasto (C_D) apresenta uma variação não linear para a mesma faixa de variação do ângulo de ataque.

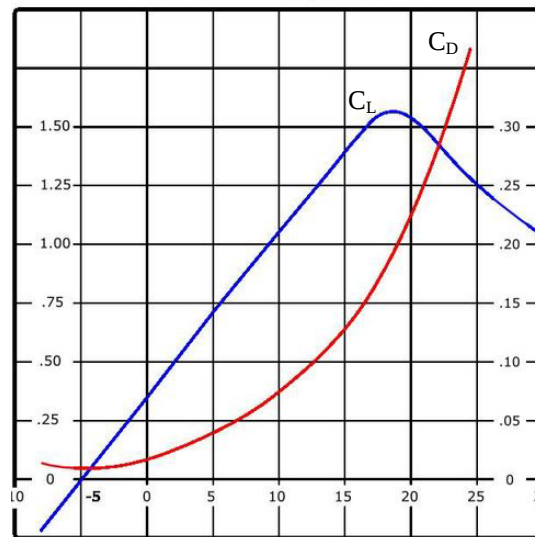


Figura 1.7. – Variação típica ilustrativa dos coeficientes de sustentação e arrasto em função do ângulo de ataque.
(<http://aerodyn.org/LowSpeed/lowspeed.html>)

O estudo da variação do número de Reynolds acrescenta ao problema uma gama extremamente rica de fenômenos físicos, advindos da transição do regime laminar para o regime turbulento, a qual ocorre, na maioria dos casos, para Reynolds superiores à 10^5 , alterando substancialmente as estruturas do escoamento em questão.

Assim, com Reynolds alto, os efeitos da separação da camada limite passam a ser ainda mais percebidos pelo escoamento, uma vez que, nestes casos, a vorticidade gerada na superfície do corpo é de grande magnitude, sendo espalhada por uma região ainda maior devido à separação (Batchelor, 1970).

A separação de camada limite laminar e a conseqüente perda de sustentação ocorre a partir da formação de bolhas de recirculação na parte superior do aerofólio, as quais, para aerofólios com grande curvatura, podem surgir próximas do bordo de fuga, e crescerem na direção do bordo de ataque, situação na qual a distribuição de pressão na superfície do aerofólio é altamente perturbada, ocasionando o que se denomina estol de bordo de fuga.

A formação de bolhas de recirculação ocasiona mais facilmente a queda da sustentação em situações onde a transição do regime laminar para o regime turbulento não ocorre, impedindo o recolamento da camada limite e tornando inevitável o estol. Esta situação pode ser evitada induzindo-se intencionalmente a passagem do regime lamiar para o turbulento, através da utilização de “gatilhos” como ranhuras ou fios de aço fixos no aerofólio. A Fig. 1.8 mostra o nascimento de uma bolha de recirculação próximo ao bordo de ataque, devido à separação da camada limite e ao recolamento de camada cisalhante na superfície do aerofólio. A camada cisalhante sofre transição de laminar para turbulenta e, por isso, o recolamento na superfície é facilitado. A partir do ponto de recolamento a camada limite se torna completamente turbulenta.

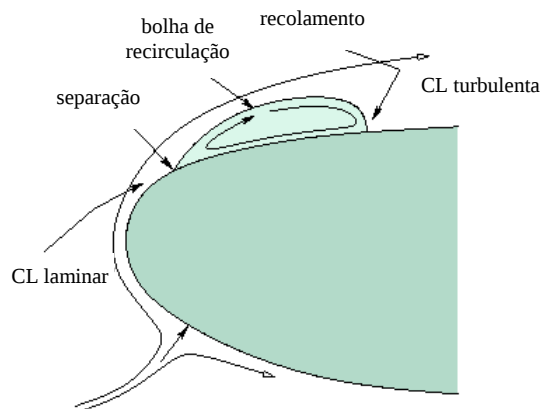


Figura 1.8 – Separação e recolamento da camada limite
(<http://www.aerodyn.org/LowSpeed/lowspeed.html>)

Os diferentes fatores que ocasionam a formação de bolhas de recirculação e a separação da camada limite estão relacionados com o fenômeno da histerese, o qual pode ser observado na Fig. 1.9, onde a curva do coeficiente de sustentação para um aerofólio com ângulo de ataque crescente é diferente daquela para um aerofólio com ângulo de ataque decrescente.

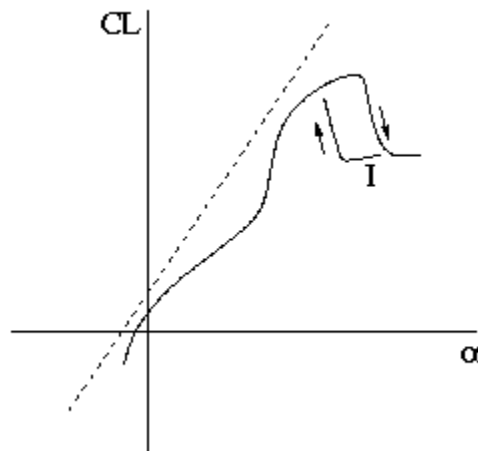


Figura 1.9 – Ciclo de histerese na curva de C_L
(<http://aerodyn.org/LowSpeed/lowspeed.html>)

Os diferentes perfis de velocidade existentes na camada limite e na esteira fazem surgir camadas cisalhantes de fluido, as quais, quando se está diante de elevados números de Reynolds, podem se enrolar pelo efeito da tensão cisalhante viscosa oriunda do gradiente de velocidade, criando as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, como mostra a Fig. 1.10.

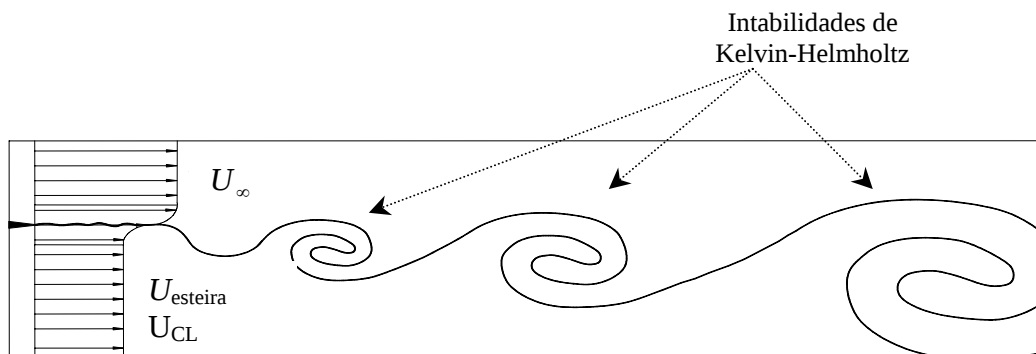


Figura 1.10 – Formação de instabilidades no escoamento (SILVEIRA NETO, 2004)

A separação e as instabilidades de Kelvin-Helmoltz formam uma esteira oscilatória e com formação alternada de vórtices, o que causa enorme oscilação nos carregamentos sobre o corpo. Tal esteira é denominada esteira de Von Karman, como mostra a Fig. 1.11, sendo mais comum em escoamentos ao redor de corpos rombudos. No entanto, sua presença também pode ser notada em corpos esbeltos com elevados ângulos de ataque.

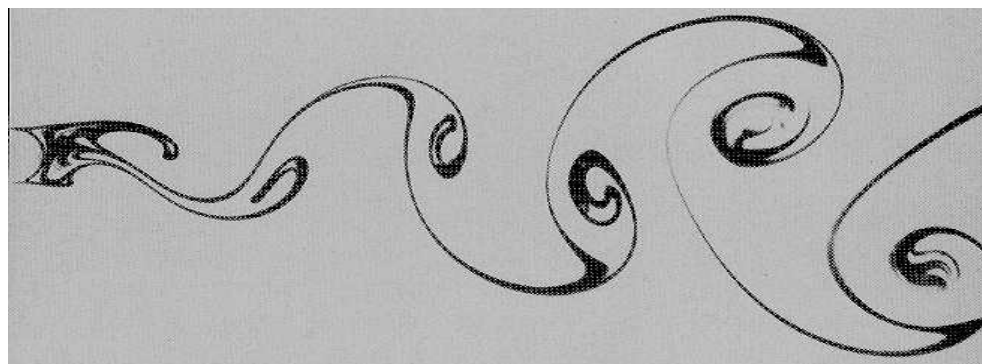


Figura 1.11 - Esteira de Von Karman (SILVEIRA NETO, 2004)

1.3. Descrição do trabalho a ser desenvolvido

Neste trabalho, são realizadas simulações do escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos através do Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis, conforme detalhado nos Capítulos 3 e 4.

O Método dos Painéis encarrega-se de resolver o escoamento potencial e encontrar o valor de vorticidade a ser gerada na parede do sólido, de modo a satisfazer às condições de contorno na superfície do aerofólio. A condição de contorno no infinito é automaticamente satisfeita, uma vez que as funções elementares distribuídas sobre os painéis e utilizadas como solução do escoamento potencial têm decaimento logarítmico, garantindo a manutenção da velocidade do escoamento não perturbado longe do corpo. Os valores de vorticidade encontrados nos pontos de controle dos painéis dão origem a vórtices discretos, os quais são liberados no escoamento para compor a região rotacional, movendo-se por ação da convecção, ou seja, devido aos campos de velocidade induzidos pelos painéis, pelo escoamento incidente e pela nuvem de vórtices livres na esteira. O campo de vorticidade produzido pela nuvem de vórtices se difunde no espaço por ação da viscosidade.

O Método de Vórtices utiliza a descrição lagrangeana para acompanhar a evolução da dinâmica do escoamento ao redor do aerofólio, pela superposição de uma nuvem de vórtices. Em outras palavras, o Método de Vórtices trata o vórtice como elemento capaz de transportar a vorticidade gerada na superfície sólida, o que tem embasamento nas leis de Helmholtz. O campo de vorticidade é então discretizado, e a solução da equação de transporte de vorticidade é aproximada pela utilização de funções elementares básicas carregadas pelos vórtices, as quais mantêm a dependência entre os campos de vorticidade e de velocidade através da utilização da lei de Biot-Savart.

Os vórtices pontuais induzem um campo de velocidade singular, e por este motivo são substituídos por modelos de vórtices com núcleos que atenuam a velocidade. A convergência do Método de Vórtices é garantida pelo recobrimento destes núcleos em toda região rotacional do escoamento, porém, mecanismos de aglomeração de vórtices são utilizados para diminuir o número de vórtices que porventura estejam com excessivo recobrimento de seus núcleos.

A metodologia numérica associada ao Método de Vórtices permite que se trabalhe completamente livre de malhas auxiliares de cálculo. Esta característica consiste na sua grande vantagem com relação a outros métodos numéricos utilizados para a simulação de escoamentos ao redor de corpos, uma vez que apresenta maior adaptabilidade para simulação de escoamentos externos, sobretudo para geometrias complexas. O Método de Vórtices satisfaz implicitamente a condição de contorno no infinito e não apresenta difusão numérica característica de métodos que utilizam malhas (Sarpkaya, 1994).

No que se refere à etapa convectiva do Método de Vórtices, o presente trabalho pretende avaliar o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), com o intuito de utilizá-lo para diminuir para N o custo computacional desta etapa, que originalmente, pelo método direto vórtice-vórtice, é da ordem de N^2 , sendo N o número de vórtices presentes na simulação.

O algoritmo de aglomeração de Rossi (1997) é utilizado para realizar a fusão dos vórtices que se encontram com recobrimento excessivo de seus núcleos. Porém, devido ao seu custo computacional também ser da ordem de N^2 , realiza-se a aglomeração separadamente em cada caixa formada por ocasião da discretização espacial utilizada no MEMA para expansão em multipolos.

No que se refere à etapa difusiva do Método de Vórtices, o presente trabalho se propõe a estudar e avaliar quatro diferentes métodos de difusão viscosa encontrados na literatura, quais sejam: Método do Avanço Randômico (MAR), Método da Velocidade de Difusão (MVD), Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Para tanto, pretende-se realizar a simulação de dois casos que possuem solução conhecida, ou seja, a difusão pura de um vórtice de Lamb e o problema de desenvolvimento de camada limite de Blasius em placa plana. O primeiro problema visa a fornecer dados para comparação dos métodos de difusão implementados em um caso puramente difusivo, ao passo que o segundo problema visa a avaliação de uma situação mais próxima do problema real difusivo/convectivo presente no método de vórtices.

O processo de geração de vorticidade é amplamente estudado, tendo em vista sua grande importância, tanto para uma fiel avaliação dos campos de velocidade e pressão na superfície sólida, quanto para a evolução da simulação e acurácia dos resultados finais, uma vez que o fluxo de vorticidade na parede exerce papel preponderante em todos os modelos desenvolvidos. Este é um dos pontos cruciais deste trabalho. Por este motivo são realizadas simulações do escoamento ao redor de uma placa plana utilizando-se o Método dos Painéis, ainda com o objetivo inicial de se avaliar o processo de geração de vorticidade. Neste caso, os vórtices são gerados para se satisfazer às condições de contorno de impenetrabilidade e não escorregamento simultaneamente, sendo incógnitas os valores de vorticidade dos painéis e dos vórtices nascentes. O estudo do escoamento em placa plana é conduzido para se avaliar a geração de vorticidade em um problema com solução conhecida. Pode-se comparar os perfis de velocidade encontrados nas simulações com o perfil de Blasius para placa plana, com o intuito de avaliar a sensibilidade do método aos parâmetros utilizados, escolhendo suas melhores faixas de utilização, assim como levantar as potencialidades e deficiências do modelo desenvolvido.

A representação do corpo é aprimorada neste trabalho através da utilização de painéis curvos em substituição aos painéis retos. Deste modo, pode-se garantir a continuidade da derivada na discretização da geometria, o que fornece um campo de velocidade suave próximo das quinas, evitando eventuais e indesejados espalhamentos de vórtices.

A determinação dos carregamentos sobre o corpo é realizada aplicando-se três metodologias: LEWIS (1991), SHINTANI & AKAMATSU (1994) e WU (1981). Seus resultados são comparados entre si.

1.4. Objetivos

Tendo em vista as já citadas dificuldades matemáticas impostas pelas equações que descrevem o problema físico em questão, modelos numéricos capazes de obter soluções cada vez mais acuradas vêm sendo alvo de pesquisas intensas, buscando-se aprimorar a acurácia dos resultados numéricos obtidos com reduzido custo computacional.

Assim, este trabalho visa a contribuir no desenvolvimento de modelos numéricos que compreendem o Método de Vórtices, em sua versão bidimensional, com vistas à produção de resultados mais representativos dos fenômenos físicos presentes nos escoamentos ao redor de perfis aerodinâmicos. Para tanto, pode-se citar como objetivos específicos do presente trabalho:

- avaliar a adaptabilidade espacial do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), através de testes em diferentes distribuições de nuvens de vórtices;
- testar a aplicabilidade e o desempenho do MEMA, utilizando o código numérico desenvolvido por Carrier et al. (1988) em simulações de escoamentos externos, com alto número de Reynolds, ao redor de aerofólios, através do Método de Vórtices em combinação com o Método de Painéis;
- avaliar a acurácia e o custo computacional do Método de Avanço Randômico (MAR), do Método de Velocidade de Difusão (MVD), do Método de Redistribuição de Vorticidade (MRV) e do Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), quando aplicados ao problema difusão pura do vórtice de Lamb;
- testar modelos de geração de vorticidade em escoamento sobre placa plana, utilizando-se o Método dos Painéis;
- implementar um algoritmo de aglomeração baseado em Rossi (1997) para controle do número de vórtices e garantia de recobrimento de seus núcleos;

- reduzir o custo computacional do algoritmo de aglomeração de Rossi (1997), através da utilização da discretização espacial do MEMA, realizando-se a aglomeração separadamente em cada caixa utilizada na expansão em multipolos;
- utilizar o MEMA em simulações de escoamentos externos à aerofólios, utilizando um dos métodos de difusão determinísticos testados anteriormente, em conjunto com algoritmo de aglomeração apresentado por Rossi (1997);
- aplicar e testar um dos métodos de difusão determinísticos avaliados anteriormente, para diferentes número de Reynolds, na simulação de escoamentos externos ao redor de aerofólios, pelo Método de Vórtices em combinação com o Método de Painéis;
- testar diferentes modelos de geração da vorticidade no contorno sólido e diferentes maneiras de representação do campo de vorticidade nas proximidades da parede do aerofólio;
- implementar a discretização do aerofólio com painéis curvos e distribuição linear de vorticidade;
- implementar, testar e comparar os modelos propostos por LEWIS (1991), SHINTANI & AKAMATSU (1994) e WU (1981) para o cálculo do carregamento na superfície do corpo;
- realizar simulações numéricas ao redor de um aerofólio, para altos números de Reynolds, diferentes valores de ângulo de ataque, e comparar os resultados numéricos obtidos com outros resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

Deste modo, podem ser consideradas inéditas as seguintes contribuições deste trabalho: a modelagem para o processo de geração de vorticidade na superfície de um corpo sólido; e a modelagem numérica completa, que une o novo modelo de geração proposto a uma combinação de modelos de difusão e convecção já disponíveis na literatura.

O Capítulo 2 descreve a revisão bibliográfica dos trabalhos analíticos, numéricos e experimentais encontrados na literatura, os quais se dedicam a explorar o escoamento ao redor de corpos, ou estão relacionados ao desenvolvimento dos modelos numéricos empregados.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é feita uma revisão bibliográfica detalhada dos trabalhos científicos relacionados ao tema em estudo. Tal revisão visa a permitir um fiel posicionamento deste estudo no contexto da literatura atual sobre o problema físico em questão, ou seja, sobre o escoamento ao redor de aerofólios.

Deste modo, são apresentados trabalhos experimentais e de simulação numérica que têm como foco escoamentos externos ao redor de corpos, os quais servem como base teórica para a formação do cabedal de conhecimentos necessários ao desenvolvimento do modelo requerido, assim como compõe a fonte de dados de comparação e avaliação dos resultados encontrados.

Inicialmente são apresentados os trabalhos analíticos, numéricos e experimentais relativos ao escoamento ao redor de aerofólios. Segue-se mostrando aqueles trabalhos cujo objetivo é o desenvolvimento do Método dos Painéis e, por último, são referenciados os trabalhos ligados à linha de pesquisa do Método de Vórtices.

2.1. Escoamento ao redor de aerofólios

O escoamento ao redor de aerofólios é uma área da pesquisa científica muito estudada pelas razões apresentadas no capítulo 1, ou seja, inúmeros trabalhos teóricos e experimentais têm sido conduzidos devido ao grande interesse em se desenvolver formas geométricas que permitam uma manipulação adequada das forças de arrasto e sustentação, as quais são resultantes da interação do fluido com a superfície do corpo, seja para a aplicação em aeronaves, para o desenvolvimento de veículos ou mesmo para projeto de estruturas terrestres e aquáticas.

2.1.1. Trabalhos analíticos

O desenvolvimento de trabalhos analíticos que apresentem soluções satisfatórias para o estudo do escoamento ao redor de aerofólios é limitado e dificultado pela grande faixa de aplicação e de representação das equações de Navier-Stokes. Deste modo, as soluções analíticas encontradas na literatura estão relacionadas a simplificações matemáticas e hipóteses físicas, que possuem uma faixa de aplicação bastante clara. Em geral, de modo a permitir um tratamento analítico, simplificações são empregadas, tanto na geometria, através de hipótese de aerofólio fino, por exemplo, quanto no escoamento, através da desconsideração dos efeitos viscosos, por exemplo. A grande maioria das soluções analíticas disponíveis na literatura foi obtida na primeira metade do século XX, as quais encontram-se descritas detalhadamente em inúmeros livros sobre aerodinâmica.

Muitas soluções para o caso do escoamento potencial podem ser encontradas em livros que abordam aplicações da Teoria Potencial, como THWAITES (1960), KARAMCHETTI (1980), ANDERSON (1991) e KATZ & PLOTKIN (2001).

A aerodinâmica básica é tratada em BERTIN & SMITH (1998), onde se encontram os fundamentos da teoria de aerofólios finos para diversas aplicações aeronáuticas. VAN DYKE (1975) descreve o Método das Perturbações, enquanto que MILNE-THOMSON (1958) utiliza a Transformação Conforme em aplicações aerodinâmicas e MILNE-THOMSON (1955) trata com maior ênfase da hidrodinâmica.

SCHLICHTING & GERSTEN (2000) apresenta detalhadamente a teoria de camada limite, ao passo que para se obter informações sobre a camada limite laminar, pode-se consultar ROSENHEAD (1963).

2.1.2. Trabalhos Experimentais

Devido a enorme complexidade dos fenômenos físicos relacionados ao escoamento ao redor de corpos, a experimentação é bastante comum nesta área, tendo sido a principal fonte de conhecimento para a mecânica dos fluidos durante muitos anos. Trabalhos experimentais estão ainda presentes na literatura atual, ora como objetivo principal do estudo, ora como meio de validação de metodologias e simulações numéricas.

A indústria aeroespacial impulsionou decisivamente a experimentação do escoamento ao redor de aerofólios, obtendo enormes avanços no conhecimento dos mecanismos associados às cargas aerodinâmicas na sua superfície. Muitos destes trabalhos tinham como objetivo levantar a distribuição da pressão ao longo da corda do aerofólio, assim como o relacionamento dos coeficientes de sustentação, arrasto e dos momentos com o ângulo de ataque, tendo como parâmetro o número de Reynolds.

Escoamentos com número de Reynolds da ordem de 10^6 , ao redor do aerofólio NACA 0012, foram ensaiados por CRITZOS *et al.* (1955), o que forneceu valores de coeficientes de pressão, sustentação e arrasto para ângulos de ataque entre 0° e 180° .

ABBOTT, & VON DOENHOFF (1959) apresentam dados experimentais que relacionam o coeficiente de sustentação e pressão com o ângulo de ataque, para números de Reynolds da ordem de 10^6 , e para diversos aerofólios NACA (“National Advisory Committee for Aeronautics”), órgão que originou a agência espacial norte-americana “NASA”.

SHELDAHL, R. E. & KLIMAS, P. C., 1981, mostram os valores encontrados experimentalmente para o coeficiente de arrasto de um aerofólio NACA 0012, para diversos valores de número de Reynolds.

BLENVIS (1984) traz dados experimentais para corpos rombudos, tubulações e aerofólios, inclusive para números de Reynolds da ordem de 10^5 .

Resultados de experimentos realizados com o escoamento de ar e água ao redor de aerofólios e superfícies de sustentação de aeronaves são apresentados por HOERNER & BORST (1985).

BIRCH & LEE caracterizaram a camada limite e seu desenvolvimento espacial e temporal no ponto de estagnação, no bordo de ataque, na região de transição e nos pontos de separação e de recolamento, através de múltiplos sensores de fio quente. Foi percebido que a transição, separação e o recolamento da camada limite são atrasados se a frequência de oscilação for diminuída, e que o estol dinâmico ocorre a partir de uma perturbação turbulenta no bordo de ataque.

KUO & HSIEH (2001), através da utilização de técnicas de visualização e de medição de velocidades, estudaram as estruturas de vórtices e convecção da vorticidade ao redor de um aerofólio NACA 0012, o qual oscila em um escoamento uniforme. O eixo de rotação do

aerofólio foi posicionado no primeiro terço da corda, permitindo que este oscilasse a baixa frequência reduzida perto do ângulo de estol estático. Os autores observaram que, durante o movimento descendente, o vórtice formado no bordo de ataque cresce ao passo que o vórtice do bordo de fuga permanece sendo expelido para a esteira. O efeito inverso foi observado pelos autores no movimento de ascensão do aerofólio, ou seja, o vórtice do bordo de ataque, já formado, se desloca por ação do escoamento ao passo que começa a se formar um vórtice com circulação anti-horária no bordo de fuga. Foi constatado também que variações espaciais e temporais na geração de vorticidade e o desprendimento de vórtices no bordo de ataque se dão somente em regiões onde a camada limite não se separou completamente.

BERTAGNOLIO *et al.* (2001) expõem os resultados de experimentos realizados com pás de turbinas eólicas e os comparam com os resultados numéricos obtidos pelos programas XFOIL e ELLIPSYS 2D, desenvolvidos no laboratório dos autores, obtendo boa concordância dos coeficientes de sustentação e arrasto.

DEVINANT *et al.* (2002) realizaram experimentos com túnel de vento, onde um nível de turbulência de até 16 % foi induzido no escoamento. Verificou-se grande alteração dos valores de coeficiente de sustentação, arrasto e pressão, e também no momento de arfagem, sobretudo para o ângulo de ataque correspondente ao estol.

GEISSLER *et al.* (2005) realizaram experimentos em túnel de vento com um aerofólio supercrítico, ou seja, aquele cujo formato visa a atrasar os efeitos do escoamento transônico, reduzindo as consequências da onda de choque para uma faixa maior de número de Mach. Para tanto, os pesquisadores conduziram ensaios em túnel de vento com as paredes móveis, induzindo o estol dinâmico e realizando as medições dos carregamentos, verificando a influência das paredes do túnel e dos efeitos da transição de camada limite laminar para a turbulenta.

2.1.3.Trabalhos numéricos

SRNIVASAN *et al.* (1995) simularam o escoamento bidimensional transiente ao redor de um aerofólio que realiza movimentos oscilatórios, utilizando um esquema implícito de diferenças finitas. Foram testados cinco modelos de turbulência largamente encontrados na

literatura, com o intuito de testar a sensibilidade e a acurácia na simulação do estol em pás de rotores de helicópteros. Foi simulado também o escoamento com camada limite colada, em pré-estol e em estol, ao redor de um aerofólio NACA 0015 em movimento oscilatório, fornecendo as curvas de histerese dos carregamentos e os coeficientes de pressão instantâneos. São avaliados parâmetros como a densidade da malha, dt e dissipação numérica nas soluções transientes, indicando que nenhum dos modelos apresenta boa concordância no cálculo dos carregamentos quando comparados a experimentos. No entanto, o modelo algébrico apresentou alguma superioridade com relação ao modelo de Baldwin-Lomax, para os três regimes citados, mantendo o mesmo custo computacional, enquanto que o modelo de uma equação mostrou-se mais acurado que o modelo algébrico. O modelo de Baldwin-Barth prevê a separação com algum atraso e o recolamento antecipadamente, ao passo que o modelo de Spalart-Allmaras prevê antecipadamente a separação e com atraso o recolamento.

BHASKARAN & ROTHMAYER (1998) utilizaram a formulação vorticidade/função corrente das equações de Navier-Stokes, aplicadas a uma parábola semi-infinita, com o intuito de simular o escoamento bidimensional transiente no bordo de ataque de um aerofólio para o caso estacionário, com movimento de arfagem negativo e oscilatório. Foram encontrados resultados em boa concordância com simulações numéricas para todo o aerofólio, mostrando que pequenas perturbações no escoamento podem induzir a formação de bolhas na camada limite, antes mesmo do aparecimento de qualquer escoamento reverso, e ainda que oscilações no atrito na parede crescem em amplitude, sendo carregadas pelo escoamento incidente.

GUO *et al.* (1998) apresentaram um modelo de diferenças finitas aplicado à equação de Navier-Stokes bidimensional na formulação vorticidade-função corrente, o qual foi testado em um escoamento ao redor de cilindro com número de Reynolds da ordem de 10^3 - 10^4 . O modelo utilizou o sistema de coordenadas adaptativo à geometria do corpo no domínio físico, transformado em malha uniforme no domínio computacional. Os autores utilizam um novo esquema misto de terceira ordem avançada com quarta ordem centralizada para a discretização da equação de transporte da vorticidade e segunda ordem centralizada para a função corrente. São apresentados diversos resultados para cilindro circular e elíptico, onde se discute a influência da condição inicial, da discretização espacial e temporal aplicadas.

SUN & SHEIKH (1999) resolveram numericamente as equações médias de Reynolds pelo Método das Diferenças Finitas, utilizando a injeção de escoamento regular ou intermitente. O objetivo de evitar o estol dinâmico causado pela variação oscilatória do ângulo de ataque foi alcançado, tendo maior eficácia a injeção intermitente de escoamento, a qual eliminou a queda do coeficiente de sustentação e o aumento do coeficiente de arrasto na simulação do aerofólio NACA 0012.

AKIBARI & PRICE (2000) simularam o escoamento incompressível e viscoso ao redor de um aerofólio elíptico bidimensional oscilatório a altos ângulos de ataque. Estes pesquisadores resolveram a equação de Navier-Stokes na forma de vorticidade/função-corrente pelo método de vórtices, e a superfície da elipse foi transportada do domínio computacional para o domínio físico através do uso da transformação de Joukowski. Foram encontrados resultados que permitiram relacionar a sensibilidade e concordância do modelo à localização do eixo de arfagem, à frequência de oscilação, ao ângulo de ataque médio e à espessura da elipse, quando este foi comparado a experimentos de visualização.

AKIBARI & PRICE (2003) utilizaram o Método de Vórtices para resolver a equação de Navier-Stokes formulada na forma de vorticidade/função-corrente com o intuito de simular o escoamento incompressível e viscoso ao redor de um aerofólio NACA 0012. Os efeitos viscosos e convectivos são separados e resolvidos seqüencialmente a cada passo no tempo. Para solução da equação da convecção utiliza-se o método de vórtice-célula, enquanto que a equação de difusão é resolvida utilizando-se um esquema de segunda ordem de diferenças finitas. Os autores transportam a superfície do aerofólio do domínio computacional para o domínio físico através do uso da transformação de Joukowski. São avaliados diversos parâmetros como frequência de oscilação, ângulo de ataque médio, localização do eixo de arfagem e número de Reynolds. Os autores observaram que a frequência de oscilação é o parâmetro que mais exerce influência no escoamento.

FERREIRA & FICO simularam o escoamento ao redor de um aerofólio NACA 0012 através do Método de Volumes finitos, com geração de malhas computacionais baseada em equações diferenciais elípticas, e solução das equações de Navier-Stokes em sua forma vetorial com o uso da técnica de MacCormack e condições de contorno de Euler. São fornecidos resultados das simulações com ângulo de ataque nulo para distribuição de velocidade e coeficiente de pressão.

ROZHDESTVENSKY & RYZHOV (2003) estudam o fenômeno da propulsão que se origina dos movimentos de rotação e/ou translação de aerofólios. Os autores realizam uma pesquisa direcionada a avaliar os modelos matemáticos e numéricos existentes na literatura, comparando-os com os dados experimentais existentes. Os fenômenos físicos presentes também são listados e analisados, o que permite formar um domínio de validade para os modelos numéricos avaliados, no que diz respeito ao projeto de veículos aéreos e terrestres que utilizam este tipo de propulsão. São apresentadas curvas de coeficiente de empuxo, amplitude de oscilação, ângulo de fase e outros parâmetros relevantes, as quais foram obtidas numericamente e experimentalmente nos diversos trabalhos referenciados, para o aerofólio NACA 0012.

JUNG & PARK (2005) realizaram experimentos com o objetivo de se estudar a geração e o transporte da vorticidade na esteira próxima a um aerofólio oscilante. Através do movimento oscilatório sobre um eixo de arfagem localizado no primeiro quarto da corda a partir do bordo de ataque. O escoamento foi medido com anemometria a fio quente e visualizado com gerador de fumaça a fio, a fim de se estabelecer coligações entre o escoamento na camada limite e a frequência com que as estruturas de vórtices são transportadas pelo escoamento. Os autores concluíram que a frequência com que os vórtices são transportados pelo escoamento muito difere daquela encontrada para o caso do aerofólio com ângulo de ataque fixo, sendo esta apenas função do ângulo de fase, e não do ângulo de ataque, mantida fixa a frequência de oscilação. Foi observado também pelos pesquisadores que a faixa de frequência com que os vórtices são transportados pelo escoamento diminui com o aumento da frequência de oscilação.

SHAN *et al.* (2005) apresentam os resultados para Simulação Numérica Direta da separação e transição de escoamento ao redor de aerofólio NACA 0012, com ângulo de ataque 4° e número de Reynolds 10^5 . Detalhes da separação, camada cisalhante separada, geração da vorticidade, transição turbulenta e recolamento da camada limite são capturados pela simulação.

Teixeira *et al.* (2006) utilizam o Método de Vórtices acoplado ao Método dos Painéis para simular o escoamento bidimensional, compressível e não permanente ao redor de aerofólios sujeitos ao estol devido a uma mudança súbita no ângulo de ataque. O desprendimento de vorticidade resultante da separação da camada limite e modelado com

painéis com intensidade constante, fixos aos pontos de separação, os quais se transformam em vórtices de Lamb, fazendo o escoamento evoluir até o regime permanente. Os campos de vorticidade e velocidade são relacionados pela lei de Biot-Savart, e a equação de transporte da vorticidade é decomposta em uma parte convectiva, a qual é calculada somando-se o escoamento incidente com a velocidade induzida pelos painéis e pelos vórtices de Lamb gerados, e uma parte difusiva, a qual é resolvida pelo Método do Avanço Randômico. O cálculo da pressão na superfície do aerofólio é feito com a utilização de um novo modelo que leva em consideração o salto na pressão de estagnação que ocorre quando se cruza o ponto de separação da camada limite.

2.2. Método dos Painéis

Soluções analíticas para o escoamento potencial são encontradas na literatura, porém, a dificuldade em se lidar com geometrias arbitrárias faz com que se recorra à utilização de soluções numéricas.

O Método dos Painéis é uma particularização do Método dos Elementos de Contorno BREBBIA *et al.*(1984), o qual permite o cálculo de grandezas no domínio, a partir de informações ligadas ao contorno. Deste modo, o Método dos Painéis, o qual é estudado detalhadamente no capítulo 3 e 4, resolve o escoamento potencial ao redor de aerofólios, discretizando a superfície sólida e satisfazendo a condição de contorno na parede.

As primeiras referências ao Método dos Painéis encontradas na literatura são MARTENSEN (1959) e HESS & SMITH (1966), enquanto que uma revisão histórica é apresentada por HESS (1990). Aplicações aeronáuticas extensas são vistas em KATZ & PLOTKIN (2001) e MORAN (1984), onde o foco é o escoamento potencial incompressível ao redor de aerofólios.

LEWIS (1981) apresenta a combinação do Método de Vórtices com o Método dos Painéis, facilitando a aplicação do Método dos Vórtices a problemas que envolvam o escoamento ao redor de geometrias complexas.

Para a satisfação da condição de contorno nos painéis, o Método dos Painéis fornece a intensidade das singularidades que são dispostas na superfície do corpo. Estas singularidades são representadas por funções básicas, que, devido ao seu decaimento,

satisfazem implicitamente a condição de contorno no infinito. Diversos tipos de singularidades podem ser utilizados, com diversos tipos de distribuição sobre a superfície. Um estudo comparativo dessas possibilidades pode ser visto em PEREIRA *et al.* (2004). Aplicações de singularidades de maior ordem são analisadas em PEREIRA & BODSTEIN (2004).

SILVA *et al.* (2004) desenvolveram um código numérico para cálculo do escoamento bidimensional incompressível ao redor de pás de turbinas eólicas, utilizando o Método dos Painéis para baixos ângulos de ataque, dimensionando o rotor de acordo com MANWELL *et al.* (2002).

2.3. Método de Vórtices

O Método de Vórtices pode ser dividido em dois tipos básicos, de acordo com a maneira que o campo de velocidade é calculado. O primeiro, denominado vórtice em célula, calcula o valor da função corrente nos nós de uma malha auxiliar de cálculo, e a partir deste ponto, a velocidade é calculada por diferenças finitas nesta malha. O segundo pode ser classificado como completamente livre de malhas pelo fato de calcular o campo de velocidade a partir do campo de vorticidade, utilizando para isto a lei de Biot-Savart, conforme visto nos capítulos 3 e 4.

ROSENHEAD (1931) foi o primeiro pesquisador que tentou simular um escoamento discretizando o campo de vorticidade com vórtices potenciais, porém seus cálculos tornavam-se instáveis devido às singularidades presentes no campo de velocidade. Mesmo com o advento da computação científica, que permitiu uma maior discretização, ou seja, o aumento do número de vórtices, as simulações conduzidas por este modelo ainda não convergiam.

A partir deste ponto foi necessário modelar os vórtices de maneira a suavizar o campo de velocidade na sua proximidade. Assim, SPREITER & SACKS (1951) utilizaram o vórtice de Rankine para desingularizar a velocidade induzida pelo vórtice pontual. KUWAHARA & TAKAMI (1973) lançaram mão do vórtice de Lamb de núcleo variável, enquanto CHORIN & BERNARD (1973) utilizam o vórtice de Lamb de núcleo fixo.

Diversos autores realizaram trabalhos de pesquisa com o objetivo de apresentar o Método de Vórtices e suas variações, mostrando os avanços ao longo do tempo, como pode ser visto no artigo de revisão de SARPKAYA (1994), onde o autor realiza uma exploração detalhada dos diversos esquemas numéricos e suas aplicações. Artigos similares foram confeccionados por SAFFMAN & BAKER (1979), LEONARD (1980) e (1985), McCROSKEY (1982), AREF (1983), AREF & KAMBE (1988), SARPKAYA (1989), LEWIS (1999) e KAMEMOTO (2004).

Cada etapa do Método de Vórtices tem sido trabalhada e explorada individualmente por diversos pesquisadores, com o intuito de permitir pequenos avanços que somados componham um método numérico mais preciso e com menor custo computacional. Deste modo, a etapa convectiva do Método de Vórtices tem sido alvo de trabalhos que buscam diminuir seu custo computacional, o qual é da ordem de N^2 , sendo N o número de vórtices necessários a uma boa discretização da região rotacional do escoamento. Aceleradores da etapa convectiva que lidam com a metodologia denominada multipolos podem ser encontrados na literatura. O objetivo destes trabalhos é baixar o custo computacional para a ordem $\log N$, caso seja utilizado o método partícula-caixa, e para ordem N , caso seja utilizado o método caixa-caixa, o que é alcançado através do cálculo do campo de velocidade induzido por pólos, hierarquizando-se a influência de acordo com a distância e com a densidade de vórtices presentes em cada região.

O método mais encontrado na literatura que simula os efeitos da difusão viscosa é o Método do Avanço Randômico (MAR), o qual tem como principal deficiência o fato de ser baseado em parâmetros estocásticos. Deste modo, este item apresenta também trabalhos que visam a fornecer resultados mais acurados para a etapa difusiva do Método de Vórtices, do que os encontrados pelo MAR.

Segundo KAMEMOTO (1994), o Método de Vórtices pode ser dividido em três tipos básicos, de acordo com a maneira pela qual a vorticidade gerada no corpo é transportada para o meio fluido. O primeiro tipo utiliza pontos de separação conhecidos, o segundo utiliza uma aproximação de camada limite para calcular estes pontos de separação, gerando os vórtices a partir da espessura de deslocamento da camada limite, e por último o terceiro dispõe vórtices em toda a camada limite da superfície do corpo, os quais são transportados

por convecção e difusão para o escoamento, ou seja, a separação passa a ser um resultado natural da simulação.

Diversos trabalhos utilizam a idéia de pontos de separação conhecidos, como XU (1998 e 1999), onde o autor pressupõe que a separação ocorre no “spoiler”, no bordo de fuga e nas extremidades do aerofólio, obtendo com isso um modelo que fornece bons resultados em comparação a dados experimentais.

MOOK & DONG (1994) também propõem um esquema com desprendimento fixo em pontos de separação. Os autores liberam vórtices apenas no bordo de fuga do aerofólio para estudar a interação destes com o aerofólio.

Os modelos que utilizam o ponto de separação fixo permitem o cálculo da pressão através da equação de Bernoulli não-permanente, como e feito por VEZZA & GALBRAITH (1985). MUSTTO (2004) apresenta uma metodologia mais geral para o cálculo da pressão, a qual é inspirada em LEWIS (1991) e toma como base a equação de Navier-Stokes.

KAMEMOTO (1994) ainda propõe um modelo para geração da vorticidade na superfície, baseado na aproximação de camada limite. Segundo este modelo, uma folha de vorticidade é transferida inicialmente ao fluido, ficando livre para se movimentar por ação da difusão e convecção, sendo transformada em um vórtice pontual ao atingir uma determinada distância do corpo. Este esquema de geração demonstra a grande preocupação de se obter uma boa representação da vorticidade nas proximidades da superfície, uma vez que a influência desta região no cálculo das forças e na determinação da vorticidade gerada no corpo é fundamental para a obtenção de bons resultados.

CLARKE & TUTTY (1994) desenvolveram uma metodologia para simulação de escoamentos impulsivos ao redor de corpos de geometria arbitrária, a qual utiliza uma combinação do Método de Vórtices com o Método de Painéis com elementos curvos, simulando os efeitos viscosos com uma combinação do Método do Avanço Randômico com o Método da Velocidade de Difusão. O custo computacional da etapa convectiva é diminuído utilizando um algoritmo de decomposição. Os autores validam o código computacional utilizando dados experimentais e numéricos obtidos na literatura, comprovando que o método desenvolvido tem acurácia semelhante à encontrada por

códigos de diferenças finitas, sem, no entanto, apresentar a difusão numérica relacionada à malha.

As forças aerodinâmicas podem ser calculadas a partir da integração da distribuição de pressão sobre a superfície do corpo, ou através da fórmula de Blasius, utilizada por MUSTTO (2004). SHINTANI & AKAMATSU (1994) obtêm o carregamento sobre o corpo baseando-se somente no conhecimento dos campos de vorticidade e velocidade.

JONCHERAY (1997) utilizou o Método de Vórtices para simular os carregamentos em pás de rotores de helicópteros, baseando-se na teoria da linha de sustentação de Prandtl, na lei de Biot-Savart para cálculo das velocidades induzidas e na lei de Kutta-Joukowski para circulação. Foi calculada a performance das pás do rotor em situação de suspensão estacionária do helicóptero, onde as lâminas foram representadas por vórtices-linha localizadas no primeiro quarto da corda, discretizando a esteira com um número finito de vórtices-linha. Os resultados encontrados com as simulações foram comparados com dados experimentais e numéricos disponíveis, mostrando boa concordância.

WALTHER & LARSEN (1997) utilizaram o Método de Vórtices para simular o escoamento bidimensional incompressível viscoso, sobre uma placa plana de espessura e comprimento finitos. Os autores lançaram mão de uma nova abordagem para correlacionar os campos de velocidade e de vorticidade, e para determinar a vorticidade na superfície da placa, assim como utilizaram uma eficiente técnica de matriz de influência para o cálculo da convecção via multipolos. Os resultados numéricos encontrados foram comparados com a solução de Blasius para placa plana, e para, o caso não viscoso, foram defrontados com a solução de Theodorsen para o escoamento sobre placa plana oscilatória.

HE & SU (1998) realizaram estudo numérico de escoamentos com altos números de Reynolds, ao redor de corpos aerodinâmicos, utilizando o Método de Vórtices. Os autores relatam uma melhora na representação da vorticidade na região próxima à superfície do sólido, obtida devido a mudanças no processo de geração de vorticidade, onde a folha de vorticidade da superfície sólida é liberada para o fluido com distribuição de vorticidade constante. Outra modificação realizada pelos autores foi a inclusão de um termo não linear nas equações do escoamento próximo à superfície sólida, quando da avaliação da distribuição de pressão na parede.

PEREIRA (1999) simula o escoamento ao redor de um cilindro circular e ao redor de um aerofólio NACA 0012 para o ângulo de ataque de 5° , limitando o número de vórtices com um esquema de eliminação e realizando a conservação da circulação como sugere LEWIS (1991).

Diversos modelos de turbulência têm sido implementados no Método de Vórtices, como em PEREIRA (2002), onde o autor modelou a turbulência presente no escoamento ao redor de numa grade linear via Função Estrutura de Velocidade de segunda ordem. Esta abordagem é descrita por HIRATA (2000) e aplicada a cilindro circular em PEREIRA *et al.* (2002).

COTTET *et al.* (2000) apresentam uma metodologia para aproximação das equações de Navier-Stokes que utiliza vórtices pontuais com tamanho de núcleos diferenciados, com o objetivo de se obter diferentes níveis de discretização para diferentes regiões do escoamento, como a camada limite e a esteira viscosa. Para tanto os autores propõem a utilização de um mapeamento que permita uma formulação consistente dos operadores de difusão e convecção existentes no Método de Vórtices, colaborando para aumentar a eficiência computacional quando comparado ao método que utiliza tamanho de vórtices fixo. Os resultados são validados através da implementação de problemas de escoamentos ao redor de cilindros e interações de vórtices com paredes.

PLOUMHANS & WINCKELMANS (2000) desenvolveram um modelo para redistribuir as partículas no escoamento ao redor de um corpo de geometria qualquer. O Método de Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP ou “*Particle Strength Exchange – PSE*”) é alterado para as partículas próximas ao corpo para evitar fluxo anômalo de vorticidade durante a etapa difusiva do método. O trabalho utiliza também múltiplas escalas de resolução. A convergência quadrática do esquema é verificada matematicamente e por diversas simulações conduzidas. A validação é obtida através da comparação com o problema do escoamento impulsivo ao redor de cilindro.

ROUVREAU & PERAULT (2001) simularam o escoamento bidimensional incompressível ao redor de um cilindro circular através de um código numérico baseado no Método de Vórtices, onde a condição de não-deslizamento é satisfeita levando-se em consideração a espessura do elemento de superfície, parâmetro que não é levado em consideração nas metodologias usuais. A etapa difusiva é calculada com a utilização de um

método determinístico baseado na solução da equação do calor. Os resultados apresentados no trabalho relatam os coeficientes de sustentação e arrasto, os campos de velocidade e de vorticidade e o número de Strouhal.

YANG *et al.* (2003) aplicam o Método de Vórtices para simular o escoamento em placa plana e cilindro bidimensionais, satisfazendo simultaneamente as condições de não escorregamento e impenetrabilidade no corpo. Para tanto, os autores utilizam fontes e vorticidade na superfície, que formam as incógnitas do sistema linear a ser resolvido. Deste modo, as fontes satisfazem a condição de Neumann para impenetrabilidade, ao passo que a vorticidade na superfície satisfaz a condição de Dirichlet para não-deslizamento. Os autores também apresentam uma formulação para determinação da distância de nascimento dos vórtices, na qual a condição de não-deslizamento continua sendo válida. Os resultados são comparados com valores experimentais e analíticos, apresentando boa concordância.

ZHU & KAMEMOTO (2003) apresentaram uma metodologia baseada no Método de Vórtices para simular o escoamento ao redor de corpos, onde os campos de velocidade e pressão são obtidos através de formulações integrais. Utiliza-se também o Método do Crescimento do Núcleo com um algoritmo de aglomeração, para simular a etapa difusiva do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro circular, o qual é validado por experimentos e simulações de outros autores, mostrando a boa aplicabilidade do método a problemas de fronteiras móveis.

PEREIRA *et al.* (2004) simularam, pelo Método de Vórtices, o escoamento bidimensional, incompressível e com alto número de Reynolds, ao redor de múltiplos corpos aerodinâmicos. A etapa convectiva do método é resolvida pelo esquema de Adams-Bashforth, enquanto que a etapa difusiva é resolvida pelo Método do Avanço Randômico. A distribuição de pressão ao longo do corpo é obtida por uma equação integral, derivada da equação de Poisson para pressão, a qual tem sido utilizada para avaliação da pressão em problemas que envolvem apenas um corpo. O trabalho apresenta resultados para a simulação do escoamento ao redor de uma seqüência de aerofólios em cascata NACA 65-410, e compara os resultados encontrados com os dados disponíveis na literatura.

BARBA *et al.* (2005a) desenvolvem um novo Método de Vórtices que é completamente livre de malhas, o que, segundo os autores, não ocorre com os métodos que utilizam técnicas de troca de intensidade para simular o processo difusivo, uma vez que estes têm a

necessidade de realizar interpolações de alta resolução para manter a distribuição de partículas ordenada. No trabalho apresentado pelos autores utiliza-se o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido e a adaptação espacial é realizada utilizando-se a interpolação de funções básicas radiais, o que controla o tamanho do núcleo dos vórtices automaticamente, garantindo assim a convergência. Ainda segundo os autores, esta metodologia tem apresentado um ganho considerável nas simulações com vórtices no referencial lagrangeano, ao mesmo tempo que tem permitido simulações em múltiplas escalas com várias resoluções.

BARBA *et al* (2005b) citam como deficiências do Método de Vórtices: o custo computacional da utilização da lei de Biot-Savart, o tratamento da difusão no referencial lagrangeano e a perda de acurácia devido à distorção lagrangeana dos elementos computacionais. Segundo os autores, a primeira limitação citada acima é resolvida pela utilização de aceleradores multipolos, enquanto a segunda encontra solução nos diferentes métodos desenvolvidos para lidar com a difusão viscosa no referencial lagrangeano. Para lidar com a terceira limitação, os autores sugerem a interpolação com funções radiais básicas, o que permite o controle do tamanho do núcleo dos vórtices quando se aplica o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido, ou quando se busca uma resolução variável no domínio físico.

BOUFERROUK & CHERNYSHENKO (2005) utilizam a regularização de Tykhonov no Método de Vórtices para simular um escoamento bidimensional não viscoso em placa plana, o qual se torna instável sem a regularização, e em um cilindro de seção circular que tem seu ruído diminuído pela regularização proposta.

KAMOUN *et al* (2005) realizaram análise numérica de aerofólios para aplicação em turbinas eólicas, distribuindo singularidades do tipo fonte-vórtice sobre a superfície do aerofólio, com o intuito de simular o escoamento potencial, bidimensional e incompressível. Os resultados encontrados foram validados com dados experimentais.

SARKAR & VENKATRAMAN (2005) simularam o escoamento bidimensional incompressível ao redor de um aerofólio com movimento de arfagem periódico, no intuito de se verificar a influência de diversos parâmetros na indução da força de propulsão resultante. Observou-se que esta força é diretamente proporcional à frequência de oscilação do aerofólio e inversamente proporcional ao ângulo de ataque médio. Também é

pesquisada a influência da localização do eixo de arfagem na caracterização propulsiva do aerofólio.

ROSSI (2005) utiliza funções básicas Gaussianas de forma elíptica e deformável, para representar o campo bidimensional de uma grandeza escalar, em um escoamento incompressível. Estas funções se movimentam e se deformam para simular a evolução do escoamento em estudo, de acordo com um equacionamento para a velocidade, rotação, extensão e deformação dos elementos. O autor consegue acurácia espacial de quarta ordem, ajustando o centróide das funções básicas com o resíduo do método numérico por ele apresentado.

ROSSI (2006a) compara os resultados de simulações de escoamentos bidimensionais incompressíveis, utilizando funções básicas gaussianas e axisimétricas, com os resultados obtidos com funções básicas gaussianas elípticas e deformáveis. Os resultados para um problema de deformação e difusão em uma distribuição elipsóide de um escalar imerso em um escoamento com linhas de corrente circulares e fechadas, apontam diversas vantagens para a abordagem com elementos deformáveis, como a utilização em problemas cuja resolução requerida seja significativamente maior e a menor necessidade de correção devido a sua inconsistência.

ROSSI (2006b) introduz duas técnicas para aproximação da integral de Biot-Savart na avaliação de funções elípticas Gaussianas deformáveis. A primeira consiste em uma pequena perturbação na função corrente, a qual somente é aplicável para interações diretas entre os elementos computacionais. O autor também apresenta um estudo da aplicação de aceleradores multipolos para as funções elípticas Gaussianas deformáveis, as quais introduzem uma nova escala computacional, o que limita a eficiência da expansão em multipolos. Porém, esta deficiência pode ser minimizada através da imposição de um limite inferior para o tamanho das caixas, o que permite uma aproximação acurada a partir de uma tolerância estabelecida.

WEE & GHONIEM (2006) apresentam um método que realiza simultaneamente a difusão da vorticidade e a reordenação da malha de cálculo no Método de Vórtices. Utiliza-se o Método de Redistribuição de Vorticidade para fornecer uma semente de interpolação apropriada e para dividir os vórtices. O escoamento evolui no tempo realizando dois subpassos, sendo que o primeiro é fruto da convecção dos vórtices de acordo com o campo de

velocidade, ao passo que o segundo se encarrega da difusão viscosa e da reordenação da malha através do uso da semente de interpolação. A estabilidade e o erro da semente de interpolação são avaliados demonstrando que o esquema pode ser utilizado com sucesso inclusive em problemas complexos com difusão não linear.

CHATTOT, 2007, utilizou o método de vórtices helicoidal para simular o escoamento em uma turbina eólica com sua torre à montante, a qual foi representada por um segmento semi-infinito de dipolos. Os resultados encontrados apresentaram boa concordância com dados experimentais, porém uma certa discrepância de fase foi observada quando se aumenta o ângulo de guinada.

COCLE *et al.* (2007) apresentam uma modelagem de Método de Vórtices que permite reduzir a região de malha dos métodos tradicionais de vórtice em célula, uma vez que esta região é superdimensionada se comparada à região rotacional do escoamento, tendo em vista a necessidade de se garantir a satisfação da condição de contorno para o escoamento não perturbado, característica que ocasiona um custo computacional muitas vezes inviabilizante. Deste modo os autores trabalham com uma região estritamente rotacional, dividindo este domínio em sub-regiões, onde as condições de contorno são obtidas utilizando-se o método paralelo de multipolos. Esta combinação dos métodos de vórtice em célula e paralelo de multipolos apresentada pelos autores conduz a uma solução mais acurada e com menor custo computacional que estes métodos atuando separadamente. Para exemplificar a utilização do método proposto, são conduzidas simulações de desenvolvimento de esteiras produzidas por aeronaves em efeito de solo.

ELDREDGE (2007) apresentou uma metodologia para o Método de Vórtices, a qual utiliza um avanço no tempo intermediário para avaliar a intensidade de folhas de vorticidade que devem satisfazer a condição de não-deslizamento ao terem sua vorticidade transmitida para os vórtices adjacentes. O autor utiliza uma malha cartesiana para calcular a cada passo no tempo os valores de vorticidade, forçando a satisfação do teorema de Kelvin pela redistribuição da vorticidade gerada na superfície para os vórtices, durante a etapa da difusão das folhas de vorticidade. São feitas diversas análises quanto à estabilidade e convergência, levando em consideração os parâmetros numéricos utilizados, com ênfase na avaliação da velocidade de deslizamento residual. O método é por fim utilizado em dois

problemas que demonstram sua aplicabilidade a sistemas locomotores biológicos, apresentando boa concordância com dados experimentais e numéricos.

ZHAO *et al.* (2007), introduz um novo modelo de Método de Vórtice, denominado Método de Transporte de Vórtices generalizado. O método consiste em utilizar um referencial Lagrangeano-Euleriano, onde o campo de vorticidade é determinado através do transporte da circulação em um campo de velocidade artificial, recorrendo-se à equação de Poisson para se estabelecer o campo de velocidade no referencial Lagrangeano. O Processo de Transporte Generalizado leva em conta o movimento e a variação de área da circulação dos vórtices, ou seja, considera simultaneamente os fenômenos de convecção e difusão viscosa. O método se mostra capaz de simular escoamentos em cilindros, capturando fenômenos na proximidade da parede como separação e variação de velocidade tangencial.

ZHAO & TSUKAMOTO (2007) estenderam à geometrias complexas em escoamentos com elevado número de Reynolds, a aplicação do Métodos de Vórtice híbrido, ou seja, aquele que utiliza partículas e folhas de vorticidade. Nesta metodologia, os autores dividiram o domínio computacional em uma parte interna, composta por vórtices, e uma parte composta por uma fina camada limite numérica de folhas de vorticidade. Os núcleos dos vórtices são relacionados ao tamanho das folhas de vorticidade. Os resultados das simulações em hélices de navios mostraram que o modelo apresenta boa concordância para os casos de escoamentos não-permanentes separados com elevados números de Reynolds.

2.3.1. Convecção – Métodos de Expansão em Multipolos

Como dito anteriormente, diversos métodos de multipolos foram desenvolvidos com o intuito de se acelerar a etapa convectiva do Método de Vórtices, a qual apresenta o custo computacional da ordem de N^2 , sendo N o número de vórtices presentes na simulação. BARNES & HUT (1986) apresentam um esquema partícula-caixa cuja ordem do custo computacional é reduzida para $N \log N$, enquanto GREENGARD & ROKHLIN (1987) e CARRIER *et al.* (1988) propõem um esquema caixa-caixa que reduz para ordem N o custo computacional, o qual, para o último trabalho, é independente da distribuição espacial dos vórtices.

STRICKLAND *et al* (1999) desenvolveram um algoritmo de multipolos com aplicação em problemas de radiação tridimensional e problemas de escoamentos tridimensionais, o que é feito com uma semente para o cálculo das integrais de volume associadas, podendo ser utilizado também para cálculos de campos gravitacionais e eletrostáticos. O algoritmo é desenvolvido para computação paralela, o que resulta em um custo computacional de ordem menor que N^2 e maior que N ou $N\log N$.

YING *et al.* (2003) apresentam um método acelerador multipolos que utiliza uma distribuição contínua de densidade equivalente na superfície de cada caixa, ao invés de utilizar expressões analíticas para representar o potencial gerado pelas fontes no interior das caixas. Deste modo, o método não necessita da implementação da expansão em multipolos, e utiliza o problema de Dirichlet para encontrar a supracitada densidade equivalente, ajustando seu potencial com o potencial das fontes distribuídas originalmente na superfície. O método apresentado mostra boa acurácia para duas e três dimensões, quando comparado com algoritmos analíticos, no entanto, sua principal vantagem, segundo os autores, seria sua maior facilidade de implementação e sua maior aplicabilidade.

IHLER (2004) mostra os resultados alcançados pela utilização de um método de expansão em multipolos que se baseia em aproximações matriciais de bandas baixas, discutindo o método heurístico de aproximações matriciais em bloco e a formação das expansões analíticas que formam a base dos métodos de expansão em multipolos.

2.3.2. Difusão viscosa

CHORIN (1973) simula a difusão viscosa através do Método do Avanço Randômico (MAR), baseado no movimento Browniano de Einstein. Tal método obteve grande aceitação devido a sua facilidade de implementação e baixo custo computacional, porém, seu caráter estocástico ocasiona regiões sem recobrimento dos vórtices, o que causa um ruído indesejável no campo de velocidade. Este trabalho é reconhecido historicamente como o primeiro modelo de Método de Vórtices que considera os efeitos viscosos.

PORTHOUSE & LEWIS (1981) incluíram o MAR no modelo de Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis. Tal metodologia é detalhada em LEWIS

(1991), onde a geração de vorticidade na superfície do corpo, seu desprendimento e transporte na esteira são amplamente explorados.

OGAMI & AKAMATSU (1991) apresentam o Método da Velocidade de Difusão (MVD), no qual a difusão de vorticidade é simulada pelo movimento induzido nos vórtices pela denominada velocidade de difusão, a qual é proporcional ao gradiente da vorticidade e à viscosidade cinemática, e é inversamente proporcional à vorticidade. Os autores mostram que o método é válido para valores de número de Reynolds inferiores àqueles abrangidos pelo Método do Avanço Randômico, sendo dispensável a utilização de teoria de camada limite, uma vez que este pode lidar diretamente com o seu desenvolvimento, separação e recolamento. O MVD, utilizado por diversos autores como OGAMI & AYANO (1995) e CLARKE & TUTTY (1994), será explorado com maior profundidade no capítulo 4.

KEMPKA & STRICKLAND (1993) apresentam um método numérico para simulação da difusão viscosa da vorticidade baseado no MVD, porém, os autores passam a considerar também os efeitos do divergente da velocidade de difusão, que não eram contemplados inicialmente, e que mantêm relação com a área na qual a vorticidade é difundida. Tal enriquecimento do modelo do Método de Velocidade de Difusão permite cálculos mais acurados, o que é comprovado através da comparação com outros resultados numéricos e analíticos.

KOUMOUTSAKOS & LEONARD (1995) apresentam uma nova metodologia de simulação da difusão que se passou a denominar Método da Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP ou “*Particle Strength Exchange – PSE*”). As simulações apresentadas pelos autores obtêm resultados acurados para o escoamento ao redor de um cilindro circular.

SHANKAR & VAN DOMMELEN (1996) propuseram um novo modelo para simular a difusão da vorticidade em um referencial puramente lagrangeano. Tal modelo baseia-se na troca de intensidade entre os vórtices, o que é feito mantendo-se os momentos de ordem zero, um e dois, ou seja, respectivamente a conservação da circulação, do momento linear e do momento angular. As trocas devem satisfazer a um sistema linear formado quando se minimiza a norma máxima das quantidades trocadas, utilizando-se a técnica de programação linear e o método simplex para solução. A nova metodologia é testada no problema de difusão de um vórtice pontual e na iteração de um par de vórtices.

ROSSI (1996) realizou uma alteração no Método de Crescimento do Núcleo, o qual havia sido abandonado desde que GREENGARD (1985) mostrou que este aproximava incorretamente as equações de Navier-Stokes. Através de um processo denominado pelo autor como refinamento espacial, o qual consiste na divisão de vórtices mantendo-se inalterados os momentos correspondentes, obtém-se uma metodologia determinística eficiente e de fácil implementação, para utilização no Método de Vórtices, com custo computacional semelhante ao Método do Avanço Randômico, porém proporcionando melhoria significativa na simulação. O Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), utilizado desde então por muitos pesquisadores será explorado com maior profundidade no capítulo 4.

OJIMA & KAMEMOTO (1999) simulam o escoamento ao redor de uma esfera tridimensional com número de Reynolds de 300 a 1000, utilizando o MCNC, ao passo que PLOUHAMS *et al.* (2002) utilizam o MTIP para o mesmo problema.

ROSSI (1997) apresenta um algoritmo de aglomeração, cujo principal objetivo é baixar o custo computacional do método, diminuindo o número de vórtices na simulação, sem implicar, no entanto, em perda de recobrimento, diminuição da acurácia ou atraso na convergência. Para tanto, o erro da aglomeração é mantido sob controle e a aglomeração é efetivada mantendo-se os momentos de ordem zero (conservação da circulação), ordem um (momento linear) e ordem dois (momento angular).

TAKEDA & TUTTY (1997) realizaram um estudo comparativo no qual foram implementados quatro diferentes métodos de difusão viscosa, quais sejam: Método do Avanço Randômico (MAR); Método da Velocidade de Difusão (MVD); Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Utiliza-se o Método dos Painéis para satisfazer a condição de contorno na superfície, e o método de Multipolos para acelerar a etapa convectiva. Foram levantados dados comparativos quanto à acurácia, à eficiência computacional e à aplicabilidade para computação paralela, simulando-se o escoamento ao redor de cilindro circular com número de Reynolds variando de 100 a 9500. Conclui-se que o MAR apresenta soluções com excessivo ruído e pouca sensibilidade quanto à sequência numérica randômica, ao passo que o MVD mostra melhora quanto à convergência, se comparado ao MAR, porém é afetado drasticamente quando o recobrimento dos vórtices é perdido. Por sua vez o MCNC

apresentou ganho em acurácia, no entanto o crescimento exponencial do número de vórtices é fator limitante deste método, o que implica na utilização de algoritmos de aglomeração e conseqüente inclusão de parâmetros e erros numéricos. Ainda segundo os autores, a formulação do MRV garante o controle do erro, sendo que a adição de novos vórtices para obtenção de sistemas possíveis tende a aumentar o número de vórtices de maneira linear, podendo ser controlada por algum tipo de processo de aglomeração.

ROSSI formulou uma metodologia para aplicação no Método de Vórtices, baseada em funções básicas Gaussianas elípticas, as quais, por ação do campo de vorticidade local, estão livres para transladar, se alongar e se dividir, o que confere ao método a habilidade de capturar a evolução do escoamento até a quarta ordem de acurácia espacial. O método proposto por ROSSI utiliza uma aproximação assintótica de quarta ordem para as integrais de Biot-Savart na determinação do campo de velocidade e sua derivada, além de realizar um refinamento adaptativo robusto. Uma alta taxa de convergência é verificada comparando-se os resultados das simulações com soluções exatas.

KIDA & NAKAJIMA (1998) obtêm uma equação integral para a vorticidade, do tipo Fredholm, partindo da equação de Navier–Stokes, a qual é implementada no Método de Crescimento do Núcleo com função Gaussiana e com função Gaussiana alternativa. Tal modelagem é utilizada para simular o escoamento com alto número de Reynolds e condição inicial suavizada.

LEE & JIN (2002), através da implementação em paralelo do Método de Vórtices, compararam o Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) com o Método de Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP), quanto à acurácia e ao custo computacional, para o caso da difusão de um vórtice de Lamb e da simulação de um escoamento impulsivo ao redor de um cilindro circular, com número de Reynolds igual a 60. Para o caso da difusão do vórtice de Lamb, a acurácia e o custo computacional foram praticamente os mesmos para os dois métodos comparados, porém, para o caso do cilindro circular, o MTIP mostrou-se mais acurado e com menor custo computacional do que o MRV.

LAN *et al* (2005) apresentam uma breve revisão dos avanços no Método de Vórtices nas últimas décadas, incluindo o estudo do Método de Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP), do Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), do método de partículas determinístico e do método de vórtices híbrido. Os autores também introduzem

um esquema de método de vórtices eficiente, desenvolvido para altos números de Reynolds e para computação paralela de escoamentos ao redor de corpos rombudos.

2.4. Posicionamento do presente trabalho no contexto da literatura

O presente trabalho pode ser inserido no contexto daqueles que se dedicam a desenvolver modelos numéricos para o estudo do escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos, utilizando o método de vórtices em combinação com o método dos painéis. Deste modo, o estudo dos trabalhos apresentados neste capítulo visa a fornecer subsídios para a escolha dos métodos a serem empregados, como pode ser exemplo o Método de Expansão em Multipolos para o cálculo de velocidades na etapa convectiva, abordado na seção 2.3.1. Pode-se também estabelecer uma comparação entre os trabalhos deste capítulo, buscando-se esclarecer a aplicabilidade, levantando-se então as vantagens e desvantagens de cada metodologia.

Assim, a modelagem da etapa convectiva deste trabalho baseou-se em CARRIER *et al.* (1988), o qual se fornece um algoritmo para o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo, ao passo que a escolha do método de difusão teve como ponto de partida o trabalho de TAKEDA & TUTTY (1997), o qual realizou uma comparação entre diferentes modelos de difusão.

No que se refere ao Método de Painéis, o presente trabalho se orientou bastante em PEREIRA (2005), o qual fez um estudo completo da solução do escoamento potencial em torno de aerofólios, explorando exaustivamente ordens superiores de discretização da geometria e da distribuição de singularidades ao longo dos painéis.

Diversos trabalhos se dedicam ao estudo da geração de vorticidade na superfície sólida, como KAMEMOTO (1994). Agindo neste contexto, o presente trabalho apresenta como principal contribuição uma inédita formulação de geração de vorticidade e nascimento de novos vórtices, baseada na solução por similaridade da equação de difusão unidirecional.

O Capítulo 3 a seguir apresenta a modelagem matemática completa utilizada neste trabalho, descrevendo de forma detalhada o equacionamento do Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis, o que permite o entendimento formal de toda a metodologia proposta.

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

A modelagem matemática é o primeiro passo no sentido de se buscar uma solução para um problema de engenharia. Assim, a formulação e o equacionamento do problema matemático deve representar o problema físico em estudo com o grau de representatividade e profundidade que forneça uma relação satisfatória entre a qualidade da solução e o custo para resolvê-la.

Neste sentido, ao se escrever o problema matemático, deve-se ter em mente o nível de acurácia desejado para a solução, o custo a ela relacionado, e as ferramentas disponíveis. Esta análise leva a um detalhamento do equacionamento matemático baseado em hipóteses simplificadoras que, para o caso em estudo, origina o problema de valor de contorno descrito neste capítulo.

O modelo matemático apresentado neste capítulo visa basicamente a atender o método numérico utilizado, ou seja, o Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis. A aplicação conjunta dos Métodos de Painéis e de Vórtices prevê a solução do escoamento potencial pelo primeiro e a evolução da dinâmica da vorticidade pelo segundo. Tal abordagem é levada a efeito, em cada passo no tempo, quando se impõe as condições de contorno nos painéis que discretizam a superfície do corpo, e se evolui o campo de vorticidade dando origem a uma nova configuração de vórtices discretos.

Neste sentido, este capítulo apresenta o embasamento matemático da metodologia de utilização conjunta do Método de Vórtices e do Método dos Painéis, visando a fornecer uma compreensão mais ampla e fácil do trabalho apresentado.

3.1. Hipóteses Simplificadoras

As hipóteses simplificadoras descritas nesta seção visam a proporcionar uma formulação matemática que conduza a resultados satisfatórios, tendo em vista as ferramentas para solução atualmente disponíveis.

O problema em estudo refere-se a um corpo aerodinâmico posicionado em uma região fluida infinita, ou seja, livre de fronteiras sólidas. O fluido é instantaneamente colocado em movimento e levado a um escoamento uniforme no infinito. Tal problema pode ser visualizado na Fig. 3.1, onde U_{∞} representa o escoamento que incide com um ângulo de ataque α em um aerofólio, no qual estão fixados os sistemas de coordenadas cartesiano e polar a serem utilizados.

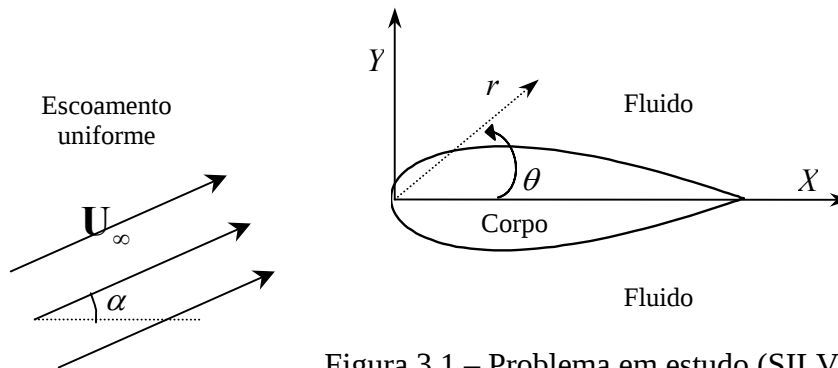


Figura 3.1 – Problema em estudo (SILVA 2005)

Deste modo, são listadas a seguir as hipóteses simplificadoras que serão utilizadas na formulação matemática do problema em estudo, e que devem ser observadas e respeitadas quanto à sua aplicabilidade:

- corpo bidimensional, ou seja, sua dimensão no plano normal ao do escoamento é consideravelmente maior do que sua maior dimensão no plano do escoamento;
- o escoamento se inicia do repouso de forma impulsiva ;
- a região fluida é infinita e o escoamento no infinito é uniforme;
- o aerofólio é o único corpo imerso no fluido;
- o fluido é homogêneo, newtoniano, de propriedades constantes e seu escoamento ocorre de maneira incompressível, considerando que as velocidades envolvidas são muito menores que a velocidade do som no meio;
- a força de campo gravitacional é desprezada por possuir pouca influência no escoamento.

Deve-se observar que o escoamento não é considerado permanente, uma vez que o fenômeno físico estudado apresenta grandes flutuações temporais no campo de velocidades, as quais deverão ser representadas no modelo matemático ora formulado.

O equacionamento do problema em estudo, levando-se em consideração as hipóteses simplificadoras listadas acima, conduz a um problema de valor de contorno que será apresentado a seguir.

3.2. Problema de Valor de Contorno

Os campos de velocidade e pressão de um escoamento incompressível de um fluido newtoniano, não sujeito à forças de campo, são relacionados através das Equações da Continuidade e de Navier-Stokes, as quais tomam a forma respectivamente das Eq. (3.1) e (3.2),

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt^*} = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{u}^*$ é o campo de velocidade vetorial e dimensional, t^* é o tempo, p^* é a pressão estática absoluta, ν é a viscosidade cinemática do fluido e ρ sua massa específica. O símbolo $*$ indica que as variáveis estão na forma dimensional.

Tendo em vista diminuir o número de simulações a serem realizadas, as variáveis são reunidas em agrupamentos adimensionais, os quais guardam relação com as propriedades físicas de interesse. Para tanto, são utilizados a velocidade característica U_∞ e o comprimento característico c , o qual representa a corda do aerofólio de acordo com a Fig. 3.2.

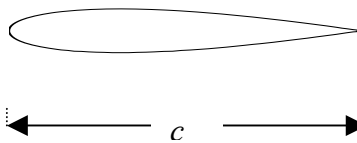


Figura 3.2 – Corda do Aerofólio

Deste modo, as seguintes variáveis adimensionais

$$\nabla \equiv \frac{\nabla^*}{c}, \quad t \equiv \frac{t^* U_\infty}{c}, \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{u}^*}{U_\infty} \quad \text{e} \quad p \equiv \frac{p^*}{\rho U_\infty}$$

são inseridas nas Eq. (3.1) e (3.2). Obtém-se, com isto, as Equações da Continuidade e de Navier-Stokes na forma adimensional, ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

onde $Re \equiv \frac{U_\infty c}{\nu}$ é o número de Reynolds.

O sistema de equações diferenciais parciais (3.3) e (3.4) está sujeito às seguintes condições de contorno:

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na superfície do corpo, que reflete as condições de impenetrabilidade e não escorregamento para um corpo estacionário;
- $\|\mathbf{u}\| = 1$, no infinito.

A condição inicial é $\|\mathbf{u}\| = 0$ em $t=0$, e $\|\mathbf{u}\| = 1$, em $t = 0^+$, para toda região fluida.

3.3. Equação de Transporte da Vorticidade

O Método de Vórtices, aplicado a simulações de escoamentos incompressíveis, corresponde a uma aproximação numérica que apresenta algumas características peculiares. De acordo com Barba (2004), pode-se citar como pontos em comum a todas as modelagens que lançam mão do Método de Vórtices a formulação das equações de Navier-Stokes ou de Euler em termos da vorticidade, a discretização do campo de vorticidade no lugar da discretização do campo de velocidade, a utilização do Teorema de Helmholtz, o qual

estabelece a correspondência entre os elementos de vorticidade e as partículas de fluido, e por último a utilização da correlação entre os campos de vorticidade e de velocidade, para qual é utilizada a lei de Biot-Savart aplicada à dinâmica dos fluidos.

A representação de um escoamento em função do seu campo de vorticidade tem algumas vantagens que advém do fato de que a vorticidade não pode ser criada ou destruída no interior de um fluido homogêneo (BATCHELOR, 1967). Assim, conhecendo-se os fenômenos físicos que relacionam a geração da vorticidade na superfície do corpo, pode-se resolver o escoamento transportando esta informação para o restante do domínio.

Deste modo, a modelagem matemática descrita nesta seção visa a aplicação no Método de Vórtices, o qual será apresentado apenas no próximo capítulo. Porém, se torna indispensável o conhecimento a priori da necessidade de se expressar o campo de pressão em função do campo de vorticidade, grandeza que irá representar a evolução do escoamento, e que permitirá a avaliação recorrente do campo de velocidade e a determinação dos carregamentos na superfície do corpo.

Assim deve-se equacionar o problema em termos do vetor vorticidade $\boldsymbol{\omega}$, o qual é definido como sendo o rotacional do vetor velocidade $\mathbf{u}$, ou seja, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

A Equação de Transporte de Vorticidade é então obtida tomando-se o rotacional da Eq. (3.4) e utilizando a Eq. (3.3). Como citado anteriormente, esta operação elimina o termo de pressão da Eq. (3.4).

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (3.5)$$

BATCHELOR (1967) apresenta a seguinte interpretação para os termos da Eq. (3.5):

- $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$ representa a variação local de vorticidade;
- $\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$ representa o transporte convectivo de vorticidade;
- $\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ representa o transporte difusivo de vorticidade pela ação da viscosidade;
- $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ representa o esticamento e a deformação das linhas de vorticidade.

No caso bidimensional, o vetor vorticidade torna-se um escalar, possuindo apenas a componente normal ao plano do escoamento. Logo, a Eq. (3.5) se torna uma equação escalar, dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega. \quad (3.6)$$

É importante observar que o termo $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ é identicamente nulo no escoamento bidimensional. Este fato representa uma limitação desta modelagem para a simulação de escoamentos turbulentos, pois o fenômeno da turbulência em fluidos está intimamente ligado à deformação das linhas de vorticidade, como discutido em SARPKEYA (1994) e SILVEIRA NETO (2004), e é intrinsecamente tridimensional.

KUNDU (1990) justifica a ausência dos termos de pressão e das forças de campo na Eq. 3.5 pelo fato destas atuarem no centro de massa dos elementos do fluido, e por isso não resultarem em momentos de rotação. No entanto deve-se lembrar que as forças de campo já haviam sido negligenciadas pelas hipóteses simplificadoras descritas anteriormente.

3.4. Relação Velocidade–Vorticidade: A Lei de Biot-Savart

O Método de Vórtices prevê a solução da equação de transporte da Vorticidade (Eq. 3.6) a qual resolve o campo de vorticidade do escoamento. Deve-se, portanto, buscar uma formulação que relacione os campos de vorticidade e velocidade, este último de maior interesse, pois possibilita resolver o escoamento e determinar os carregamentos no corpo.

O campo de velocidade incompressível induzido pela vorticidade distribuída em uma região finita é dado pela seguinte integral de volume (BATCHELOR, 1967),

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}', t)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV(\mathbf{r}'). \quad (3.7)$$

A Eq. (3.7), determinada experimentalmente por Biot e Savart em 1820 (SARPKEYA, 1994), quando buscou-se relacionar a intensidade do campo magnético induzido por uma

corrente elétrica, foi estabelecida analiticamente por Ampere em 1826 (SARPKAYA, 1994). Sua correlação com a velocidade induzida pela vorticidade é fisicamente intuitiva. Assim, V representa o volume da região rotacional, ou seja, a região onde a vorticidade está distribuída. A integração é feita sobre este volume através da variável auxiliar $\mathbf{r}'$.

Um filamento de vorticidade é definido como um tubo de vorticidade, onde toda a vorticidade está concentrada em um núcleo finito. Quando a área da seção transversal do núcleo tende a zero e a vorticidade é infinita, o filamento é denominado filamento singular de vorticidade, conforme ilustram as Fig. 3.3(a) e 3.3(b). No caso de um filamento singular de vorticidade, de circulação constante Γ , a Eq. (3.7) torna-se

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\text{Linha}} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}, \quad (3.8)$$

onde $d\mathbf{l}$ é o vetor tangente à curva que representa o filamento de vorticidade. Caso o filamento singular de vorticidade seja uma linha reta, este é chamado vórtice-linha e, no caso bidimensional, de vórtice pontual, singular ou potencial, como mostrado nas Figs. 3.3(c) e 3.3(d). A velocidade na direção θ , medida no sentido anti-horário, induzida por um vórtice potencial, de circulação horária, é

$$u(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (3.9)$$

onde $r = \|\mathbf{r}\|$. Equivalentemente, para um vórtice localizado em um ponto $P(x_o, y_o)$, a Eq. 3.9 pode ser escrita em coordenadas cartesianas como

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(y - y_o)}{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \quad \text{na direção } x, \quad (3.10 \text{ a})$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(x - x_o)}{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \quad \text{na direção } y. \quad (3.10 \text{ b})$$

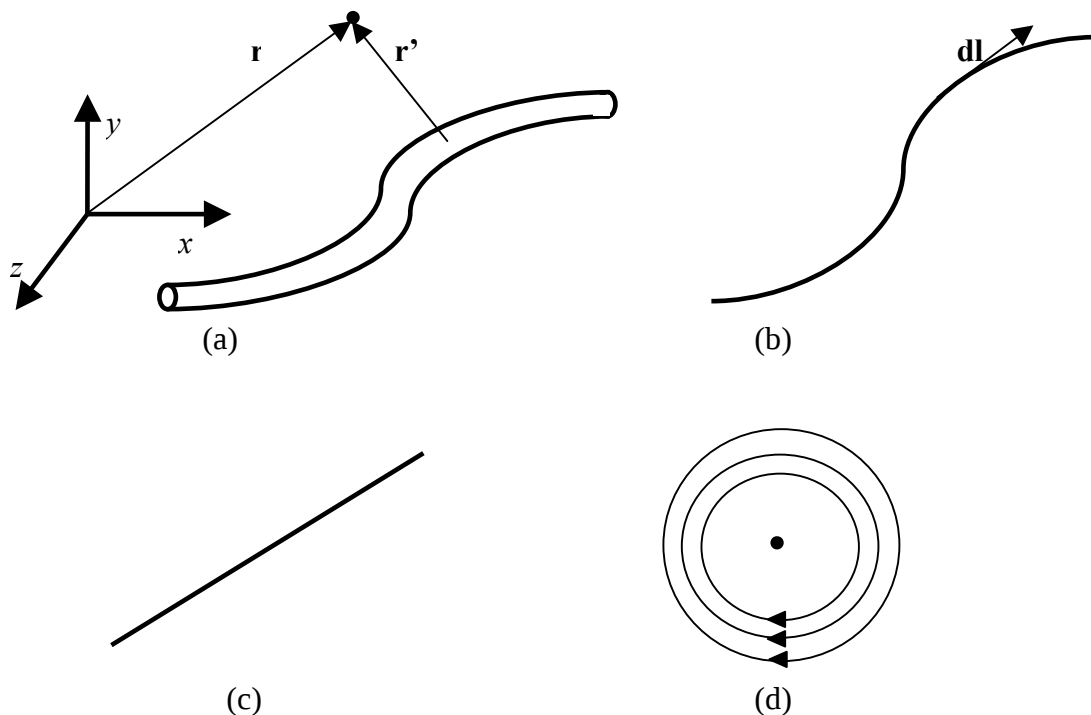


Figura 3.3 – Filamento de Vorticidade: (a) filamento de vorticidade com núcleo de área finita, (b) filamento singular de vorticidade, (c) vórtice linha, (d) vórtice potencial e suas linhas de corrente. (SILVA 2005)

Nas Eqs. (3.9), (3.10a) e (3.10b) observa-se a existência de uma singularidade na velocidade induzida para um ponto que se aproxima do centro do próprio vórtice, onde as velocidades induzidas tendem a valores infinitos. Entretanto, a observação de situações físicas reais revela que estas velocidades não crescem indiscriminadamente ao se aproximar do centro do vórtice, o que sugere a necessidade de se utilizar um modelo que represente melhor as velocidades nesta região, como será apresentado na próxima seção.

3.5. Modelagem da vorticidade

A modelagem matemática descrita acima tem por objetivo permitir a solução do escoamento em estudo, representado pelo problema de valor de contorno descrito na seção 3.2, ou seja, determinar em um instante de tempo futuro os campos de velocidade e pressão resultantes da interação de um corpo com o fluido que escoa ao seu redor. Assim a

vorticidade gerada no contorno sólido é transportada para o fluido, passa a ser governada pela Eq. (3.6) e, finalmente, começa a fazer parte da solução e a influenciar o escoamento como um todo.

A vorticidade presente no escoamento é modelada através da utilização de elementos de vorticidade discretos, cujas intensidades são determinadas por ocasião da solução do problema de valor de contorno da seção 3.2. Tais elementos são transportados respeitando-se a Eq. (3.6) e induzindo velocidade em todo o campo. Esta discretização do campo de vorticidade, necessária para que se obtenha uma modelagem matemática que torne possível uma solução numérica acurada, deve ser feita de modo a representar com o máximo de fidelidade possível a continuidade deste campo, sem introduzir problemas numéricos como baixa resolução ou, no outro extremo, alto custo computacional. Novamente a relação entre custo e resultados deve ser avaliada, levando-se em consideração as ferramentas disponíveis para solução.

Deste modo, deve-se representar o campo de vorticidade com elementos de vorticidade discretos que guardem boa relação entre a qualidade desta representação e o custo computacional envolvido. O refinamento indiscriminado do campo de vorticidade na direção da solução exata do equacionamento torna impeditivo o tempo de processamento para aplicações de engenharia e, no outro extremo, a baixa resolução ou a pobre representação deste campo pode conduzir a resultados insatisfatórios.

Os modelos disponíveis para discretização da vorticidade em duas dimensões incluem os vórtices Singular (Potencial), de Rankine e de Lamb. Pode-se também utilizar como elemento discreto de vorticidade as chamadas folhas de vorticidade, as quais mais se aproximam dos elementos de discretização da superfície do sólido.

Os dois modelos mais utilizados para a representação de vórtices reais são os modelos de Rankine e Lamb (SARPAKAYA, 1994). Ambos os modelos suavizam as velocidades induzidas a partir de uma distância ao centro do vórtice. A região circular que suaviza as velocidades induzidas pela região potencial do vórtice é denominada núcleo. Um vórtice é definido então como a região cuja vorticidade é não nula, e que está circundado por uma região com vorticidade nula.

Deste modo, a fiel representação da região rotacional do escoamento só é garantida pela interseção dos núcleos dos vórtices. Regiões rotacionais onde estes não se interceptam são resultantes de erros no modelo e conduzem à avaliação incorreta dos campos de velocidade.

O modelo de Rankine sugere que o vórtice gire internamente como um corpo rígido na região do seu núcleo e assuma o comportamento do vórtice potencial fora deste. Este modelo introduz uma descontinuidade na derivada do campo da velocidade induzida q , como pode ser visto na Fig. 3.4, exatamente na circunferência do núcleo.

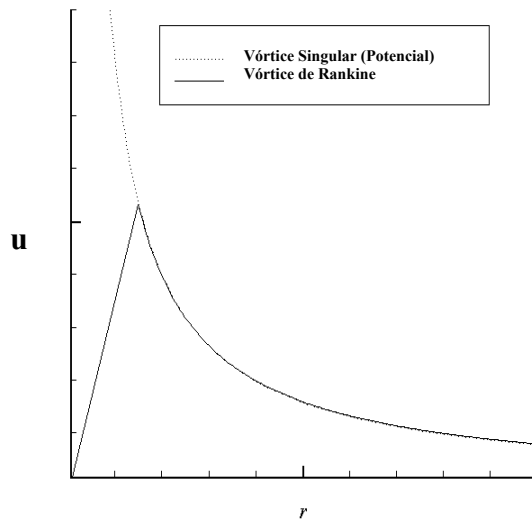


Figura 3.4 – Velocidade tangencial induzida por um vórtice singular e por um vórtice de Rankine.

O modelo de Lamb, utilizado por MUSTTO (1998), MALTA (1998), ALCANTARA PEREIRA (1999), GUEDES (2003) e MUSTTO (2004), possui uma distribuição Gaussiana de vorticidade, que é uma solução exata da equação de Navier-Stokes para um vórtice viscoso em um domínio infinito. Os campos de vorticidade e de velocidade induzida para um vórtice de Lamb são dados por

$$\omega(r,t) = -\frac{\Gamma}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right), \quad (3.11)$$

$$u(r,t) = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right], \quad \text{na direção } \theta, \quad (3.12)$$

onde $r^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$, $\sigma = \sqrt{4t/Re}$ é o raio do núcleo, direção θ é medida no sentido anti-horário e Γ positivo no sentido horário. Na Fig. 3.5 pode-se observar que o comportamento do campo de velocidade de um vórtice de Lamb é contínuo e finito, com derivadas contínuas e finitas, para todo r . O campo de velocidade escrito em coordenadas cartesianas é descrito pelas seguintes equações

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_o}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right], \quad (3.13)$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_o}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right]. \quad (3.14)$$

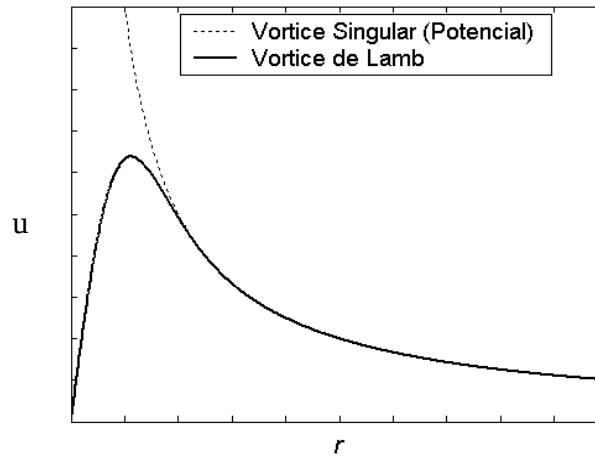


Figura 3.5 – Velocidade tangencial induzida por um vórtice pontual e um vórtice de Lamb.

Outro elemento de vorticidade utilizado para discretizar o campo de vorticidade é a folha de vorticidade. Estas tendem a suavizar as velocidades induzidas em um direção paralela a sua orientação principal, porém introduzem uma descontinuidade na velocidade induzida ao se cruzar transversalmente a folha.

Analogamente às Eqs. (3.10a) e (3.10b), as quais fornecem as velocidades induzidas por um vórtice Pontual, as componentes de velocidade induzidas por uma folha de vorticidade com distribuição constante de vorticidade por unidade de comprimento γ , podem ser calculadas integrando-se as Eqs. (3.10a) e (3.10b) ao longo da folha de vorticidade, resultando nas Eqs. (3.15) e (3.16),

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} [\theta_2 - \theta_1] \quad (3.15)$$

$$v = \frac{\gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right], \quad (3.16)$$

onde θ_1, θ_2, r_1 e r_2 podem ser vistos na Fig 3.6.

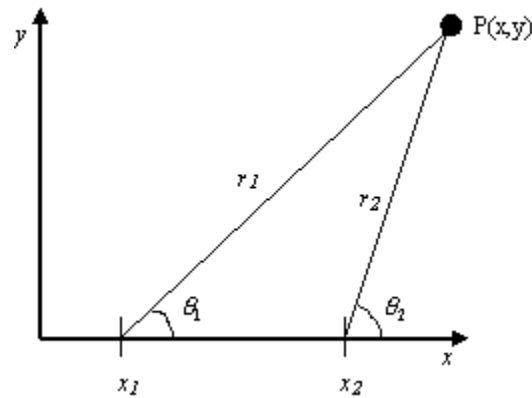


Figura 3.6 – Velocidade induzida no ponto P por uma folha de vorticidade de intensidade $\gamma[x_1, x_2]$ (KATZ & PLOTKIN 2001)

3.6. Método dos Painéis

Pode-se classificar muitos dos métodos numéricos conhecidos atualmente como Métodos Aproximados, pois originam-se dos Métodos dos Resíduos Ponderados. Assim, como exemplo, pode-se citar: os Métodos das Diferenças Finitas, os quais se baseiam na formulação original dos Métodos de Resíduos Ponderados; os Métodos dos Elementos Finitos, baseados nas formulações fracas dos Métodos de Resíduos Ponderados; e os

Métodos de Integral de Contorno ou Métodos dos Elementos de Contorno, os quais se baseiam na formulação inversa dos Métodos de Resíduos Ponderados (MANSUR *et al.*).

Dentre os diversos métodos utilizados para a análise de escoamento potenciais, existem técnicas analíticas, tais como o Método de Perturbações (VAN DYKE, 1975) e a Teoria de Variáveis Complexas (CHURCHILL & BROWN, 1984). Dentro da Teoria de Variáveis Complexas, pode-se mencionar ainda as técnicas de Transformação Conforme, utilizada em CARREIRO (2002), e o Teorema do Círculo, utilizado em MUSTTO (2004).

O Método dos Painéis é uma particularização do Método dos Elementos de Contorno para aplicação em escoamentos potenciais. Utiliza funções de ponderação que são soluções fundamentais da equação de Laplace. Tais funções são conhecidas como funções elementares, as quais eliminam as integrais de domínio e reduzem o problema a formulações que utilizam apenas integrais no contorno.

Mesmo sendo o método dos Painéis uma simplificação do Método dos Elementos de Contorno, este apresenta excelentes resultados, podendo inclusive ser utilizado em geometrias complexas. No caso da aplicação em aerofólios, a simplicidade da geometria em questão o torna ainda mais adequado, tendo em vista as derivadas serem suaves em todo o contorno, com exceção do bordo de fuga, razão pela qual esta região deve ser representada satisfatoriamente no equacionamento.

Em aerodinâmica, os escoamentos potenciais incompressíveis, ou seja, aqueles que podem ser expressos como o gradiente de uma função escalar denominada potencial de velocidade (ϕ), são irrotacionais e obedecem a equação de Laplace. Sua solução é de muita utilidade para diversos casos de interesse, sobretudo para o cálculo da contribuição irrotacional do campo de velocidade, como parte do algoritmo do Método de Vórtices.

Assim, sendo o campo de velocidade de um escoamento potencial definido como $\mathbf{u} = \nabla \phi$, onde ϕ é a função potencial de velocidade, e considerando então o escoamento potencial, bidimensional e incompressível ao redor de um corpo rígido em repouso, pode-se formular o seguinte problema de valor de contorno para o potencial de velocidade ϕ , escrito na forma adimensional,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{no fluido,} \quad (3.17)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{na superfície do corpo,} \quad (3.17a)$$

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} |\nabla \phi(\mathbf{r}, t)| = 1, \quad \text{no infinito.} \quad (3.17b)$$

O campo de velocidade pode ser obtido através da expressão $\mathbf{u} = \nabla \phi$, ou, escrito em coordenadas cartesianas,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial Y}. \quad (3.18a, b)$$

O vetor $\mathbf{n}$ é o unitário normal ao contorno, ou seja, normal à superfície e apontado para dentro do corpo, ou seja, para fora da região fluida. Por sua vez, o vetor $\mathbf{r}$ define uma posição do meio a partir de um sistema de coordenadas fixo ao corpo, como pode ser visto na Fig 3.7.

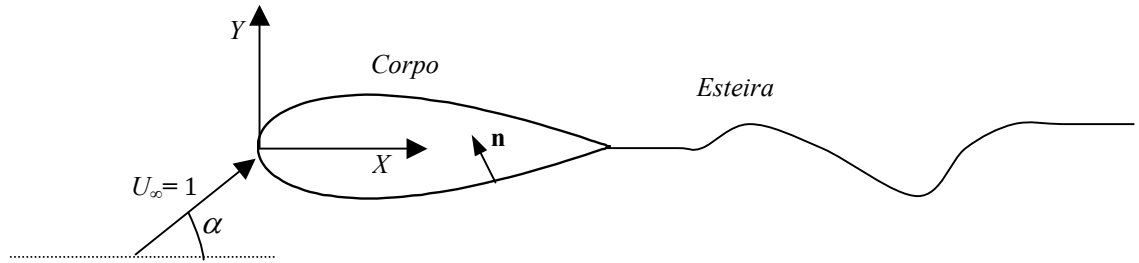


Figura 3.7 – Descrição do sistema de coordenadas (SILVA 2005).

Pode-se obter a solução geral da Eq. 3.17 a partir do teorema da divergência, transcrito abaixo,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade.

Deste modo, a Eq. 3.19 estabelece que o fluxo através da superfície de controle S é igual à taxa de expansão do fluido dentro do volume V formado por esta superfície.

Substituindo-se o vetor $\mathbf{u}$ da Eq. 3.19, pelo vetor resultante da combinação de funções escalares da forma $\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1$, obtém-se a Eq. 3.20, conhecida como 2ª identidade de Green,

$$\int_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV = \int_S (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.20)$$

onde $S = S_c(\text{corpo}) + S_e(\text{esteira}) + S_\infty(\text{externo})$, ou seja, o contorno que define a validade da equação de Laplace, onde o escoamento é irrotacional.

Pode-se arbitrar $\phi_1 = \frac{1}{r}$ e $\phi_2 = \phi$, onde ϕ é o potencial de interesse e r é a distância a um ponto P , medida no sistema de coordenadas fixo ao corpo. Assim, isolando-se P em uma esfera imaginária de raio ε , imersa em V , ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem a equação de Laplace, o que zera o lado esquerdo da Eq. 3.20 e permite escrever

$$\int_{S+\text{esfera } \varepsilon} \left(\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.21)$$

Introduzindo um sistema de coordenadas esféricas no ponto P , onde: $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$, $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$ e $\mathbf{n} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\left(\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \right)$, obtém-se

$$-\int_{\text{esfera } \varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) dS + \int_S \left(\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.22)$$

Observando-se que $\int dS = 4\pi\varepsilon^2$ e fazendo-se $\varepsilon \rightarrow 0$, pode-se supor que $\frac{\partial \phi}{\partial r} \rightarrow 0$ na superfície da esfera, o que reduz a Eq. 3.22 à

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.23)$$

Supondo que o escoamento de interesse ocorre dentro do corpo, P é exterior à S_C , resultando em um potencial interno ϕ_i . Neste caso, *pode-se* escrever, a partir da Eq. (3.23), a seguinte equação

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left(\frac{1}{r} \nabla \phi_i - \phi_i \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{n}$ passa a apontar para fora de S_C , o que requer a mudança de sinal da Eq. (3.24).

Somando-se agora as Eqs. (3.23) e (3.24) e acrescentando a contribuição de S_∞ , chega-se à uma expressão que inclui a influência da região interna, como se segue

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left(\frac{1}{r} \nabla (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_e + S_\infty} \left(\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.25)$$

Definindo a contribuição de S_∞ abaixo

$$\phi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left(\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.26)$$

e substituindo-se a Eq. (3.26) na Eq.(3.25) chega-se à

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left(\frac{1}{r} \nabla (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_e} \left(\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS + \phi_\infty(P) \end{aligned} \quad (3.27)$$

A Eq. (3.27) é a equação integral que permite obter o valor de $\phi(P)$ em todo o domínio, a partir de valores conhecidos de ϕ e $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ nos contornos S_c e S_e , respectivamente do corpo e da esteira viscosa.

Com a utilização da Eq. (3.27) o problema agora passa a ser encontrar o valor de ϕ e $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ nos contornos S_c e S_e . Para isto, define-se $-\mu = \phi - \phi_i$ como a intensidade de um dipolo e $-\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial n} - \frac{\partial\phi_i}{\partial n}$ como a intensidade de uma fonte, sendo $\mathbf{n}$ o vetor normal, com sentido positivo para o interior de S_c . Tais definições são chamadas de soluções elementares e podem ser substituídas na Eq. 3.27, o que conduz à

$$\begin{aligned} \phi(P) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{S_c} \left(\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_e} \left(\mu \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS + \phi_\infty(P) \end{aligned} \quad (3.28)$$

uma vez que em S_e , devido à espessura da esteira ser considerada nula, sua região interna é desprezível, o que torna $\mu = -\Delta\phi$, ou seja, igual à diferença entre os potenciais da região acima e abaixo da esteira.

Outra simplificação que se fez necessária para se chegar à Eq. 3.28 é de que $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ é contínua ao se cruzar a esteira, o que zera o primeiro termo da segunda integral da Eq. 3.27, ou seja, uma distribuição de fontes não suporta carregamento e, portanto, não está presente na esteira viscosa.

A Eq. (3.28) revela que pode-se chegar à solução do problema distribuindo-se singularidades ao longo do corpo e da esteira, pois estes são os contornos que definem a região onde a equação de Laplace é válida. Tais singularidades podem ser: vorticidade, dipolos ou fontes. Estas singularidades representam as funções de transferência que irão permitir resolver o escoamento no domínio fluido, a partir do contorno (aerofólio e esteira). Estas singularidades apresentam intensidade γ para o caso de vórtice, μ para dipolo e σ

para o caso de distribuição de fonte ou sumidouro. O último termo da Eq. (3.28) refere-se ao escoamento não perturbado ϕ_∞ .

A escolha do tipo de singularidade é feita tendo em vista aumentar a representatividade da física do problema, não devendo ser utilizada distribuição somente de fontes em aerofólios que produzam sustentação (não simétricos ou com ângulo de ataque positivo).

A condição de contorno Eq. (3.17b) é naturalmente satisfeita pelas funções de transferências escolhidas, uma vez que a influência no infinito tende à zero (termo $1/r$).

As intensidades destas funções de transferências (μ para o caso de dipolo, γ para vórtice, e σ para fonte ou sumidouro) são então obtidas ao se satisfazer a condição de contorno Eq. (3.17a). No entanto, o cálculo analítico do valor destas singularidades sobre geometrias quaisquer não é possível, sendo necessário discretizar o contorno para a solução numérica, o que é feito pelo Método dos Painéis.

Substituindo-se $\mathbf{n} \cdot \nabla$ por $\partial/\partial n$ na Eq 3.28 chega-se a

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_c} \left(\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_e} \left(\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS + \phi_\infty(P). \quad (3.29)$$

Para o caso bidimensional, define-se $\phi_1 = \ln r$ e $\phi_2 = \phi$, e, analogamente ao desenvolvimento para o caso tridimensional que resultou na Eq. 3.29, chega-se à

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_c} \left(\sigma \ln r - \mu \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_e} \left(\mu \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dS + \phi_\infty(P). \quad (3.30)$$

Este tipo de abordagem conduz a uma solução que não é única, uma vez que pode-se utilizar diferentes tipos e combinações de singularidades. Tal observação ressalta a importância de se escolher a formulação matemática que melhor represente a situação física em questão.

Deste modo, recorre-se ao teorema de Kelvin para formular um equacionamento que se baseie na condição de conservação de circulação, a qual adiciona unicidade à solução, e

pode ser incorporada ao modelo como direcionamento para uma melhor representação do problema físico em foco.

Considerações físicas também são utilizadas para a escolha das singularidades, tendo em vista a influência da circulação na caracterização do problema. Assim, no caso em que o escoamento gera sustentação no aerofólio, situação em que a avaliação da circulação é dificultada, a escolha apenas de fontes não é capaz de representar com fidelidade a assimetria do escoamento.

3.7. Condição de contorno - utilização simultânea de painéis e vórtices para discretização do corpo

A imposição da condição de contorno na superfície sólida permite determinar a intensidade das singularidades distribuídas no contorno. Assim, satisfazendo-se a condição de impenetrabilidade, o campo de velocidade é unicamente determinado (KOUMOUTSAKOS *et al.* (1994)). Deste modo, surge na superfície do corpo uma folha de vorticidade espúria, a qual é assim denominada por não satisfazer a condição de não-eskorregamento.

A modelagem desenvolvida neste trabalho busca eliminar esta folha de vorticidade espúria, com o objetivo de satisfazer à condição de não-eskorregamento. Tal aprimoramento pode ser interpretado como o processo de difusão da vorticidade gerada pelo aparecimento da folha de vorticidade. Para a eliminação dessa folha de vorticidade espúria, que acrescenta uma velocidade de deslizamento não-nula sobre o painel, a modelagem apresentada neste trabalho acrescenta uma camada de L vórtices discretos nas vizinhanças dos painéis, conforme mostrado na Fig. 3.8.

Deste modo, inclui-se no modelo a utilização conjunta de vórtices e painéis, conforme esquema da Fig. 3.8, onde a intensidade da folha de vorticidade $\gamma(S)$ é determinada simultaneamente à intensidade do vórtice Γ . Este procedimento permite formar um sistema onde são impostas simultaneamente as condições de contorno de impenetrabilidade e de não-deslizamento, de maneira a melhorar a representação da superfície e do processo de difusão de vorticidade na parede do corpo, como será detalhado no capítulo seguinte.

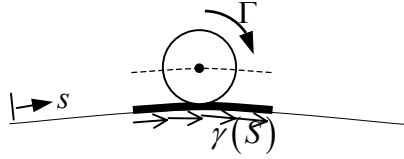


Figura 3.8 – Utilização simultânea de vórtices e painéis

O equacionamento da condição de contorno passa pela observação de que a variação da vorticidade no tempo se deve a formação da folha de vorticidade espúria, cuja circulação é

$$\Gamma = \oint_c \gamma(s) ds. \quad (3.31)$$

Batchelor (1967) mostra que a variação de circulação em um escoamento real viscoso, barotrópico e com forças de corpo conservativas é dada por

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \oint_c \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = -\nu \oint_c \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s} = -\nu \oint_c \frac{\partial \omega}{\partial n} ds. \quad (3.32)$$

A Eq. (3.32) é uma generalização do teorema de Kelvin para escoamentos viscosos. Integrando a Eq. (3.32), chega-se a

$$\Gamma = \oint_c \int_t^{t+dt} \left(-\nu \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) dt' ds, \quad (3.33)$$

Comparando a Eq. (3.33) com a Eq. (3.31) obtém-se

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial n}(s) = -\frac{\gamma(s)}{\delta t}. \quad (3.34)$$

A Eq. (3.34), obtida por KOUMOUTSAKOS *et al.* (1994), é a equação de contorno de Neumann para a vorticidade, a qual permite relacionar o fluxo de vorticidade normal à

superfície com o aparecimento da folha de vorticidade espúria. Esta condição de contorno para a vorticidade guarda relação com a condição de não-escorregamento para a velocidade na superfície s .

3.8. Difusão da vorticidade na superfície sólida e nascimento de novos vórtices

No modelo para o nascimento dos vórtices proposto neste trabalho, a imposição simultânea das condições de impenetrabilidade e não-escorregamento é possível devido à utilização conjunta de vórtices e painéis. Este novo modelo baseia-se na hipótese de que uma folha de vorticidade espúria surge na superfície do corpo, após um intervalo de tempo Δt . Tal surgimento deve-se à imposição da condição de impenetrabilidade. Porém, esta folha de vorticidade, por ação do processo puramente difusivo, dá origem a uma camada de vórtices de Lamb, os quais passam a satisfazer a condição de não-escorregamento. É pressuposto que ambas as distribuições de vorticidade co-existem de modo a satisfazer as condições de impenetrabilidade e não-escorregamento simultaneamente, respeitada também a condição de conservação de circulação.

A modelagem em questão esbarra na necessidade de determinação da quantidade de vórtices por painel L , e de sua exata posição de nascimento, o que é feito tomando-se como base o processo difusivo na superfície, ou seja, quando $y = 0$. Neste caso, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na parede, e o termo convectivo é nulo, o que permite escrever a equação de transporte da vorticidade como se segue

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (3.35)$$

Pela definição de ω para o caso bidimensional pode-se escrever

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.36)$$

e ainda, da equação da continuidade bidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.37)$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.38)$$

Na superfície, $y = 0$ e $v = 0$, ou seja, $\partial v / \partial x = 0$. Então,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.39)$$

Substituindo a Eq. 3.39 na Eq. 3.35 obtém-se um modelo de difusão aproximado, válido para as proximidades da parede,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (3.40 \text{ a})$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial y} (x, y = 0, t > 0) = \frac{-\gamma(x)}{\delta t} \quad (3.40 \text{ b})$$

$$\omega(x, y \rightarrow \infty, t > 0) = 0 \quad (3.40 \text{ c})$$

$$\omega(x, y > 0, t = 0) = 0 \quad (3.40 \text{ d})$$

A condição de contorno (3.40b), tal qual a Eq. (3.34), relaciona o fluxo de vorticidade na superfície, com o aparecimento de uma folha de vorticidade espúria, representando,

desta forma, uma condição de contorno de Neumann para a vorticidade, o que equivale à condição de não escorregamento para a velocidade na superfície.

Deste modo, o PVC (3.40) fornece um equacionamento para a difusão da vorticidade na proximidade da parede, processo que se dá preferencialmente na direção normal à superfície. A solução do PVC (3.40) por similaridade é apresentada a seguir.

Definido-se

$$\eta \equiv \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (3.41)$$

e

$$F(\eta) \equiv \frac{\omega \delta n}{\gamma(s)}, \quad (3.42)$$

onde, de acordo com a Fig. 3.9, $\delta_n = \delta A / \Delta \ell$.

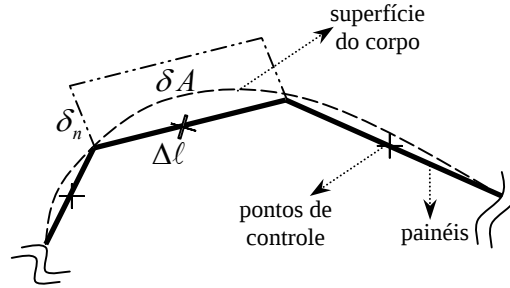


Figura 3.9 – Espessura de difusão δ_n

Avaliando-se as derivadas parciais de η tem-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}; \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t}; \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\gamma}{\delta n} F'(\eta) \left(-\frac{\nu}{2\sqrt{vt}} \right) \eta; \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\gamma}{\delta n} F'(\eta) \frac{1}{2\sqrt{vt}}; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\gamma}{\delta n} \frac{F''(\eta)}{2\sqrt{vt}} \frac{1}{2\sqrt{vt}}. \quad (3.47)$$

Da Eq. (3.34) tem-se que

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{\gamma(x)}{\delta t}. \quad (3.48)$$

Substituindo a Eq. (3.45) na Eq. (3.47) a obtém-se

$$F'' = -2\eta F'. \quad (3.49a)$$

Aplicando a Eq. (3.46) na Eq. (3.48) chega-se a

$$F'(0) = -2 \frac{\sqrt{vt}}{\nu \delta t} \delta n. \quad (3.49b)$$

De (3.42) tem-se

$$F(\infty) = 0, \quad (3.49c)$$

pois $w = 0$ se $y = \infty$.

Logo, (3.49) forma um PVC em $F(\eta)$, cuja solução é

$$F(\eta) = \sqrt{\pi} \delta n \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t} \operatorname{erfc}(\eta), \quad (3.50)$$

ou ainda

$$\operatorname{erfc}(\eta) = \frac{F(\eta)}{\sqrt{\pi} \delta n \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t}}, \quad (3.51)$$

onde $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi$.

Substituindo a Eq. (3.50) na Eq. (3.42) chega-se a uma expressão para a vorticidade

$$\omega(x, y, t) = \sqrt{\pi} \gamma(x) \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t} \operatorname{erfc}(\eta), \quad (3.52)$$

que integrada no intervalo $[0, \infty]$ fornece um valor para a vorticidade total $\bar{\omega} \delta n \delta s = \gamma(x) \delta s$,

$$\bar{\omega} \delta n \delta s = \int_0^\infty \omega(x, y, t) dy \delta s = \sqrt{\pi} \gamma(x) \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) dy \delta s. \quad (3.53)$$

Porém, da Eq. (3.41) $dy = d\eta \, 2\sqrt{\nu t}$, logo a Eq. (3.53) ganha a forma de

$$\bar{\omega} \delta n \delta s = 2\sqrt{\pi} \gamma(x) \frac{t}{\delta t} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta = \gamma(x) \delta s. \quad (3.54)$$

Sabendo que

$$\int_0^{\infty} \text{erfc}(\eta) d\eta = \frac{1}{\pi}, \quad (3.55)$$

a Eq. (3.53) pode ser reescrita como

$$t = \frac{\delta t}{2}. \quad (3.56)$$

A Eq. (3.56) representa uma restrição sobre t , que permite determinar a distância de difusão δn , fazendo-se $y = \delta n$ na Eq. (3.41), com η estimado pela Eq. (3.51), ou seja, $\text{erfc}(\eta)$ passa a monitorar a precisão do processo de difusão na parede. Como exemplo, fazendo $\text{erfc}(\eta) = 5\%$, tem-se $\eta_{5\%} = 1,38$, que na Eq. (3.41), com $t = \delta t/2$ resulta em

$$\delta n|_{95\%} = 1.95\sqrt{\nu\delta t} \quad (3.57)$$

Da mesma forma, para $\text{erfc}(\eta) = 1\%$, tem-se $\eta_{1\%} = 1,82$, o que resulta em

$$\delta n|_{99\%} = 2.57\sqrt{\nu\delta t}, \quad (3.58)$$

ou ainda, para $\text{erfc}(\eta) = 0.5\%$, tem-se $\eta_{0,5\%} = 1,985$, o que resulta em

$$\delta n|_{99,5\%} = 2.81\sqrt{\nu\delta t}, \quad (3.59)$$

e, por último, para $\text{erfc}(\eta) = 0.47\%$, tem-se $\eta_{0,47\%} = 2,0$, o que resulta em

$$\delta n|_{99,53\%} = 2.83\sqrt{\nu\delta t}. \quad (3.60)$$

A Eq. (3.60) passa a ser a referência para a determinação da distância de difusão neste trabalho, o que permite determinar a área de difusão δA da Fig. 3.9, assim como serve de base para o cálculo do raio do vórtice de Lamb nascente, como será visto no próximo capítulo. Tal escolha é arbitrária, porém insere no modelo um satisfatório grau de precisão para o cálculo da distância de difusão.

3.9. Condição de conservação de circulação

O teorema de Kelvin, ou de conservação da circulação, fornece ao equacionamento uma forte relação com a situação física simulada, uma vez que o Método de Vórtices se baseia na evolução do escoamento a partir da vorticidade gerada no contorno, o que permite escrever

$$\frac{d\Gamma_{total}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Gamma + \Gamma_B) = \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{d\Gamma_B}{dt} = 0, \quad (3.61)$$

onde Γ_B é a circulação no corpo, podendo ser escrita como

$$\frac{d\Gamma_B}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{A_B} \omega dA = \frac{d}{dt} \int_{A_B} 2\Omega(t) dA = 2 \frac{d\Omega}{dt} A_B, \quad (3.62)$$

onde $\Omega(t)$ e A_B são respectivamente a velocidade angular de rotação e a área ocupada pelo corpo no plano. Assim, a equação acima, no caso bidimensional, toma a forma de

$$\frac{d\Gamma_B}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{A_B} 2\Omega(t) dA = 2 \frac{d\Omega}{dt} A_B. \quad (3.63)$$

Substituindo a Eq. (3.63) na Eq. (3.61) chega-se a

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2 \frac{d\Omega}{dt} A_B. \quad (3.64)$$

Logo,

$$\Gamma = -2A_B [\Omega(t + \Delta t) - \Omega(t)]. \quad (3.65)$$

No entanto, por definição,

$$\Gamma = \oint_c \gamma(s) ds = \oint_{C_B} \gamma(s) ds + \int_{A_B} \omega dA + \int_{A_W} \omega dA, \quad (3.66)$$

onde a primeira integral do lado direito refere-se às folhas de vorticidade, a segunda integral refere-se aos vórtices nascentes, e a terceira integral corresponde aos vórtices livres na esteira. Assim,

$$\oint_{C_B} \gamma(s) ds + \int_{A_B} \omega dA = - \int_{A_W} \omega dA - 2A_B [\Omega(t + \Delta t) - \Omega(t)]. \quad (3.67)$$

A Eq.(3.67) constitui a condição de conservação de circulação empregada neste trabalho, a qual, pelo fato de no instante inicial não existirem vórtices livres na esteira, e por ser o corpo livre de rotação, pode ser reescrita como

$$\oint_{C_B} \gamma(s) ds + \int_{A_B} \omega dA = 0. \quad (3.68)$$

3.10. Carregamentos sobre o corpo

A solução do escoamento é levada a efeito pela utilização do Método dos Vórtices em combinação com o Método dos Painéis, o que permite a determinação do campo de velocidade. Porém, o interesse maior em termos de aplicação de engenharia continua sendo a determinação do carregamento sobre o corpo imerso no meio fluido. Tais cargas são o

resultado final do relacionamento entre a superfície sólida e o escoamento que a circunda, definindo o resultado dinâmico desta interação.

Tradicionalmente utiliza-se a equação de Bernoulli transiente para o cálculo da pressão sobre o corpo, o que faz com que seja necessário o cálculo do termo dependente do tempo, integrando a pressão na superfície. Alternativamente, alguns autores realizaram trabalho tentando tornar o cálculo da pressão o mais genérico possível.

Neste trabalho, para o cálculo do coeficiente de atrito na parede $C_f = \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$, utiliza-se uma aproximação de primeira ordem para o perfil de velocidade na parede, ou seja $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \cong \frac{\Delta u}{\Delta y}$, com $\Delta y = 10^{-3}$.

3.10.1. LEWIS (1991)

Como exemplo que realiza a integração da pressão na parede, a metodologia proposta por LEWIS 1991 parte da equação de Navier-Stokes (Eq. 3.2) avaliada sobre a superfície s , o que conduz a

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*}. \quad (3.69)$$

3.10.2. WU (1981)

Como exemplo de metodologia que considera o escoamento como um todo, WU (1981) propõe uma avaliação da força de superfície

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d\alpha}{dt} + \rho \sum_{j=1}^{N_b} \frac{d}{dt} \int_{R_j} \mathbf{v} dr, \quad (3.70)$$

onde α é definido como o primeiro momento de inércia,

$$\alpha = \int_{R_\infty} \mathbf{r} \times \omega dR, \quad (3.71)$$

$\mathbf{w}$ é o vetor campo de vorticidade, $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade do corpo j , $\mathbf{r}$ vetor posição do campo de vorticidade, R_j é a região ocupada pelo corpo j , R_f é a região ocupada apenas pelo fluido e $R_\infty = R_f + \sum_j R_j$.

A Eq. (3.70) estabelece que $\mathbf{f}$ é a soma da força de inércia devido o deslocamento do fluido para contornar o corpo, acrescida de um termo proporcional a taxa de variação temporal do primeiro momento de vorticidade.

Substituindo a Eq. (3.71) na eq. (3.70) tem-se, para apenas um corpo $j=b$

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{R_f} \mathbf{r} \times \omega dR - \rho \frac{d}{dt} \int_{R_b} \mathbf{r} \times \omega dR + \rho \frac{d}{dt} \int_{R_b} \mathbf{u} dr. \quad (3.72)$$

A Eq. 3.72 define a força de contato para um corpo em movimento relativo a um fluido qualquer. Os dois primeiros termos contemplam as forças devido à vorticidade presente no escoamento e no corpo, enquanto a terceira integral expressa um balanço de massa virtual na superfície do corpo.

Estando o corpo em repouso, imerso em um escoamento uniforme com velocidade constante U_∞ , tem-se

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{R_f} \mathbf{r} \times \omega dR - \rho \frac{d}{dt} \int_{R_b} \mathbf{r} \times \omega dR - \rho \frac{dU_\infty}{dt} R_b, \quad (3.73)$$

uma vez que $U_b = -U_\infty$ e $\rho U_b \frac{\partial R_b}{\partial t} = 0$ (corpo indeformável).

Para um escoamento que se inicia impulsivamente, pode-se escrever

$$\left. \frac{dU_\infty}{dt} \right|_{t \leq \Delta t} = \frac{U_\infty}{\Delta t} \Big|_{t \leq \Delta t}, \quad (3.74)$$

que representa a força infinita necessária a mover impulsivamente o escoamento ou o corpo, partindo-se do repouso.

Substituindo-se a Eq. 3.74 na Eq. 3.73 chega-se a

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{R_f} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho \frac{d}{dt} \int_{R_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho R_b \left. \frac{U_\infty}{\Delta t} \right|_{t \leq \Delta t}. \quad (3.75)$$

3.10.3. SHINTANI & AKAMATSU (1994)

Por último, SHINTANI & AKAMATSU (1994) apresentam uma metodologia livre de malhas para cálculo da pressão na superfície, a qual não lança mão da equação de Bernoulli transiente. Partindo-se da equação de Navier-Stokes (Eq. 3.2), e utilizando identidade vetorial

$$(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^{*2}}{2} \right) - \mathbf{u}^* \times (\nabla \times \mathbf{u}^*), \quad (3.76)$$

chega-se a

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} - \mathbf{u}^* \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^{*2}}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^*. \quad (3.77)$$

Definindo-se $Y = \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^{*2}}{2}$ como o trabalho específico total e tomando-se o divergente da Eq. 3.77 tem-se

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{u}^* \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla^2 Y + \nu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u}^*, \quad (3.78)$$

o que se reduz a

$$\nabla^2 Y = \nabla \cdot (\mathbf{u}^* \times \boldsymbol{\omega}), \quad (3.79)$$

por ser o escoamento considerado incompressível.

Multiplicando-se a Eq. (3.79) pela função de Green $G_i = -\frac{1}{2\pi} \ln r$, onde $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, e integrando-se em todo o domínio Ω tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \dot{Y}) G_i d\Omega = \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})] G_i d\Omega, \quad (3.80)$$

sendo $\dot{Y} = Y - Y_{\infty}$, uma vez que $\nabla^2 Y = \nabla^2 (Y + Y_{\infty}) = \nabla^2 \dot{Y}$ pois $Y = Y_{\infty} = cte$, sendo i o ponto onde deseja-se avaliar a pressão.

O primeiro termo da Eq. (3.80) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \dot{Y}) G_i d\Omega = \int_{\Omega} \dot{Y} \nabla^2 G_i d\Omega + \int_{\Omega} (G_i \nabla^2 \dot{Y} - \dot{Y} \nabla^2 G_i) d\Omega, \quad (3.81)$$

onde o Laplaciano da função de Green (segunda integral do lado direito) é a função Delta de Dirac, ou seja,

$$\int_{\Omega} \dot{Y} \nabla^2 G_i d\Omega = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}_i \notin \Omega \cup A_s \cup A_{\infty} \\ -\dot{Y}, & \mathbf{x}_i \in \Omega \\ -\frac{\dot{Y}}{2}, & \mathbf{x}_i \in A_s \cup A_{\infty} \end{cases}, \text{ ou ainda,} \quad (3.82)$$

$$\int_{\Omega} \dot{Y} \nabla^2 G_i d\Omega = -\alpha \dot{Y}_i, \text{ sendo } \alpha = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_i \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{x}_i \in A_s \cup A_{\infty} \end{cases}. \quad (3.83)$$

Aplica-se a segunda identidade de Green (Eq. 3.20) à segunda integral do lado direito da Eq. (3.81) chegando-se a

$$\int_{\Omega} (G_i \nabla^2 \dot{Y} - \dot{Y} \nabla^2 G_i) d\Omega = - \int_{A_s + A_{\infty}} (G_i \nabla^2 \dot{Y} - \dot{Y} \nabla^2 G_i) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3.84)$$

onde $A_s + A_{\infty}$ são respectivamente definidas como as áreas de contorno no corpo e no infinito.

Substituindo a Eq. (3.84) na Eq. (3.81) tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \dot{Y}) G_i d\Omega = -\alpha \dot{Y}_i + \int_{A_s + A_{\infty}} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds - \int_{A_s + A_{\infty}} G_i \nabla \dot{Y} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.85)$$

O segundo membro da Eq. (3.80) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} G_i \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (G_i \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega. \quad (3.86)$$

Pelo teorema de Gauss, a primeira integral da Eq. (3.86) conduz a

$$\int_{\Omega} G_i \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega = - \int_{A_s + A_{\infty}} G_i (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega. \quad (3.87)$$

Substituindo-se as Eq. (3.85) e Eq. (3.87) na Eq. (3.80) chega-se a

$$-\alpha \dot{Y}_i + \int_{A_s + A_{\infty}} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{A_s + A_{\infty}} G_i (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \dot{Y}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega. \quad (3.88)$$

A Eq. (3.87) permite escrever

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla Y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.89)$$

que pode ser substituído na Eq. 3.88, chegando-se a

$$-\alpha \dot{Y}_i + \int_{As+A\infty} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{As+A\infty} G_i \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{q} \right) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega. \quad (3.90)$$

Sendo $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ em A_s e $\mathbf{q} = \mathbf{U}_{\infty}$ em A_{∞} , $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{0}$ na Eq. (3.90), o que permite escrever

$$\alpha \dot{Y}_i - \int_{As+A\infty} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{q} ds = -\nu \int_{As+A\infty} G_i \nabla^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega. \quad (3.91)$$

A identidade vetorial $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$, em um escoamento incompressível toma a forma de $-\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\omega}$, o que permite reescrever a Eq. (3.91) da seguinte forma

$$\alpha \dot{Y}_i - \int_{As+A\infty} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = \nu \int_{As+A\infty} G_i \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega. \quad (3.92)$$

Analisando agora a primeira integral da Eq. (3.92)

$$\int_{As+A\infty} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = \int_{As} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds + \dot{Y}_{\infty} \int_{A\infty} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = \int_{As} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3.93)$$

sendo $\dot{Y} = \dot{Y}_{\infty} = Y_{\infty} - Y_{\infty} = 0$ no infinito, uma vez que $\dot{Y} = Y - Y_{\infty}$.

A segunda integral da Eq. 3.92 pode ser manipulada fazendo-se

$$\int_{As+A\infty} G_i \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{As+A\infty} \nabla \times (G_i \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{As+A\infty} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3.94)$$

onde, pelo teorema de Gauss tem-se a primeira integral do segundo membro da Eq. (3.94)

$$\int_{As+As\infty} \nabla \times (G_i \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \times G_i \boldsymbol{\omega}) d\Omega = 0 , \quad (3.95)$$

enquanto a segunda integral do segundo membro da Eq. (3.94) pode ser escrita como

$$\int_{As+As\infty} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{As} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds + \int_{As\infty} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{As} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds , \quad (3.96)$$

tendo em vista que no infinito $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, o que reduz a Eq. (3.94) a

$$\int_{As+As\infty} G_i \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{As} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds . \quad (3.97)$$

Substituindo as Eqs. (3.93) e (3.97) na Eq. (3.92) tem-se

$$\alpha \dot{Y}_i - \int_{As} \dot{Y} \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega - \nu \int_{As} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds , \quad (3.98)$$

Realiza-se a partir deste ponto a adimensionalização do problema, como se segue:

$$\dot{Y} = Y - Y_{\infty} = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \left(\frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{U_{\infty}^2}{2} \right) = \frac{p - p_{\infty}}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 - U_{\infty}^2) \quad (3.99)$$

$$\frac{\dot{Y}_i}{U_{\infty}^2/2} = \bar{Y}_i \quad (3.100)$$

$$\frac{\dot{Y}}{U_{\infty}^2/2} L \nabla G_i L \cdot \mathbf{n} \frac{ds}{L^2} = \bar{Y} \bar{\nabla} \bar{G}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} d\bar{s} \quad (3.101)$$

$$2L \nabla G_i L \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{U_{\infty}} \times \frac{\boldsymbol{\omega} L}{U_{\infty}} \right) \frac{d\Omega}{L^3} = 2 \bar{\nabla} \bar{G}_i \cdot (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}) d\bar{\Omega} \quad (3.102)$$

$$2 \frac{\nu}{U_\infty L} (L \nabla G_i L \times \frac{\boldsymbol{\omega} L}{U_\infty}) \cdot \bar{\mathbf{n}} \frac{ds}{L^2} = \frac{2}{\text{Re}} (\bar{\nabla} \bar{G}_i \times \bar{\boldsymbol{\omega}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\bar{s} \quad (3.103)$$

Deste modo, a Eq. (3.98) pode ser reescrita na sua forma adimensional como se segue

$$\alpha Y_i - \int_{As} Y \nabla G_i \cdot \mathbf{n} ds = 2 \int_{\Omega} \nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) d\Omega - \frac{2}{\text{Re}} \int_{As} (\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.104)$$

Para finalizar a análise da Eq. (3.104), deve-se proceder as operações vetoriais que se seguem,

$$\nabla G_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \nabla r = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{x-x_i}{r} \hat{i} + \frac{y-y_i}{r} \hat{j} \right), \quad (3.105)$$

$$\nabla G_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_i)\hat{i} + (y-y_i)\hat{j}}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \quad (3.106)$$

Em seguida pode-se efetuar o produto escalar da primeira integral da Eq. (3.104), onde $\mathbf{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$,

$$\nabla G_i \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x-x_i) + n_y(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}, \quad (3.107)$$

o produto vetorial da segunda integral da Eq. (3.104),

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = v\omega \hat{j} - u\omega \hat{i} = \omega(\hat{v}j - u\hat{i}), \quad (3.108)$$

o produto escalar também da segunda integral da Eq. (3.104),

$$\nabla G_i \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\frac{\omega}{2\pi} \frac{v(x-x_i) - u(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}, \quad (3.109)$$

o produto vetorial da terceira integral da Eq. (3.104),

$$\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega} = \omega G_y \hat{i} - \omega G_x \hat{j} = \omega (G_y \hat{i} - G_x \hat{j}), \quad (3.110)$$

e, por último, o produto escalar da terceira integral da Eq. (3.104),

$$(\nabla G_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{n_y(x - x_i) - n_x(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \quad (3.111)$$

Deve-se substituir as Eqs. (3.111), (3.109) e (3.107) na Eq. (3.104)

$$\begin{aligned} \alpha Y_i + \int_{As} \frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x - x_i) + n_y(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} Y ds = & - \int_{\Omega} \frac{1}{\pi} \frac{v(x - x_i) - u(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \omega d\Omega \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \int_{As} \frac{1}{\pi} \frac{n_y(x - x_i) - n_x(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \omega ds \end{aligned}, \quad (3.112)$$

a qual permite que se obtenha a pressão em qualquer ponto i do domínio.

CAPÍTULO 4:

MÉTODO NUMÉRICO

Este capítulo apresenta o método numérico utilizado para resolver o escoamento ao redor de corpos, fundamentado na utilização conjunta do Método de Vórtices e do Método dos Painéis e cuja modelagem matemática foi apresentada no capítulo anterior.

O Método de Vórtices é descrito em detalhes, apontando-se suas particularidades, vantagens e desvantagens com relação a outros métodos encontrados na literatura.

O Método dos Painéis por sua vez é abordado visando o detalhamento de seu equacionamento, tarefa que facilita o entendimento de seus princípios e torna sua implementação mais rápida e segura.

No que se refere à etapa convectiva do Método de Vórtices, é apresentado o método de aceleração de cálculo conhecido como Método de Expansão em Multipolos Adaptativo - MEMA, testado e utilizado neste trabalho.

Quanto à etapa difusiva do método de vórtices, são abordados os quatro métodos de simulação da difusão viscosa que foram implementados no presente trabalho: o Método do Avanço Randômico (MAR), o Método da Velocidade de Difusão (MVD), o Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Tais métodos são aplicados ao problema puramente difusivo do vórtice de Lamb, tendo em vista que a solução para este problema é conhecida, e, portanto, permite a validação desta implementação e a comparação entre estes métodos.

O processo de geração da vorticidade na superfície sólida é abordado de acordo com as metodologias encontradas freqüentemente na literatura, assim como também são apresentados esquemas de geração inéditos desenvolvidos durante a execução deste trabalho.

Este capítulo ainda fornece as equações discretizadas para a solução numérica, assim como os detalhes para a implementação e o algoritmo geral do método. A escolha dos parâmetros numéricos utilizados também é comentada, dando ênfase àqueles que apresentam maior influência no método.

4.1. Método dos Vórtices

4.1.1. Descrição geral

Diversos métodos numéricos vêm sendo utilizados para simular escoamentos regidos pelas equações da dinâmica dos fluidos. Contudo, os grandes desafios relacionados às não linearidades envolvidas nestes equacionamentos representam ainda enormes limitações para qualquer método encontrado na literatura. Nos métodos numéricos de natureza euleriana, deve-se levar em consideração ainda as dificuldades relacionadas às malhas auxiliares de cálculo, estabelecimento e satisfação de condições de contorno distantes e ainda difusão numérica.

Desta forma, o Método dos Vórtices se apresenta como uma excelente ferramenta numérica utilizada na modelagem de escoamentos internos e externos, a qual lança mão do referencial lagrangiano, livre de malhas auxiliares de cálculo, para simular a evolução da dinâmica do escoamento como um todo, a partir da evolução de uma nuvem de vórtices discretos.

O desenvolvimento do Método de Vórtices foi possível a partir da observação realizada por Helmholtz (1858), a qual permitiu afirmar que as linhas de vorticidade em um escoamento não viscoso permaneciam constituídas pelos mesmos elementos de fluido. Assim, a discretização do campo de vorticidade através de uma superposição de vórtices permite o cálculo da dinâmica do transporte da vorticidade no escoamento. Deste modo o escoamento é considerado irrotacional em todo o meio, com exceção dos pontos onde se encontram os vórtices.

A discretização do campo de vorticidade, necessária para se realizar o transporte da vorticidade no referencial lagrangeano, se realizada com vórtices pontuais, apresenta o inconveniente matemático de indução de um campo de velocidade singular nas proximidades dos vórtices discretos. Para contornar este problema, muitos modelos de vórtices têm sido empregados, como os vórtices de Rankine e de Lamb, apresentados no capítulo 3, os quais desingularizam o campo de vorticidade com a introdução de um núcleo para os vórtices.

Uma vez desingularizados, os vórtices compõem uma sub-região que deve representar a parte rotacional do escoamento. Para tanto, seus núcleos devem definir áreas que interceptem os núcleos dos vórtices vizinhos. O recobrimento do núcleo dos vórtices pela interseção de núcleos adjacentes é condição necessária para a convergência do método. De forma mais completa, a convergência do Método de Vórtices para a solução exata da Equação de Navier Stokes é garantida quando número de vórtices presentes na simulação tende a infinito, o raio do núcleo dos vórtices tendem a zero e a distância média entre os vórtices tende a zero ainda mais rapidamente (CLARKE & TUTTY, 1994).

Pode-se, deste modo, citar como vantagem do Método de Vórtices o fato deste ser um método numérico que dispensa a utilização de malhas auxiliares de cálculos e que, por isto, reduz o problema de difusão numérica. Sua aplicação à geometrias complexas é bastante fácil, o que o habilita a simular o escoamento externo ao redor de corpos com as mais diversas configurações, como corpos rombudos ou aerodinâmicos. Outra vantagem do Método de Vórtices é o fato deste satisfazer exata e implicitamente a condição de contorno no infinito, tendo em vista a natureza de decaimento das funções de base Gaussianas carregadas pelos vórtices.

Ainda como vantagem do Método de Vórtices, pode-se citar a grande facilidade de correlação entre a simulação e a física do fenômeno em questão, o que fornece ao pesquisador grande potencial para se fazer deduções lógicas e extrair observações diretamente dos resultados encontrados. Tal facilidade de correlação é justificada pelo Método dos Vórtices lidar diretamente com a grandeza de maior representatividade da dinâmica dos fluidos, que é a vorticidade, como citado por SARPKAYA (1994).

As particularidades do Método de Vórtices citadas anteriormente, quais sejam, a necessidade de recobrimento entre os núcleos dos vórtices, além de um grande número de vórtices para bem representar a região rotacional do escoamento, podem ser citadas como as principais desvantagens deste em relação a outros métodos numéricos utilizados na mecânica dos fluidos computacional.

4.1.2. Equacionamento e algoritmo do Método de Vórtices

Como dito anteriormente, o Método dos Vórtices é uma ferramenta numérica extremamente adequada para simular a dinâmica da vorticidade em escoamentos externos. O método utiliza uma nuvem de vórtices cujo campo de velocidade induzido é resultado da dinâmica do escoamento como um todo, e cuja evolução temporal se dá através do transporte convectivo e difusivo da vorticidade.

A equação de transporte de vorticidade, deduzida no capítulo 3, é por conveniência repetida aqui

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega, \quad (4.1)$$

cabendo lembrar que as hipóteses simplificadoras utilizadas na modelagem apresentada neste trabalho estão descritas no capítulo 3.

No caso de escoamento bidimensional não viscoso, o lado direito da Eq. (4.1) se torna nulo, reduzindo a equação de transporte da vorticidade à $\frac{D\omega}{Dt} = 0$, onde $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material. Esta formulação é a base e a origem ao Método dos Vórtices, para a qual uma abordagem lagrangeana baseada em elementos de vorticidade é natural e intuitiva, encontrando sucesso na simulação de fenômenos governados pela equação de Euler bidimensional.

O Método de Vórtices tem se desenvolvido a ponto de já ser possível realizar simulações tridimensionais, modelados pela inclusão do termo de esticamento e deformação das linhas de vorticidade (primeiro termo do lado direito da Eq. (4.1)). A representação de contornos internos foi possível a partir da utilização de folhas de vorticidade para o caso não viscoso, e a partir de modelos com geração de vorticidade por elementos de contorno para o caso viscoso.

A modelagem utilizada neste trabalho lança mão da Eq. (4.1) com a simplificação para o caso bidimensional, onde o primeiro termo do lado direito se torna nulo e o vetor vorticidade $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ se torna um escalar, uma vez que possui apenas o componente normal ao plano do escoamento não nulo, o que reduz a Eq. (4.1a)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (4.2)$$

Deste ponto em diante utiliza-se a técnica de solução seqüencial dos efeitos convectivo e difusivo presentes na Eq. (4.2), a qual foi desenvolvida inicialmente por Chorin (1973). Assim, ao invés de se resolver simultaneamente a convecção e a difusão da vorticidade, estes fenômenos são calculados seqüencialmente com a utilização da equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0, \quad (4.3)$$

para a convecção, e da equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega, \quad (4.4)$$

para a difusão.

A convecção é então calculada sem levar em consideração os efeitos viscosos, e a difusão é realizada sem considerar os efeitos convectivos, em um espaço de tempo discretizado. Assim é estabelecida a relação entre a representatividade do modelo escolhido para se simular estes fenômenos físicos e a discretização no tempo para sua solução, ou seja, quanto mais representativos e ricos forem os modelos de convecção e difusão utilizados, e quanto menor for o intervalo de tempo aplicado para esta solução seqüencial, melhores e mais acurados serão os resultados encontrados.

Visando a facilitar o entendimento geral do Método de Vórtices, em combinação com o Método dos Painéis para solução do escoamento potencial, um diagrama esquemático simplificado do algoritmo básico do método é apresentado na Fig. 4.1.

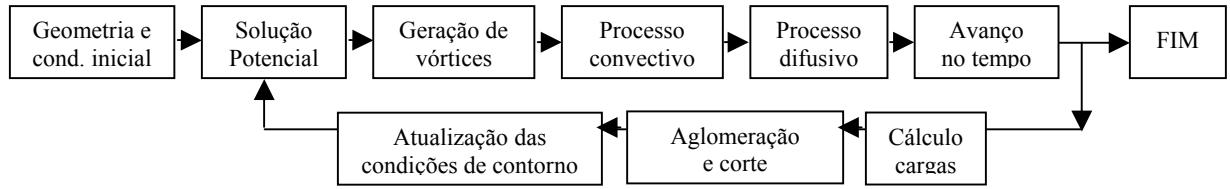


Figura 4.1 – Algoritmo esquemático do Método de Vórtices

As etapas do Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis mostradas no diagrama esquemático acima serão apresentadas nos itens seguintes.

4.2. Solução potencial – Método dos Painéis

Como visto no capítulo 3, o Método dos Painéis é uma particularização do Método dos Elementos de Contorno, quando este é utilizado para resolver escoamentos externos em corpos aerodinâmicos. Por este método é possível obter uma solução para equação de Laplace, a qual governa o fenômeno de escoamentos potenciais, aplicando-se singularidades em seus contornos sólidos.

Nesta seção é apresentado o modelo numérico do Método dos Painéis utilizado no presente trabalho, o qual foi desenvolvido a partir da modelagem matemática descrita no capítulo 3. São então fornecidas as equações que facilitam seu entendimento e permitem sua implementação.

A Eq. (3.30) é a equação integral para o caso bidimensional que permite calcular o escoamento a partir de informações do seu contorno. Tal equação é novamente escrita aqui por conveniência

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_c} \left(\sigma \ln r - \mu \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_s} \left(\mu \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dS + \phi_\infty(P), \quad (4.5)$$

onde $-\mu = \phi - \phi_i$ é definido como dipolo e $-\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n}$ como fonte, sendo $\mathbf{n}$ o vetor normal, com sentido positivo para o interior da superfície de controle. Fontes e dipolos são duas soluções elementares para a Eq. (3.27), as quais são definidas como

combinações de ϕ e $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ e serão melhor exploradas na seção seguinte. O termo da Eq. (4.5) relativo à distribuição de dipolos pode ser substituído por uma distribuição de vórtices.

Para satisfazer a Eq.(4.5), é possível abordar o problema estabelecendo soluções gerais para o caso de escoamento incompressível, ou seja, é possível se obter a solução de $\nabla^2\phi(r)=0$ distribuindo-se fontes e dipolos (ou vórtices) ao longo do contorno. Estas soluções são denominadas soluções elementares, e respeitam automaticamente a condição de contorno no infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla\phi(r,t)=1$ devido à natureza do decaimento de seus campos de velocidade induzidos r^{-k} , onde $k \geq 1$, ao passo que em $r \rightarrow 0$ a velocidade induzida é singular, razão pela qual estas soluções também são chamadas de soluções singulares.

A solução do meio envolve então a integração destas soluções elementares no contorno, uma vez que cada elemento estende seu efeito ao escoamento como um todo. Deste modo, o problema se reduz a encontrar a distribuição de funções apropriada de modo que a condição de contorno expressa pela Eq. (3.17a) seja satisfeita.

Especificando o valor do potencial $\phi(P)$ nos contornos obtém-se uma formulação conhecida como Formulação Indireta ou Problema de Dirichlet, ao passo que especificando-se velocidades induzidas nos contornos obtém-se a Formulação Direta ou Problema de Neumann. Independentemente do tipo de formulação escolhida, o problema quando resolvido numericamente se resume a um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são as intensidades das singularidades aplicadas nos contornos.

A seguir são exploradas tais soluções elementares, no sentido de se obter uma formulação em duas dimensões que seja útil para o método numérico utilizado neste trabalho.

4.2.1. Soluções elementares

A busca de soluções para a Eq. (3.27) em termos de combinações de ϕ e $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ conduz à utilização de fontes ($-\mu = \phi - \phi_i$) ou dipolos ($-\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial n} - \frac{\partial\phi_i}{\partial n}$), como foi visto no

capítulo 3. Estas soluções elementares permitem que se chegue à Eq. (3.28) para o caso tridimensional e Eq. (3.30) ou Eq. (4.5) para o caso bidimensional.

Como a equação de Laplace é uma equação diferencial de segunda ordem, pode-se obter também soluções baseadas em funções lineares polinomiais, no entanto, é mais desejado que se obtenha uma solução construída com elementos de singularidade do tipo fonte, dipolo ou vórtice, sendo que este último induz apenas o componente de velocidade tangencial, cuja magnitude decai de maneira similar ao decaimento da componente de velocidade radial induzido por uma fonte bidimensional. A intensidade do vórtice é então definida como Γ .

O problema em questão passa a ser determinar as intensidades μ , σ ou Γ que devem ser aplicadas nos contornos para se satisfazer a condição de contorno estabelecida pela Eq. (3.17a), uma vez que a condição de contorno da Eq. (3.17b) é automaticamente satisfeita pela característica de decaimento destas funções elementares, como será visto nas seções a seguir.

4.2.1.1. Fonte

Considerando que o escoamento potencial é irrotacional (vetor vorticidade nulo), e sendo $\mathbf{u}$ o vetor velocidade, em coordenadas polares, pode-se escrever

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r q_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (q_r) \right] = 0, \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{k}$ é o unitário normal ao plano do escoamento.

Uma vez que uma fonte possui, por definição, apenas a componente radial de velocidade, a Eq. (4.6) torna-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_r) = 0, \quad (4.7)$$

ou seja, $q_r = q_r(r)$, devendo ainda satisfazer a equação da continuidade, que em coordenadas cilíndricas é escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{dq_r}{dr} + \frac{q_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rq_r) = 0, \quad (4.8)$$

o que indica que $rq_r = \text{cte}$.

Definindo-se σ como o fluxo volumétrico (vazão volumétrica) através de uma circunferência de raio r , chega-se a $rq_r = \frac{\sigma}{2\pi}$.

Assim, como $\mathbf{u} = \nabla \phi$, as componentes de velocidade induzidas por uma fonte são

$$q_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\pi r}, \quad (4.9)$$

$$q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0. \quad (4.10)$$

Integrando a Eq. (4.9) obtém-se o potencial de velocidade induzido por uma fonte pontual

$$\phi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r + C, \quad (4.11)$$

onde C é arbitrado como zero.

Deste modo, o potencial de velocidade induzido por uma fonte gera um campo de velocidade que possui apenas a componente de velocidade radial, a qual decai de acordo com $1/r$, o que, como dito anteriormente, satisfaz automaticamente a condição de contorno descrita pela Eq. (3.17b). Como a velocidade induzida em $r \rightarrow 0$ tende a infinito, este ponto deve ser retirado da região de solução.

Em coordenadas cartesianas, o potencial de velocidade induzido por uma fonte pontual com centro em (x_0, y_0) é

$$\phi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad (4.12)$$

enquanto que as componentes de velocidade induzidas são

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad (4.13)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (4.14)$$

As Eqs. (4.13) e (4.14) permitem que se avalie o campo de velocidade induzido por uma fonte pontual localizada em (x_0, y_0) . Deste modo, a determinação de sua intensidade σ é feita ao se impor a condição de contorno descrita pela Eq. (3.17a).

4.2.1.2. Dipolo

Um dipolo pode ser obtido fazendo-se aproximar uma fonte de um sumidouro, de modo que as suas intensidades, multiplicadas pela distância que os separam, se tornem a constante μ , como será visto a seguir.

Da Eq. (3.28) pode-se retirar a contribuição do dipolo ao potencial de velocidade

$$\phi = \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.15)$$

Ainda da Eq. (3.28) pode-se notar que o potencial induzido pelo dipolo mantém a seguinte relação com o potencial induzido pela fonte

$$\phi_{\text{Dipolo}} = -\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)\phi_{\text{Fonte}}. \quad (4.16)$$

Esta percepção permite pressupor a possibilidade de que um dipolo seja desenvolvido a partir de uma fonte e um sumidouro. Assim, considerando um sumidouro e uma fonte separados por uma distância L , o potencial induzido em um ponto P cuja distância à origem é r , pode ser escrito como

$$\phi(P) = \frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-L} \right). \quad (4.17)$$

Fazendo $L \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$ e $\sigma L \rightarrow \infty$, e aplicando ainda a Eq. (4.16) na Eq. (4.17), esta última, que descreve o potencial induzido no ponto P por uma fonte e um sumidouro distantes entre si de L , passa a descrever o potencial induzido no mesmo ponto P por um dipolo, escrito em coordenadas polares como se segue

$$\phi(P) = -\frac{\mu \cos \theta}{4\pi r^2}. \quad (4.18)$$

Para o caso bidimensional a Eq (4.18) pode ser reescrita como

$$\phi(r, \theta) = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r}. \quad (4.19)$$

Assim, as componentes de velocidade induzidas por um dipolo em coordenadas polares são

$$q_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2}, \quad (4.20)$$

$$q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2}. \quad (4.21)$$

Em coordenadas cartesianas, o potencial de velocidade induzido por um dipolo pontual com centro em (x_0, y_0) , alinhado com o eixo x e apontando na direção positiva de x , é escrito como

$$\phi(x, y) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad (4.22)$$

ao passo que as componentes de velocidade induzidas em coordenadas cartesianas são

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\mu}{\pi} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^2}, \quad (4.23)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^2}. \quad (4.24)$$

4.2.1.3. Vórtice

Apesar da solução geral da Eq. (4.5) contemplar apenas distribuição de Fontes e Dipolos, definidos anteriormente, é possível utilizar outro tipo de solução elementar baseada no potencial de velocidade induzido por um vórtice potencial ou pontual, o que para o caso de três dimensões se baseia na Lei de Biot-Savart.

Em duas dimensões pode-se então utilizar um elemento de singularidade que induza apenas a componente tangencial de velocidade, cujo decaimento seja similar ao decaimento da componente radial de uma fonte,

$$q_r = 0, \quad (4.25)$$

$$q_\theta = q_\theta(r, \theta). \quad (4.26)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.25) e. (4.26) na equação da continuidade chega-se a

$$q_\theta = q_\theta(r). \quad (4.27)$$

Tomando-se o rotacional de $\mathbf{u}$

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rq_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(q_r) \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq_\theta) = 0. \quad (4.28)$$

Integrando em $\mathbf{r}$

$$rq_\theta = \text{cte} = A. \quad (4.29)$$

Deste modo, pode-se observar que a velocidade tangencial induzida por um vórtice potencial varia com $1/r$, de maneira similar à velocidade radial induzida por uma fonte.

Para a determinação da constante A utiliza-se a definição de circulação abaixo, com sentido positivo sendo o sentido horário

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2\pi}^0 q_\theta \cdot r d\theta = -2\pi A. \quad (4.30)$$

Assim, da Eq. (4.30) e da Eq. (4.29)

$$q_\theta(r) = \frac{-\Gamma}{2\pi r}. \quad (4.31)$$

O potencial de velocidade induzido em um ponto P por um vórtice pontual localizado na origem pode ser obtido integrando-se a Eq. (4.31)

$$\phi(P) = \int q_\theta r d\theta + C. \quad (4.32)$$

onde C pode ser arbitrado como zero.

Uma importante observação é feita ao se analisar o ponto em que a vorticidade é aplicada, ou seja, o vórtice pontual. Integrando ao longo de uma curva que passa por este ponto, a vorticidade estará concentrada apenas nele, obtendo-se um valor finito para a circulação. No entanto, a circulação será zero em qualquer outra curva fechada do domínio que não contenha o vórtice pontual. Assim, o vórtice é uma solução da equação de Laplace, pois induz um escoamento irrotacional, com exceção do ponto onde este é aplicado.

As equações para o potencial de velocidade e para as componentes de velocidade induzidas por um vórtice potencial localizado em (x_0, y_0) são respectivamente, em coordenadas cartesianas

$$\phi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-y_0}{x-x_0}, \quad (4.33)$$

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \text{ e} \quad (4.34)$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (4.35)$$

No caso de folha de vorticidade bidimensional, localizada entre os pontos x_1 e x_2 , com vorticidade por unidade de comprimento $\gamma(x)$, tem-se

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \tan^{-1} \frac{y-y_0}{x-x_0} dx, \quad (4.36)$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dx, \quad (4.37)$$

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dx. \quad (4.38)$$

4.2.2. Implementação numérica

A eficiência do Método dos Painéis está intimamente relacionada com a escolha do tipo de singularidade, ou seja, fontes, dipolos ou vórtices, assim como mantém elevada dependência das funções de distribuição destas singularidades na superfície do corpo, as quais podem assumir forma constante, linear ou até de ordens superiores.

Outro fator determinante para uma modelagem representativa é a discretização da geometria, ou seja, pode-se discretizar o corpo utilizando painéis formados por segmentos de reta, ou por painéis curvos que garantam a continuidade da derivada da geometria entre os painéis.

PEREIRA (2005) descreve detalhadamente a utilização do método dos painéis de ordem superior para aplicação em aerofólios. O autor estabelece comparações entre resultados obtidos com distribuições constantes, lineares e quadráticas, discretizando a geometria do aerofólio com painéis retos e curvos. Após extensa análise dos resultados, PEREIRA (2005) chega à conclusão de que, para o caso do estudo do escoamento potencial em torno de aerofólios, uma excelente relação custo computacional e acurácia dos resultados é alcançada utilizando-se uma distribuição linear de vorticidade combinada com a utilização de painéis curvos.

Deste modo, este trabalho discretiza o corpo em N painéis (Fig. 4.2), sobre os quais são distribuídos elementos de vorticidade com variação linear (Fig. 4.3b), e são posicionados pontos de controle onde é satisfeita a condição de contorno descrita pela Eq. (3.17a). Os pontos nodais representam os pontos extremos de cada painel.

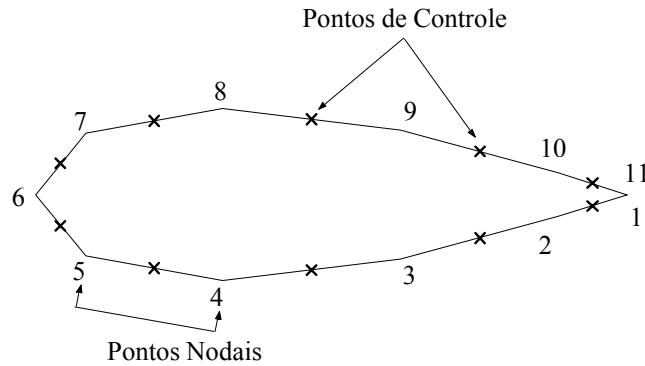


Figura 4.2 – Aerofólio discretizado

A Fig. 4.3 permite observar as diferenças entre as distribuições constante e linear das singularidades nos painéis. Pode-se notar que não existe continuidade nas intensidades destas distribuições no caso constante (Fig. 4.3 a), enquanto uma melhor representação é obtida na distribuição linear (Fig. 4.3 b), onde a continuidade da intensidade é mantida nos pontos nodais (extremos de cada painel). Neste trabalho é utilizada a distribuição linear de vorticidade ao longo de cada painel, a qual é obtida somando-se a distribuição constante à parcela relativa apenas à variação linear, conforme será visto adiante.

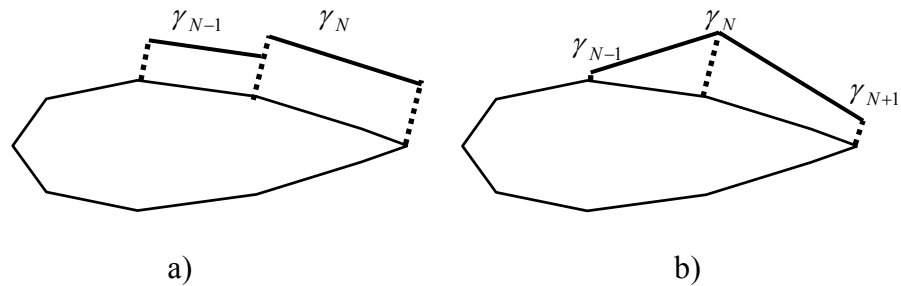


Figura 4.3 – Singularidade: a) constante; b) linear

A implementação numérica do Método dos Painéis requer a utilização de um sistema de coordenadas local para cada painel e de um sistema de coordenadas global, os quais podem ser vistos na Fig. 4.4, onde β_i é o ângulo entre o painel i e o sistema global, medido no sentido horário.

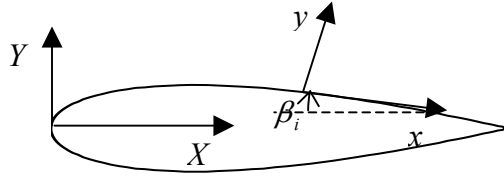


Figura 4.4. Sistema de coordenadas global e de painel

A relação entre estes sistemas é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & -\sin \beta_i \\ \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_l \\ Y - Y_l \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

onde x e y são as coordenadas no sistema local do painel, referentes a um ponto de coordenadas globais X e Y , sendo X_l e Y_l as coordenadas da origem do sistema do painel no sistema global.

4.2.2.1. Distribuição de vorticidade constante

Apesar deste trabalho utilizar uma distribuição linear de vorticidade ao longo dos painéis, é necessário obter inicialmente o equacionamento para o caso de distribuição constante de vorticidade, o que é feito a seguir.

Discretizando-se o corpo em N painéis, com distribuição constante de singularidade, tomando-se o gradiente da Eq. (4.5) e o substituindo na Eq (3.17a) chega-se à

$$\left\{ \sum_{j=1}^N \sigma_j A_j + \sum_{j=1}^N \mu_j B_j \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}, \quad (4.40)$$

onde os coeficientes A_j e B_j são denominados coeficientes de influência e dependem apenas da geometria do corpo discretizado. Deve-se notar que a esteira não foi discretizada, razão pela qual a segunda integral da Eq. (4.5) é retirada da solução potencial, devendo ser modelada pela nuvem de vórtices discretos, a qual permitirá o acoplamento entre o Método dos Painéis e o Método de Vórtices.

Conforme dito anteriormente, uma distribuição de vorticidade é uma solução elementar que possui um tratamento semelhante ao de uma fonte. Portanto a Eq. (4.40), escrita para uma distribuição de vorticidade constante ao longo do painel, toma a forma

$$\left\{ \sum_{j=1}^N \gamma_j A_j \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_{\infty} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.41)$$

onde

$$\mathbf{n} = (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), \quad (4.42)$$

e β_i é o ângulo do painel conforme a Fig. 4.4.

Na Eq. (4.41), ϕ_{∞} é o potencial de velocidade do escoamento incidente, ou seja,

$$\nabla \phi_{\infty} = U_{\infty} X + V_{\infty} Y, \quad (4.43)$$

onde,

$$U_{\infty} = U_{\infty} \cos \alpha \text{ e} \quad (4.44)$$

$$V_{\infty} = U_{\infty} \sin \alpha, \quad (4.45)$$

e α é o ângulo de ataque, conforme Fig. 3.1.

O campo de velocidade induzido por uma distribuição constante de vorticidade é obtido realizando-se a integral das Eq. (4.37) e Eq. (4.38), onde $\Gamma(x)$ é constante, o que leva à

$$u_{p_j} = \frac{\gamma_j}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (4.46)$$

$$v_{p_j} = \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (4.47)$$

que são as componentes da velocidade induzida pelo painel j no ponto (x,y) , cujos pontos nodais são x_1 e x_2 , no sistema de coordenadas de painel, de acordo com a Fig.4.5.

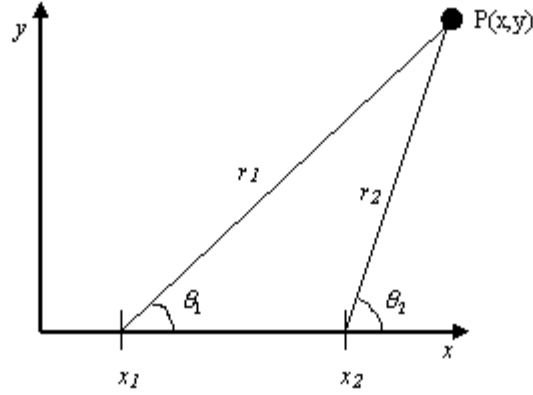


Figura 4.5 – Variáveis do sistema de coordenadas de painel

Pode-se escrever na forma matricial o sistema de equações formado pelos N painéis da Eq. (4.41), para distribuição constante de vorticidade, como se segue

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,N-1} & A_{1,N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,N-1} & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ A_{N,1} & A_{N,2} & & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

O sistema formado por (4.48) tem N equações e N incógnitas, porém, em situações que se deseja resolver o escoamento potencial com distribuição constante de vorticidade, deve-se adicionar ainda a condição de Kutta, obtendo-se um sistema com $N+1$ equações e N incógnitas, que pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados.

O sistema da Eq. (4.48) não será resolvido neste trabalho, uma vez que será utilizada uma distribuição linear de vorticidade conforme a próxima seção. A matriz A do sistema

(4.48) é chamada de matriz de influência e depende apenas da geometria do corpo, ao passo que o termo independente b refere-se ao escoamento incidente e à nuvem de vórtices.

Ainda com relação ao sistema (4.48) deve-se observar que cada linha representa a satisfação da condição de contorno de não-penetração, descrita pela Eq. (3.17a) para cada painel, em seu ponto de controle, ou seja, cada linha i representa a equação que iguala a influência de todos os painéis j ao escoamento incidente, no sistema de coordenada global. Por este motivo, a característica principal da matriz de influência A é ser diagonal dominante, ou seja, ter os maiores valores numéricos em sua diagonal principal, uma vez que a influência de um painel sobre si mesmo (coeficientes A_{ii}) é consideravelmente maior do que a influência deste sobre qualquer outro. O cálculo dos termos da diagonal principal da matriz A deve ser feito tomando-se o cuidado para manter o painel fora do domínio, ou seja, deve-se obter A_{ii} igual à 0,5, fazendo-se $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ na Eq. (4.46) quando $i=j$.

Na montagem da matriz de influência A , os coeficientes A_{ij} correspondem à influência do painel j sobre o ponto de controle i no que se refere apenas à geometria. Tais coeficientes são inicialmente calculados no sistema de coordenada do painel j , fazendo-se $\gamma_j = 1$ nas Eqs. (4.46) e (4.47), sendo posteriormente transferidos para o sistema global de acordo com

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i \\ -\sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p_j} \\ v_{p_j} \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

e, por último, sendo projetados na direção normal ao painel i de acordo com

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), \quad (4.50)$$

relembrando que β_i é o ângulo do painel i medido no sentido horário, de acordo com a Fig. 4.4.

O vetor independente b_i é calculado projetando-se o escoamento incidente na direção normal à cada painel i , como se segue

$$b_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i) = -Q_\infty \sin(\alpha + \beta_i), \quad (4.51)$$

onde α é o ângulo de ataque, conforme a Fig. 3.1, e β_i é o ângulo do painel, conforme a Fig. 4.4.

4.2.2.2. Distribuição de vorticidade linear

No caso de distribuição linear de vorticidade, a influência que cada painel exerce sobre os demais e sobre o escoamento depende dos valores das singularidades nos extremos do painel. Deste modo, a Eq. (4.41) assume a forma

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (\gamma_j A_j + \gamma_{j+1} A'_j) \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}. \quad (4.52)$$

O campo de velocidade induzido por uma distribuição linear de vorticidade pode ser obtido superpondo-se os efeitos de uma distribuição constante com os de uma distribuição linear pura ($\gamma = 0$ em $x = x_1$), conforme a Fig. 4.6.

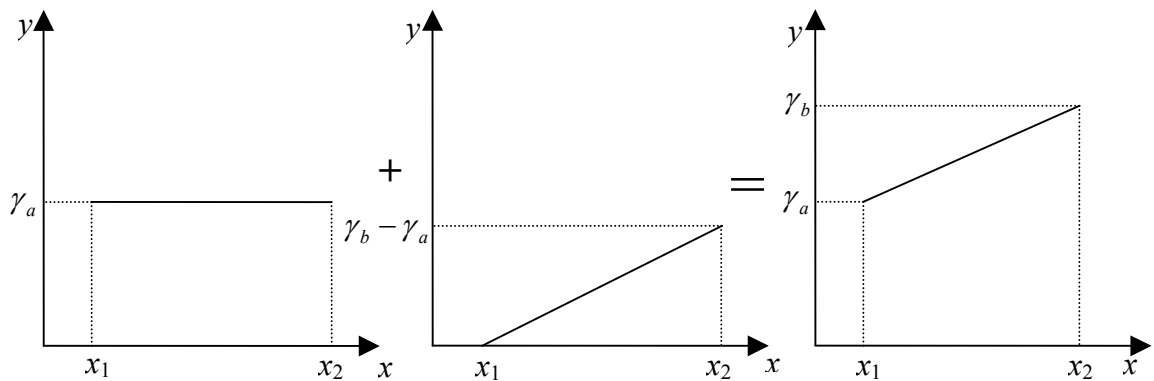


Figura 4.6 – Superposição da distribuição de vorticidade constante com a linear pura

O campo de velocidade induzido pelo painel j apenas por uma distribuição linear pura é obtido realizando-se a integral das Eqs. (4.37) e (4.38), o que fornece

$$u_{pj} = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.53)$$

$$v_{pj} = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x_1) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (4.54)$$

As Eqs. (4.53) e (4.54) são as componentes da velocidade induzida pelo painel j no ponto (x, y) , cujos pontos nodais são x_1 e x_2 , no sistema de coordenadas de painel, de acordo com a Fig.4.5.

Considerando-se a superposição de efeitos da distribuição de vorticidade constante, com a distribuição linear pura sobre o painel j , somam-se respectivamente as Eq. (4.46) e (4.47) às Eq. (4.53) e Eq. (4.54), obtendo-se finalmente as equações de velocidades induzidas por painéis com distribuição linear de vorticidade, em função das vorticidades dos pontos nodais $\gamma(x_1) = \gamma_a$ e $\gamma(x_2) = \gamma_b$, ou seja,

$$u_{pj} = \frac{\gamma_a}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.55)$$

$$v_{pj} = \frac{\gamma_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x_1) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (4.56)$$

Para montar a matriz de influência do caso da distribuição linear de vorticidade é necessário calcular as velocidades induzidas por cada painel j sobre cada ponto de controle i . Essas velocidades dependem da intensidade da vorticidade nas extremidades de cada painel j quando a distribuição de vorticidade é linear, conforme estabelecido na Eq. (4.52). Como cada intensidade na extremidade de cada painel contribui para a indução de velocidade dos painéis adjacentes, a matriz de influência será formada por uma combinação linear das influências das geometrias dos painéis, conforme exemplificado a seguir.

Colocando-se em evidência os termos que dependem de γ_a e γ_b nas Eq. (4.55) e Eq. (4.56) é possível decompor a velocidade induzida pelo painel j , na parte que depende de γ_a e na parte que depende de γ_b , como se segue

$$u_{p_j}^a = \frac{\gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x)(\theta_2 - \theta_1) - y \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.57a)$$

$$u_{p_j}^b = \frac{\gamma_b}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.57b)$$

$$v_{p_j}^a = \frac{\gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[-x_2 + y(\theta_2 - \theta_1) + (x_2 - x) \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.58a)$$

$$v_{p_j}^b = \frac{\gamma_b}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x_1) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (4.58b)$$

Assim sendo, as componentes da velocidade total induzida por um painel j sobre o ponto de controle de um painel i são, no sistema de coordenadas do painel j ,

$$\begin{pmatrix} u_{p_j} \\ v_{p_j} \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^a \\ \hat{v}_{p_j}^a \end{pmatrix}_{ij} \gamma_j + \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^b \\ \hat{v}_{p_j}^b \end{pmatrix}_{ij} \gamma_{j+1}, \quad (4.59)$$

as quais, passadas para o sistema de coordenadas global pela Eq. (4.49), tomam a forma

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^a \\ \hat{v}_{p_j}^a \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \gamma_j \quad (4.60)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^b \\ \hat{v}_{p_j}^b \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \gamma_{j+1} \quad (4.61)$$

onde a simbologia ($\hat{\cdot}$) é utilizada para designar a velocidade induzida por um painel com vorticidade unitária, ou seja, com $\gamma_a = \gamma_b = 1$. Este procedimento facilita o cálculo dos coeficientes de influência, como exemplificado a seguir.

A velocidade induzida no primeiro ponto de controle, por exemplo, é, no sistema de coordenada global,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{11} \gamma_1 + \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{11} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{12} \right] \gamma_2 + \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{12} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{13} \right] \gamma_3 + \dots + \\ + \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{1,N-1} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{1N} \right] \gamma_N + \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{1N} \gamma_{N+1} \quad (4.62)$$

A equação (4.62) pode, portanto, ser generalizada na forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{i1} \gamma_1 + \sum_{j=2}^N \left\{ \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{i,j-1} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} \right] \gamma_j \right\} + \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{iN} \gamma_{N+1}, \quad (4.63)$$

já no sistema de coordenadas global.

Pela condição de contorno descrita pela Eq. (4.52), esta velocidade induzida, quando adicionada à velocidade induzida pelo escoamento incidente e projetada na direção normal ao painel, deve ser nula para cada ponto de controle, gerando, assim, N equações tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_i \mathbf{n}_i = -\mathbf{U}_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{n}_i, \quad i = (1, 2, \dots, N). \quad (4.64)$$

onde $\mathbf{n}_i$ é dado pela Eq. (4.42).

Deste modo, para a montagem da matriz de influência, o primeiro elemento de cada linha i será,

$$a_{i1} = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{i1} \cdot \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{i1} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), i = (1, 2, \dots, N), j=1, \quad (4.65)$$

enquanto o último elemento de cada linha i será

$$a_{iN+1} = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{iN} \cdot \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{iN} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), i = (1, 2, \dots, N), j=N+1, \quad (4.66)$$

já projetados na direção normal do painel i de acordo com a Eq. (4.52).

Os demais elementos da matriz de influência serão,

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{i,j-1} \cdot \mathbf{n}_i + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{i,j-1} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i) + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), i = (1, 2, \dots, N), j = (2, \dots, N), \quad (4.67)$$

já projetados na direção normal do painel i de acordo com a Eq. (4.52).

Por sua vez, o termo independente se torna

$$b_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{n}_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), i = (1, 2, \dots, N), \quad (4.68)$$

onde α é o ângulo de ataque, conforme a Fig. 3.1, e β_i é o ângulo do painel, conforme a Fig. 4.4.

A utilização de distribuição linear de vorticidade conduz a um sistema de $N+1$ incógnitas com N equações. A simulação de escoamentos potenciais permanentes permite introduzir neste sistema a condição de Kutta, expressa pela equação $\gamma_1 + \gamma_{N+1} = 0$, o que não é o caso do escoamento em estudo.

Neste trabalho busca-se simular a evolução temporal do escoamento, a partir de uma condição inicial de repouso. Deste modo, deve-se lançar mão da condição de conservação

da circulação, a qual satisfaz o teorema de Kelvin. No instante inicial, quando o escoamento ainda está em repouso

$$\int_{Corpo} \gamma ds + \Gamma_{Esteira} = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta \ell_j + \sum_{k=1}^M \Gamma_k = 0, \quad (4.69)$$

e, como não há vórtices na esteira

$$\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta \ell_j = 0. \quad (4.70)$$

Utilizando ainda a condição de conservação de circulação descrita acima, chega-se a um sistema de $N+1$ equações algébricas lineares com $N+1$ incógnitas γ_j . Deste modo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ \Delta \ell_1/2 & (\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2)/2 & \cdots & (\Delta \ell_{N-1} + \Delta \ell_N)/2 & \Delta \ell_N/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Este sistema pode ser resolvido por técnicas tradicionais de solução de sistemas lineares. A matriz a_{ij} não necessita de tratamento especial para a sua inversão por ser diagonal dominante.

4.2.2.3. Painéis curvos

A metodologia que utiliza a discretização do corpo através de painéis curvos insere no modelo um refinamento espacial altamente desejado. Tal melhoria trabalha no sentido de fornecer à simulação um campo de velocidade sem descontinuidades nas proximidades dos nós. Desse modo, a inclusão de painéis com curvatura é altamente benéfica, não só para a solução potencial do escoamento, mas também para toda a dinâmica da simulação, onde a

presença do corpo é avaliada pela indução de velocidade dos painéis sobre os vórtices, os quais, ao cruzarem a região próxima aos nós, não sofrerão os efeitos de descontinuidades produzidas pelos painéis retos.

Como na maioria dos casos não se dispõe da função $y = f(x)$ que descreve a geometria do corpo, a avaliação analítica da sua derivada não é possível. Para tanto, PEREIRA (2005) sugere que se trabalhe com a média dos ângulos dos painéis, conforme Fig. 4.7.

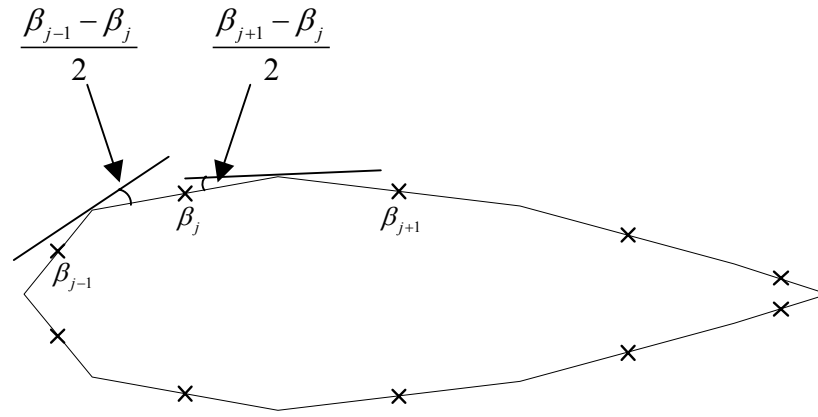


Figura 4.7 – Ângulos da tangente à curvatura (PEREIRA - 2005)

Deve-se atentar que β_{j-1} e β_j são os ângulos dos painéis $j-1$ e j , medidos no sistema global, ao passo que $\frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{2}$ e $\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{2}$ são os ângulos das tangentes ao painel curvo j , medidos no sistema local do painel j .

Nos casos em que a função $y = f(x)$ é conhecida, os ângulos que definem a curvatura da geometria do corpo nos nós podem ser calculados analiticamente. Neste trabalho, para descrever a geometria do corpo utiliza-se uma função polinomial de terceiro grau do tipo

$$\eta(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d. \quad (4.72)$$

Impondo-se a continuidade desta função e de sua derivada nos nós,

$$\eta(0) = 0, \quad (4.73)$$

$$\eta(\Delta\ell) = 0, \quad (4.74)$$

$$\frac{d\eta(0)}{dx_0} = \tan\left(\frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{2}\right) \equiv \delta_1, \quad (4.75)$$

$$\frac{d\eta(\Delta\ell)}{dx_0} = \tan\left(\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{2}\right) \equiv \delta_2, \quad (4.76)$$

pode-se determinar as constantes a , b , c e d , onde $\Delta\ell$ é o comprimento do painel j .

Deve-se atentar que $\delta_1 \equiv 0$ para o painel 1, ao passo que $\delta_2 \equiv 0$ para o painel N . Substituindo as Eqs. (4.73), (4.74), (4.75) e (4.76) na Eq. (4.72), chega-se a

$$\eta(x_0) = \Delta\ell \left[(\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0^3}{\Delta\ell^3} - (2\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0^2}{\Delta\ell^2} + \delta_1 \frac{x_0}{\Delta\ell} \right]. \quad (4.77)$$

Derivando a Eq. (4.77) em função de x_0 obtém-se,

$$\frac{d\eta}{dx_0}(x_0) = 3(\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0^2}{\Delta\ell^2} - 2(2\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0}{\Delta\ell} + \delta_1. \quad (4.78)$$

Fazendo-se $\xi \equiv x_0/\Delta\ell$ as Eqs. (4.77) e (4.78) são reescritas respectivamente como

$$\eta(\xi\Delta\ell) \equiv \eta^*(\xi) = \Delta\ell \left[(\delta_1 + \delta_2) \xi^3 - (2\delta_1 + \delta_2) \xi^2 + \delta_1 \xi \right] \text{ e} \quad (4.79)$$

$$\frac{d\eta^*}{d\xi}(\xi) = \frac{d\eta}{dx_0}(\xi\Delta\ell) = 3(\delta_1 + \delta_2) \xi^2 - 2(2\delta_1 + \delta_2) \xi + \delta_1. \quad (4.80)$$

Ainda segundo PEREIRA (2005), faz-se necessário reavaliar os vetores normal e tangente ao longo do painel curvo. Assim, em um ponto $\xi[0,1]$ do painel, tem-se

$$\mathbf{n}_i = \left\{ -\sin \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(\xi) \right) \right], \cos \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(\xi) \right) \right] \right\} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{t}_i = \left\{ \cos \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(\xi) \right) \right], \sin \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(\xi) \right) \right] \right\} \quad (4.82)$$

Por último, para a avaliação da velocidade induzida por um painel com curvatura, com distribuição linear de vorticidade do tipo $\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x$, deve-se substituir a Eq. (4.77) nas Eqs. (4.37) e (4.38), fazendo ainda $x_1 = 0$ e $x_2 = \Delta\ell$. Deste modo chega-se a

$$u_c = \frac{\gamma_0 \Delta\ell}{2\pi} \int_0^1 \frac{(y - \eta^*(\xi))}{(x - \xi\Delta\ell)^2 + (y - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (4.83a)$$

$$u_\ell = \frac{\gamma_1 \Delta\ell^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{(y - \eta^*(\xi))}{(x - \xi\Delta\ell)^2 + (y - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (4.83b)$$

$$v_c = -\frac{\gamma_0 \Delta\ell}{2\pi} \int_0^1 \frac{x - \xi\Delta\ell}{(x - \xi\Delta\ell)^2 + (y - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (4.84a)$$

$$v_\ell = -\frac{\gamma_1 \Delta\ell^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{x - \xi\Delta\ell}{(x - \xi\Delta\ell)^2 + (y - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (4.84b)$$

onde c e ℓ são os índices relativos às partes constante e linear.

As integrais das Eqs. (4.83) e (4.84) devem ser resolvidas numericamente. Neste trabalho esta integração foi realizada pelo esquema adaptativo de Gauss-Konrad, através da utilização da subrotina DQ2AG da IMSL.

As equações que satisfazem à condição de contorno em cada ponto de controle podem ser escritas utilizando as Eqs. (4.83) e (4.84). Porém, para N pontos de controle, chega-se a

um sistema com $2N$ incógnitas (γ_0 e γ_1 para cada painel i) e N equações (uma para cada ponto de controle), como é mostrado a seguir para o ponto de controle i

$$c_{i1}\gamma_{01} + \ell_{i1}\gamma_{11} + c_{i2}\gamma_{02} + \ell_{i2}\gamma_{12} + \dots + c_{iN-1}\gamma_{0N-1} + \ell_{iN-1}\gamma_{1N-1} + c_{iN}\gamma_{0N} + \ell_{iN}\gamma_{1N} = b_i, \quad (4.85)$$

onde c_{i1} e ℓ_{i1} são os coeficientes de influência relativos às partes constante e linear, obtidos respectivamente fazendo-se $\gamma_0 = 1$ e $\gamma_1 = 1$ nas Eqs. (4.83a), (4.83b), (4.84a) e (4.84b), projetadas na direção da condição de contorno que se deseja satisfazer, ou seja, impenetrabilidade ou não-deslizamento.

Para reduzir a ordem do sistema para $N+1$ incógnitas, admite-se a continuidade na distribuição das singularidades ao longo dos painéis, de acordo com a equação

$$\gamma_{0j} + \gamma_{1j}\Delta\ell_j = \gamma_{0j+1}. \quad (4.86)$$

No caso de painéis curvos, a matriz de influência a_{ij} é diferente daquela referente à painéis retos do sistema (4.71). Para sua montagem, deve-se combinar os coeficientes de influência c e ℓ de acordo com a regra de formação mostrada por PEREIRA (2005), que é apresentada a seguir para um corpo discretizado por 4 painéis, a partir da equação escrita para o ponto de controle i

$$c_{i1}\gamma_{01} + \ell_{i1}\gamma_{11} + c_{i2}\gamma_{02} + \ell_{i2}\gamma_{12} + c_{i3}\gamma_{03} + \ell_{i3}\gamma_{13} + c_{i4}\gamma_{04} + \ell_{i4}\gamma_{14} = b_i. \quad (4.87)$$

Substituindo a Eq. (4.86) com $1 \leq j \leq 3$ na Eq. (4.87) chega-se a

$$\left(c_{i1} - \frac{\ell_{i1}}{\Delta\ell_1} \right) \gamma_{01} + \left(c_{i2} + \frac{\ell_{i1}}{\Delta\ell_1} - \frac{\ell_{i2}}{\Delta\ell_2} \right) \gamma_{02} + \left(c_{i3} + \frac{\ell_{i2}}{\Delta\ell_2} - \frac{\ell_{i3}}{\Delta\ell_3} \right) \gamma_{03} + \left(c_{i4} + \frac{\ell_{i3}}{\Delta\ell_3} \right) \gamma_{04} + \ell_{i4}\gamma_{14} = b_i, \quad (4.88)$$

o que permite generalizar a lei de formação para os coeficientes de influência a_{ij} , como se segue.

$$a_{i1} = \left(c_{i1} - \frac{\ell_{i1}}{\Delta \ell_1} \right) \quad (4.89)$$

$$a_{ij} = \left(c_{ij} + \frac{\ell_{ij-1}}{\Delta \ell_{j-1}} - \frac{\ell_{ij}}{\Delta \ell_j} \right), \text{ para } 2 \leq j \leq N-1 \quad (4.90)$$

$$a_{iN} = \left(c_{iN} + \frac{\ell_{iN-1}}{\Delta \ell_{N-1}} \right) \quad (4.91)$$

$$a_{iN+1} = \ell_{iN} \quad (4.92)$$

Reescrevendo a condição de conservação de circulação (Eq. 4.70) com os índices de painéis curvos,

$$\frac{\Delta \ell_1}{2} \gamma_{01} + \frac{(\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2)}{2} \gamma_{02} + \dots + \frac{(\Delta \ell_{N-1} + \Delta \ell_N)}{2} \gamma_{0N} + \frac{\Delta \ell_N}{2} \gamma_{0N+1} = 0, \quad (4.93)$$

e fazendo $\gamma_{0N+1} = \gamma_{0N} + \gamma_{1N} \Delta \ell_N$ na Eq. (4.93), uma vez que γ_{0N+1} não é incógnita do sistema de painéis curvos, como pode ser visto na Eq. (4.88), chega-se a

$$\frac{\Delta \ell_1}{2} \gamma_{01} + \frac{(\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2)}{2} \gamma_{02} + \dots + \left(\frac{\Delta \ell_{N-1}}{2} + \Delta \ell_N \right) \gamma_{0N} + \frac{(\Delta \ell_N)^2}{2} \gamma_{1N} = 0, \quad (4.94)$$

o que permite colocar o sistema na forma matricial como se segue.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ \Delta\ell_1/2 & (\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2)/2 & \cdots & (\Delta\ell_{N-1}/2 + \Delta\ell_N) & (\Delta\ell_N)^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \vdots \\ \gamma_{0N} \\ \gamma_{1N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

Deve-se atentar para o fato de que as incógnitas no sistema (4.95) são a vorticidade nos nós, do mesmo modo que no sistema (4.71), com exceção de γ_{1N} . Deve-se recorrer então a Eq. (4.86) para obter γ_{0N+1} .

A Fig. 4.8 a e Fig. 4.8 b mostram as trajetórias de um vórtice nas proximidades de dois cilindros, que utilizam respectivamente oito painéis retos e oito painéis curvos apenas.

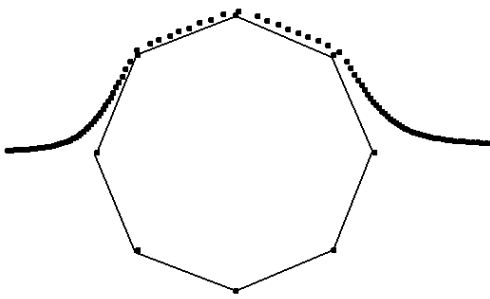


Figura 4.8 a – Trajetória de um vórtice em um cilindro com painéis retos

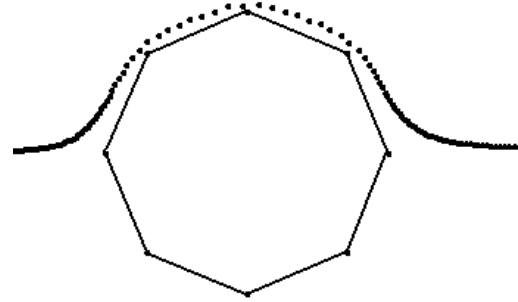


Figura 4.8 b – Trajetória de um vórtice em um cilindro com painéis curvos

Pode-se observar uma melhor representação da geometria do cilindro na Fig. 4.8 b, a qual é resultado de uma simulação que utiliza apenas oito painéis curvos, quando comparada à Fig. 4.8 a, discretizada por oito painéis retos. Conclui-se que o campo de velocidade resultante da utilização de painéis curvos é mais suave e contínuo, sobretudo nas proximidades dos pontos nodais.

4.3. Condição de contorno - utilização simultânea de painéis e vórtices

A solução numérica descrita anteriormente para o escoamento potencial ao redor de um corpo, busca encontrar a vorticidade sobre os painéis, satisfazendo-se a condição de contorno estabelecida pela Eq. (3.17a), o que é feito tradicionalmente resolvendo-se o sistema representado por (4.48), para o caso de distribuição de vorticidade constante ao longo de cada painel reto, ou por (4.71), para o caso de distribuição linear de vorticidade em painéis retos e, por último, por (4.95) também para distribuição linear de vorticidade, porém, distribuída sobre painéis com curvatura. Porém, a abordagem descrita acima permite a satisfação de apenas uma condição de contorno em cada ponto de controle, pois os sistemas (4.48), (4.71) e (4.95) são de ordem $N+1$. Em outras palavras, pode-se satisfazer à condição de contorno de impenetrabilidade ou de não-eskorregamento, nunca as duas simultaneamente para todos os pontos de controle, o que é feito de acordo com a montagem da matriz de influência e do vetor independente destes sistemas.

A modelagem descrita a seguir para escoamentos viscosos procura estabelecer uma representação mais adequada da condição de contorno na parede, uma vez que a discretização correta do fluxo de vorticidade na superfície é primordial para uma simulação que conduza a resultados acurados. Deste modo, a satisfação simultânea das condições de contorno de impenetrabilidade e de não-eskorregamento é um aprimoramento incorporado neste trabalho à modelagem do escoamento viscoso ao redor de corpos. Contudo, a utilização apenas de painéis passa a ser fator limitante, pois, neste caso, uma vez determinado o tipo de singularidade empregado, deve-se escolher a condição de contorno correspondente.

Tendo em vista obter um equacionamento que permita trabalhar simultaneamente com as duas condições de contorno, da maneira descrita acima, incorpora-se, a partir deste ponto, a utilização simultânea de painéis e vórtices conforme figura 4.9.

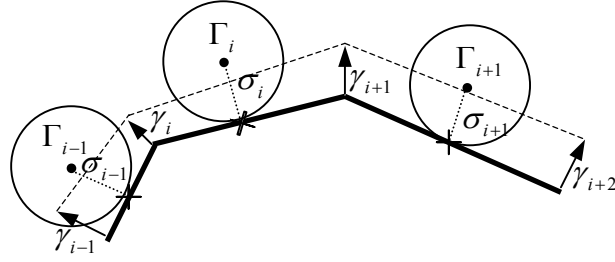


Figura 4.9(a) – Painéis e vórtices na discretização do corpo

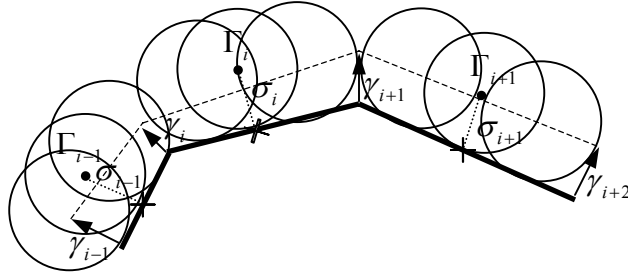


Figura 4.9(b) – Painéis e vórtices na discretização do corpo

Com a inclusão de N vórtices, um por painel, o sistema passa a ter $2N+1$ equações, já contando com a condição de conservação de circulação, a qual é deduzida abaixo para o caso da utilização de vórtices e painéis, e $2N+1$ incógnitas ($N+1$ γ dos painéis e N Γ dos vórtices), o permite satisfazer simultaneamente as condições de contorno de impenetrabilidade e de não-escorregamento.

Com o intuito de se obter um bom recobrimento dos núcleos e uma melhor resolução próxima à parede, pode-se utilizar L vórtices por painel. No entanto, existe somente uma incógnita Γ_i por painel, ou seja, os vórtices do mesmo painel terão a intensidade Γ_i/L . A quantidade L e a localização dos vórtices serão estudadas na seção seguinte deste trabalho. A Fig. 4.9(b) ilustra o posicionamento de $L = 3$ vórtices por painel.

A condição de conservação de circulação, para o caso da utilização de painéis e vórtices, passa a contar com a vorticidade calculada para os vórtices do sistema. Assim,

$$\int_{Corpo} \gamma ds + \Gamma_{Esteira} = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta \ell_j + \sum_{j=1}^N L \Gamma_j + \sum_{k=1}^M \Gamma_k = 0, \quad (4.96)$$

e, como no início da simulação não há vórtices livres na esteira,

$$\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta \ell_j + \sum_{j=1}^N L \Gamma_j = 0. \quad (4.97)$$

O sistema a ser resolvido, utilizando-se painéis retos e L vórtices por painel, toma a forma de,

$$\begin{pmatrix} P_{IMP(1,1)} & P_{IMP(1,2)} & \cdots & P_{IMP(1,N)} & P_{IMP(1,N+1)} \\ P_{IMP(2,1)} & P_{IMP(2,2)} & \cdots & P_{IMP(2,N)} & P_{IMP(2,N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{IMP(N,1)} & P_{IMP(N,2)} & \cdots & P_{IMP(N,N)} & P_{IMP(N,N+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{IMP(1,N+2)} & V_{IMP(1,N+3)} & \cdots & V_{IMP(1,2N)} & V_{IMP(1,2N+1)} \\ V_{IMP(2,N+2)} & V_{IMP(2,N+3)} & \cdots & V_{IMP(2,2N)} & V_{IMP(2,2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{IMP(N,N+2)} & V_{IMP(N,N+3)} & \cdots & V_{IMP(N,2N)} & V_{IMP(N,2N+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{NE(1,1)} & P_{NE(1,2)} & \cdots & P_{NE(1,N)} & P_{NE(1,N+1)} \\ P_{NE(2,1)} & P_{NE(2,2)} & \cdots & P_{NE(2,N)} & P_{NE(2,N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{NE(N,1)} & P_{NE(N,2)} & \cdots & P_{NE(N,N)} & P_{NE(N,N+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{NE(1,N+2)} & V_{NE(1,N+3)} & \cdots & V_{NE(1,2N)} & V_{NE(1,2N+1)} \\ V_{NE(2,N+2)} & V_{NE(2,N+3)} & \cdots & V_{NE(2,2N)} & V_{NE(2,2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{NE(N,N+2)} & V_{NE(N,N+3)} & \cdots & V_{NE(N,2N)} & V_{NE(N,2N+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \\ \Gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1IMP} \\ b_{2IMP} \\ \vdots \\ b_{NIMP} \\ b_{1NE} \\ b_{2NE} \\ \vdots \\ b_{NNE} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

onde $[P_{IMP}]$ refere-se aos coeficientes de influência dos painéis retos com distribuição linear de vorticidade (Eq. 4.71), escritos para a condição de contorno de impenetrabilidade, enquanto que $[P_{NE}]$ são os mesmos coeficientes (Eq. 4.71), porém para a condição de não-escorregamento. Da mesma forma, $[V_{IMP}]$ são os coeficientes de influência relativos aos L vórtices para impenetrabilidade e $[V_{NE}]$ para não-escorregamento, ou seja, representam a velocidade induzida por L vórtices de Lamb, com intensidade unitária, respectivamente na direção normal e tangencial ao ponto de controle do painel em questão.

Para o caso de painéis com curvatura, deve-se relembrar que γ_{N+1} do sistema (4.95) não é incógnita, devendo-se recorrer a Eq. (4.86) para a sua determinação. Outra mudança com relação ao sistema (4.95) é no que se refere à equação de conservação de circulação. Para o caso de painéis com curvatura deve-se utilizar a Eq. (4.94) em substituição à Eq. (4.70).

Realizando as alterações descritas acima, pode-se reescrever o sistema (4.95) para painéis com curvatura e distribuição linear de vorticidade da seguinte maneira,

$$\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix} P_{IMP(1,1)} & P_{IMP(1,2)} & \cdots & P_{IMP(1,N)} & P_{IMP(1,N+1)} \\ P_{IMP(2,1)} & P_{IMP(2,2)} & \cdots & P_{IMP(2,N)} & P_{IMP(2,N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{IMP(N,1)} & P_{IMP(N,2)} & \cdots & P_{IMP(N,N)} & P_{IMP(N,N+1)} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} V_{IMP(1,N+2)} & V_{IMP(1,N+3)} & \cdots & V_{IMP(1,2N)} & V_{IMP(1,2N+1)} \\ V_{IMP(2,N+2)} & V_{IMP(2,N+3)} & \cdots & V_{IMP(2,2N)} & V_{IMP(2,2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{IMP(N,N+2)} & V_{IMP(N,N+3)} & \cdots & V_{IMP(N,2N)} & V_{IMP(N,2N+1)} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} P_{NE(1,1)} & P_{NE(1,2)} & \cdots & P_{NE(1,N)} & P_{NE(1,N+1)} \\ P_{NE(2,1)} & P_{NE(2,2)} & \cdots & P_{NE(2,N)} & P_{NE(2,N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{NE(N,1)} & P_{NE(N,2)} & \cdots & P_{NE(N,N)} & P_{NE(N,N+1)} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} V_{NE(1,N+2)} & V_{NE(1,N+3)} & \cdots & V_{NE(1,2N)} & V_{NE(1,2N+1)} \\ V_{NE(2,N+2)} & V_{NE(2,N+3)} & \cdots & V_{NE(2,2N)} & V_{NE(2,2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{NE(N,N+2)} & V_{NE(N,N+3)} & \cdots & V_{NE(N,2N)} & V_{NE(N,2N+1)} \end{bmatrix} \\
\Delta\ell_1/2 & (\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2)/2 & \cdots & (\Delta\ell_{N-1}/2 + \Delta\ell_N) & (\Delta\ell_N)^2/2 & L & L & \cdots & L & L
\end{pmatrix}
\begin{Bmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \vdots \\ \gamma_{0N} \\ \gamma_{1N} \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \\ \Gamma_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{1IMP} \\ b_{2IMP} \\ \vdots \\ b_{NIMP} \\ b_{1NE} \\ b_{2NE} \\ \vdots \\ b_{NNE} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.99)$$

onde $[P_{IMP}]$ refere-se aos coeficientes de influência dos painéis curvos com distribuição linear de vorticidade (Eq. (4.83) e Eq. (4.84)), escritos para a condição de contorno de impenetrabilidade, enquanto que $[P_{NE}]$ são os mesmos coeficientes (Eq. (4.83) e Eq. (4.84)), porém para a condição de não-escorregamento. Deve-se lembrar ainda que as integrais das Eqs. (4.83) e (4.84) são resolvidas numericamente, sendo os resultados combinados de acordo com as Eqs. (4.89) à (4.92) para contemplarem os efeitos da distribuição constante e linear sobre o painel. Em (4.99) $[V_{IMP}]$ e $[V_{NE}]$ têm o mesmo significado e são calculados de maneira semelhante à do sistema (4.98).

Resolvido o sistema para determinação das intensidades das singularidades na superfície do corpo, determina-se a vorticidade necessária a satisfazer simultaneamente as condições de contorno de impenetrabilidade e não-escorregamento, para cada passo no tempo. Esta vorticidade é então transferida para o meio fluido ao se gerar novos vórtices, os quais serão posicionados de maneira a manter um certo grau de recobrimento de seus núcleos, o que garante uma taxa de convergência satisfatória. A seção seguinte apresenta a maneira de se determinar o número L de vórtices gerados por painel, assim como a localização destes vórtices.

4.4. Difusão da vorticidade na superfície sólida e nascimento de novos vórtices

A seção 4.3 forneceu o modelo matemático para a determinação da vorticidade necessária a satisfazer as condições de impenetrabilidade e não-escorregamento nos pontos de controle. Esta vorticidade é distribuída em uma camada de L vórtices por painel, em N painéis, os quais podem ser retos (sistema (4.98)) ou curvos (sistema (4.99)), ambos com distribuição linear de vorticidade. O resultado obtido para esta vorticidade deve ser transferido para o meio fluido através da inclusão de novos vórtices no escoamento, os quais irão carregar a vorticidade dos painéis e dos vórtices que formaram as matrizes de influência dos sistemas citados. Este processo de geração dos novos vórtices se constitui em uma etapa da simulação muito importante, a qual deve ser estudada com bastante cuidado. Deste modo, deve-se buscar simular o fluxo de vorticidade na superfície o mais próximo possível do fenômeno físico estudado, o que implica em uma discretização apurada e representativa da região próxima do corpo. A seção 3.8 apresentou a formulação matemática para este processo de geração dos novos vórtices, a qual se baseia em estudar este fenômeno por um processo puramente difusivo, que ocorre essencialmente na direção normal à superfície. Assim, a Eq. (3.60) estabelece uma distância de difusão $\delta n|_{99,53\%} = 2.83\sqrt{\nu\delta t}$, que permite determinar o raio dos vórtices por painel para a montagem da matriz de influência, como mostra a Fig. 4.10, onde o raio $\sigma_0 = \sqrt{\delta A/\pi}$ e, por sua vez, a área de difusão δA é dada por $\delta A = \delta_n \Delta \ell = 2.83\sqrt{\nu\delta t} \Delta \ell$.

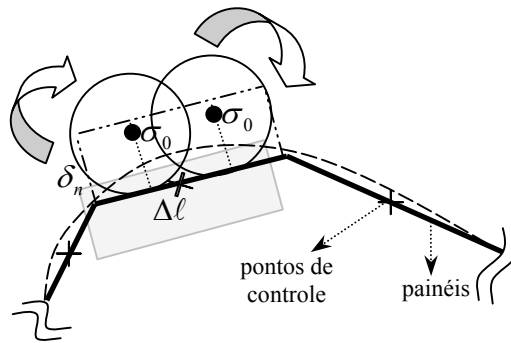


Figura 4.10 – Nascimento de $L=2$ vórtices

A quantidade de vórtices por painel L é obtida recorrendo-se ao parâmetro numérico h/σ_0 , sendo h a distância entre os centros dos vórtices gerados. Tal parâmetro controla o grau de recobrimento entre os núcleos e está intimamente relacionado à convergência do Método de Vórtices, razão pela qual deve ser cuidadosamente estudado e controlado. Deste modo, definindo uma razão de aspecto R para a área de difusão δA como $R = \Delta l / \delta_n$, e fazendo-se $\Delta l = 2/N$ chega-se a

$$R = \frac{2}{N} \cdot 2,83\sqrt{\nu\Delta t} . \quad (4.100)$$

Uma vez que $h = \Delta l / L$ e $\sigma_0 = \Delta l / \sqrt{\pi R}$, obtém-se

$$R = \left(\frac{h}{\sigma_0} \right)^2 \frac{L^2}{\pi} . \quad (4.101)$$

Considerando-se $\Delta t = k\Delta l$ apresentado no APÊNDICE C, e igualando-se as Eqs. (4.100) e (4.101), pode-se escrever

$$L = \left[\frac{2\pi^2}{8} \frac{\text{Re}}{N} \frac{1}{\left(\frac{h}{\sigma_0} \right)^4} \right]^{1/3} , \quad (4.102)$$

onde $k = 1$, ou seja, limita-se o deslocamento dos vórtices ao tamanho do painel.

Deste modo a posição de nascimento dos vórtices segue uma distribuição uniforme ao longo do corpo, tanto com relação aos L vórtices do mesmo painel, quanto com relação à vórtices de painéis vizinhos.

Determinada a posição e a quantidade L de vórtices por painel, resolve-se o sistema em questão para satisfação das condições de contorno e obtenção da vorticidade a ser transferida para os vórtices nascentes. A posição de nascimento dos vórtices que irão carregar a vorticidade calculada é a mesma posição dos vórtices que compõem a matriz de influência. Deste modo, os vórtices nascem com a intensidade calculada para a satisfação das condições de contorno, ou seja, têm intensidade igual às incógnitas Γ_i/L do sistema (4.98) ou (4.99), para painéis retos ou curvos, respectivamente. Com esta intensidade Γ_i , calcula-se inicialmente o campo de velocidade do escoamento, posteriormente, para o cálculo das etapas convectiva e difusiva. Esta intensidade deve ser corrigida, devendo-se levar em consideração, além da já incorporada vorticidade dos vórtices do sistema Γ_i , a vorticidade calculada para os painéis γ_i , uma vez que a presença do corpo deve ser simulada pelos vórtices e painéis simultaneamente. Assim, após o cálculo do campo de velocidade, a intensidade dos L vórtices nascentes gerados no painel i , deve ser atualizada da seguinte maneira

$$\Gamma = \Gamma_i + \Delta\ell_i \frac{(\gamma_i + \gamma_{i+1})}{2L}. \quad (4.103)$$

4.5. Convecção dos Vórtices

Ao se isolar os efeitos viscosos contemplados pela Eq. (4.2), chega-se à Eq. (4.3), a qual permite realizar o transporte convectivo da vorticidade, tratando o vórtice como partícula. No entanto, sua aplicação está sujeita às hipóteses simplificadoras formuladas no capítulo 3, das quais deve-se ressaltar a necessidade de se considerar o fluido homogêneo, newtoniano, e o escoamento incompressível. O embasamento teórico que permite tratar a vorticidade como partícula se ampara em dois teoremas fundamentais da dinâmica da vorticidade, quais sejam, o Teorema de Kelvin, o qual estabelece que a circulação ao redor de uma curva material fechada é constante em um escoamento não viscoso, e o Teorema de Helmholtz, o qual prevê que as linhas de vorticidade se movimentam com o fluido.

A discretização do campo de vorticidade citada anteriormente como característica do Método de Vórtices permite que este utilize um referencial puramente lagrangeano, livre de

malhas auxiliares de cálculo. Entretanto, esta vantagem traz consigo a necessidade de preenchimento da região rotacional do escoamento, o que é conseguido pelo aumento do número de vórtices com conseqüente recobrimento entre seus núcleos. Esta é a origem da maior limitação do Método de Vórtices na etapa convectiva, uma vez que o cálculo do campo de velocidade induzido em cada vórtice de uma nuvem de M vórtices tem o custo computacional da ordem de M^2 , como será melhor explorado adiante.

Dito isto, o movimento de um vórtice potencial, que possui vetor posição $\mathbf{r}_k$ no instante t , é determinado pela taxa de variação do seu vetor posição, ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_k, t). \quad (4.104)$$

Esta expressão lagrangiana é utilizada então para calcular a nova posição de cada vórtice da nuvem devido ao transporte convectivo de vorticidade, em cada passo de tempo.

Para o cálculo da velocidade no vórtice i , ou em qualquer outro ponto do domínio, se faz necessário considerar a influência dos três elementos que atuam induzindo velocidade:

- velocidade induzida no vórtice i , no sistema global, devido ao escoamento incidente;

$$\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix}_i = \mathbf{U}_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}; \quad (4.105)$$

- velocidade induzida no vórtice i , no sistema global, devido à presença do corpo discretizado com N painéis e $L \times N$ vórtices:

$$\begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{pj} \\ v_{pj} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{LN} \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{vj} \\ v_{vj} \end{pmatrix}; \quad (4.106)$$

onde u_{pj} e v_{pj} são as componentes cartesianas da velocidade induzida pelo painel j no vórtice i , no sistema de coordenada do painel j , calculadas com as Eqs. (4.46) e (4.47) para o caso de painéis retos com distribuição constante de vorticidade, ou pelas Eqs. (4.55) e

(4.56) para o caso de painéis retos com distribuição linear de vorticidade, ou ainda pelas Eqs. (4.83) e (4.84) para o caso de painel curvo com distribuição linear, ao passo que u_{vj} e v_{vj} são as componentes cartesianas da velocidade induzida pelos vórtices do sistema, calculadas respectivamente pelas Eqs. (3.13) e (3.14).

- velocidade induzida no vórtice i , no sistema global, devido à nuvem de M vórtices livres:

$$\begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_j (y-y_o)}{2\pi r^2} \\ -\frac{\Gamma_j (x-x_o)}{2\pi r^2} \end{pmatrix}, \text{ se } r \geq \sigma_0, \quad (4.107)$$

onde $r^2 = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2$.

Deste modo, quando $r \geq \sigma_0$, pode-se acelerar o cálculo evitando-se avaliar a exponencial do vórtice de Lamb, o que é feito a partir das Eqs. (3.13) e (3.14) para as componentes de velocidade cartesianas induzidas por uma nuvem de vórtices pontuais j sobre um vórtice i .

Por sua vez, quando $r < \sigma_0$, calcula-se as componentes de velocidade cartesianas induzidas por uma nuvem de vórtices de Lamb j sobre um vórtice i , a partir das Eqs. (3.13) e (3.14) da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_j y-y_o}{2\pi r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \\ -\frac{\Gamma_j x-x_o}{2\pi r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \end{pmatrix}, \text{ se } r < \sigma_0, \quad (4.108)$$

onde $r^2 = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2$.

Portanto a velocidade convectiva total induzida sobre um vórtice i é calculada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix}_i. \quad (4.109)$$

4.5.1. Método de Expansão em Multipolos Adaptativo - MEMA

Como visto anteriormente, a etapa convectiva do Método dos Vórtices inclui, além do cálculo do campo gerado pelos painéis, o cálculo do campo gerado por cada vórtice discreto. Assim, para que o Método de Vórtices realize a convecção dos vórtices, há a necessidade de se calcular a velocidade induzida por cada vórtice sobre todos os outros, como pode ser visto nas Eqs. (4.107) e (4.108), o que implica em um custo computacional da ordem de M^2 , onde M é o número de vórtices livres presentes na simulação.

Nesta seção o MEMA é apresentado de maneira resumida, o que permite um bom entendimento conceitual do método, porém, no que se refere a seus detalhes de implementação e funcionamento, este entendimento é apenas superficial. Para maiores informações quanto à formulação matemática, suas deduções e a descrição completa do algoritmo, deve-se consultar o artigo de Carrier *et al.* (1988).

Os resultados apresentados no próximo capítulo são obtidos utilizando o código computacional original implementado por Carrier *et al.* (1988) em linguagem FORTRAN, sendo posteriormente comparados aos resultados obtidos pelo cálculo direto vórtice-vórtice. Além da adição do vórtice de Lamb para a desingularização dos vórtices pontuais, o código FORTRAN original desenvolvido por Carrier *et al.* (1988) sofreu pequenas modificações de natureza operacional para ser utilizado neste trabalho.

Resumidamente, a estratégia utilizada pelo MEMA é de agrupar os vórtices de uma nuvem em caixas de tamanhos diferentes, de acordo com a densidade local de vórtices, e se avaliar as interações entre as caixas que se encontram suficientemente distantes umas das outras. A avaliação das interações entre as partículas que se encontram na mesma caixa é feita pelo método direto, ou seja, partícula-partícula. Deste modo, suponha que existam m partículas de intensidade q_i , localizadas em z_i , $i = 1, \dots, m$, com $|z_i| < r$. Pode-se dizer que, para todo $z \in C$ e $z_i > r$, o potencial $\phi(z)$ pode ser escrito como

$$\phi(z) = Q \log(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (4.110)$$

onde

$$Q = \sum_{i=1}^m q_i \quad \text{e} \quad a_k = \sum_{i=1}^m \frac{q_i z_i^k}{k}. \quad (4.111a,b)$$

Truncando-se o somatório em p termos, tem-se, para todo $p \geq l$,

$$\left| \phi(z) - Q \log(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} \leq \left(\frac{A}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p, \quad (4.112)$$

onde

$$c = \left| \frac{z}{r} \right|, \quad A = \sum_{i=1}^m |q_i| \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{A}{1 - \left| \frac{r}{z} \right|}. \quad (4.113a, b, c)$$

Carrier *et al.* (1988) consideram caixas “bem separadas” aquelas em que $c = 2$. Assim, para este caso, p deve ser da ordem de $-\log_2 \varepsilon$, de acordo com a Eq. (4.112), quando se estabelece uma acurácia ε . O algoritmo tem início, então, com a escolha de ε , que será garantida realizando-se a expansão em multipolos com p termos. Para tanto, o domínio é dividido sequencialmente em caixas quadradas, até que estas tenham um número de vórtices menor que o número máximo de vórtices por caixa, valor escolhido como dado de entrada. Este parâmetro influencia no desempenho do algoritmo do ponto de vista do tempo de processamento, mas que não implica em perda de acurácia.

O código FORTRAN original de Carrier *et al.* (1988) possui a opção de cálculo diferenciado para o campo induzido em pontos muito próximos, o que permite a desingularização do campo de vorticidade de acordo com o modelo que o usuário deseja utilizar. Deste modo, o vórtice de Lamb foi adicionado ao programa, sendo o raio do seu núcleo, σ_0 , o parâmetro utilizado como distância para esta desingularização.

Carrier *et al.* (1988) estabelecem ainda critérios para a formação de listas de caixas de acordo com a proximidade e com o tamanho de cada caixa. Assim, o domínio em questão é dividido inicialmente em quatro caixas iguais, as quais são sequencialmente divididas em quatro, até que cada caixa contenha um número de partículas inferior a um parâmetro numérico citado como número máximo de partículas por caixa. Os autores denominam

ainda caixas ascendentes, descendentes e contemporâneas, respectivamente aquelas que deram origem, aquelas que foram originadas e aquelas que pertencem ao mesmo estágio do processo de divisão, ou seja, aquelas que têm o mesmo tamanho.

Ao final do processo de divisão sucessiva do domínio, cada caixa terá cinco listas de caixas a ela associadas, como pode ser visto na Fig. 4.11, onde as cinco listas de caixas numeradas de 1 a 5 estão relacionadas à caixa b . Assim, observa-se que a lista 1 da caixa b é formada pelas caixas adjacentes à caixa b , a lista 2 da caixa b é formada pelas caixas descendentes das contemporâneas da ascendente de b que não são adjacentes à b , sua lista 3 é formada pelas caixas descendentes das contemporâneas adjacentes de b que não são adjacentes à b , sua lista 4 é formada pelas caixas que tem b em sua lista 3, e finalmente a lista 5 de b é formada pelas caixas não adjacentes à ascendente de b .

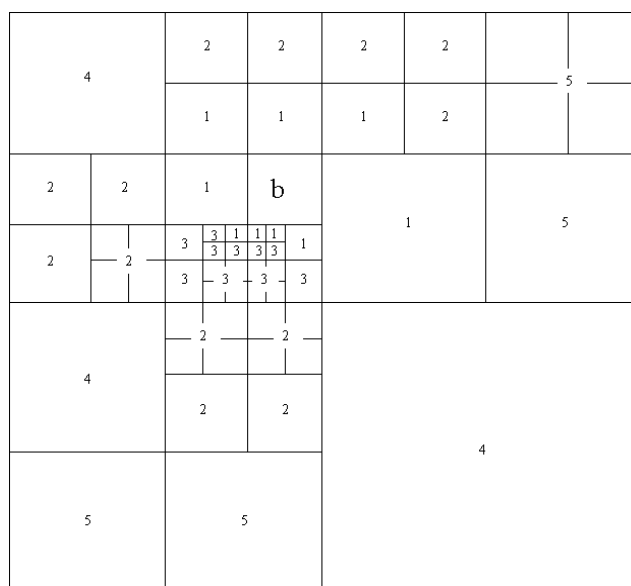


Figura 4.11 - Famílias de caixas (Carrier *et al.*, 1988).

A formação das listas citadas acima permite que se perceba a hierarquização das caixas de acordo com a proximidade e com o tamanho de cada caixa. Regiões com caixas menores representam maiores densidades de vórtices, o que justifica o tratamento diferenciado e a conseqüente separação em famílias distintas.

Diversos lemas e teoremas são apresentados em Carrier *et al.* (1988) que fornecem ferramentas para translação do centro da expansão em multipolos e para a conversão de expansões em multipolos para expansões locais. Estas ferramentas se fazem necessárias

para avaliar a justaposição de efeitos devido às interações entre as caixas e às interações entre os vórtices que se encontram na mesma caixa.

4.6. Processo difusivo

Se por um lado a utilização do referencial lagrangeano faz com que o Método de Vórtices se veja livre das complicações de geração de malhas, sobretudo para geometrias complexas, por outro, insere dificuldades no processo de difusão viscosa, uma vez que não é tarefa fácil obter uma solução numérica para o termo de difusão da equação de transporte de vorticidade que seja compatível com o referencial lagrangeano.

Deste modo, esta seção examina quatro diferentes métodos pelos quais os efeitos viscosos são considerados no Método de Vórtices, ou seja, quatro diferentes abordagens para a solução da Eq. (4.4), quais sejam: Método do Avanço Randômico (MAR); Método da Velocidade de Difusão (MVD); Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC).

4.6.1. Método do Avanço Randômico - MAR

O MAR foi inicialmente desenvolvido por Chorin (1973) para aplicação em escoamentos com alto número de Reynolds e tem sido bastante utilizado desde então. Seu princípio fundamental é substituir o processo difusivo por deslocamentos randômicos de partículas que carregam vorticidade, de modo a simular a evolução do campo de vorticidade devido à difusão viscosa.

A Eq. (4.4) possui solução analítica para um vórtice inicialmente potencial, a qual pode ser escrita na forma adimensional como

$$\omega(r, t) = Re \frac{\Gamma}{4\pi t} \exp\left(-Re \frac{r^2}{4t}\right). \quad (4.114)$$

Pode-se mostrar que a solução da Eq. (4.114) pode ser reproduzida pelo movimento aleatório de uma nuvem vórtices, de maneira similar ao movimento Browniano molecular. Chorin (1973) demonstrou que, quando o número de vórtices tende ao infinito, o movimento aleatório da nuvem aproxima-se da solução exata da Eq. (4.4). Lewis (1991)

propôs uma alteração à metodologia apresentada por Chorin (1973). Se a probabilidade de se encontrar um vórtice em uma determinada posição no instante t for representada por $\omega(t)$, pode-se encontrar os deslocamentos radial e polar deste vórtice, Δr e $\Delta \theta$, respectivamente, invertendo-se a Eq. (4.114) para obter

$$\Delta r = \sqrt{\frac{4t}{Re} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \text{ e } \Delta \theta = 2\pi Q, \quad (4.115a, b)$$

onde P e Q são números randômicos entre 0 e 1, retirados de uma distribuição estatisticamente uniforme. As Eqs. (4.115a) e (4.115b) podem ser escritas em coordenadas cartesianas como

$$\begin{pmatrix} \Delta x_D \\ \Delta y_D \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \Delta r \cos(\Delta \theta) \\ \Delta r \sin(\Delta \theta) \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

4.6.2. Método da Redistribuição de Vorticidade – MRV

O MRV, desenvolvido por Shankar e Van Dommelen (1996), se propôs a ser uma alternativa determinística ao MAR, mantendo a grande vantagem de ser completamente livre de malhas, o que não ocorre com o Método da Troca de Intensidade das Partículas – MTIP (Cottet e Koumoutsakos, 1999). Tanto o MRV quanto o MTIP baseiam-se na troca de parcelas de circulação entre vórtices vizinhos, o que simula o transporte difusivo de vorticidade.

O algoritmo do MRV é estruturado para achar a parcela de circulação f_{ij}^n que é transferida do vórtice i para o vórtice j (vórtices vizinhos) no instante de tempo n . Vórtices vizinhos são aqueles que se encontram a uma distância inferior à distância de difusão, a qual é da ordem de $h_v = \sqrt{\nu \Delta t}$. O sistema para a determinação de f_{ij}^n é obtido comparando-se a transformada de Fourier do campo de vorticidade obtido pela redistribuição com a transformada de Fourier do campo de vorticidade exato, e representa uma aproximação de ordem Δt . Deste modo, o sucesso do método reside em se achar uma solução positiva válida para o seguinte sistema,

$$\sum_j f_{ij}^n = 1, \quad (4.117)$$

$$\sum_j f_{ij}^n \xi_{1ij} = 0, \quad \sum_j f_{ij}^n \xi_{2ij} = 0, \quad (4.118)$$

$$\sum_j f_{ij}^n \xi_{ij}^2 = 2, \quad \sum_j f_{ij}^n \xi_{1ij} \xi_{2ij} = 0, \quad \sum_j f_{ij}^n \xi_{2ij}^2 = 2, \quad (4.119)$$

onde $\xi_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)/h_v$, ou seja, ξ_{1ij} e ξ_{2ij} são as componentes cartesianas de ξ_{ij} . Assim, o vórtice j está na vizinhança do vórtice i se $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \leq R h_v$, onde R é uma constante. Shankar e Van Dommelen (1996) definem o valor de $R = \sqrt{12}$. O sentido físico das Eqs. (4.117), (4.118) e (4.119) pode ser entendido respectivamente como sendo a conservação de circulação, conservação do centro de vorticidade e a correta expansão do diâmetro médio, ou seja, a conservação do momento linear e do momento angular. Outra restrição imposta é de que $f_{ij}^n > 0$, que representa o fato de que a vorticidade não pode ser criada ou destruída no interior do fluido.

O sistema formado pelas Eqs. (4.117), (4.118) e (4.119) é do tipo de “fase I” em programação linear e pode ser resolvido por deslocamento de variáveis. Entretanto, Shankar e Van Dommelen (1996) propuseram uma transformação de variáveis do tipo $w_j = f_{ij}^n - 1/2$. Assim, o universo alvo da solução do sistema passa de $[0,1]$ para $[-1/2,1/2]$, o que permite dizer que a norma máxima do vetor solução é $\|\mathbf{w}\|_\infty = \max_j \{|\mathbf{w}_j|\}$. O sistema, então, pode ser resolvido por um algoritmo de otimização que minimize a norma máxima até um valor limite de $1/2$. A partir deste valor a solução é impossível, ou seja, faz-se necessário adicionar novos vórtices ao sistema. Shankar e Van Dommelen (1996) citam a distância de $\sqrt{6}$ do vórtice i para o nascimento de novos vórtices, em intervalos de 30° , até que o sistema apresente solução possível.

O sistema formado pelas Eqs. (4.117), (4.118) e (4.119) pode ser reescrito para cada vórtice i como

$$A\boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{b}. \quad (4.120)$$

Trocando a igualdade acima por $\geq$ e $\leq$ e inserindo-se $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty$ como incógnita, pode-se resolver o problema através de uma rotina de otimização que minimize $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty$, como se segue

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{1} \\ -A & \mathbf{0} \\ -I & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

A primeira e a terceira equações do sistema de Eqs. (4.121) são: $A\boldsymbol{\omega}_j \geq \mathbf{b}$ e $A\boldsymbol{\omega}_j \leq \mathbf{b}$, ou seja, $A\vec{\omega}_j = \vec{b}$. A segunda e a quarta equações são: $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty \geq -\boldsymbol{\omega}_j$ e $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty \geq \boldsymbol{\omega}_j$, ou seja, $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty = \max_j \{|\boldsymbol{\omega}_j|\}$. Deste modo, o objetivo se torna resolver o sistema de equações (4.121), minimizando-se o valor de $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty$ e, caso $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty > 1/2$, novos vórtices devem ser acrescentados. Neste trabalho o sistema de equações (4.121) é resolvido utilizando-se a rotina DDLPRS da IMSL.

4.6.3. Método da Velocidade de Difusão - MVD

O Método da Velocidade de Difusão desenvolvido por Ogami e Akamatsu (1991) acrescenta uma parcela de velocidade relativa à difusão da vorticidade para o deslocamento de cada vórtice. Tal equacionamento é obtido manipulando-se a equação de Navier-Stokes e comparando o resultado com a equação que descreve o movimento de uma função 2D qualquer. Os detalhes podem ser vistos em Ogami e Akamatsu (1991).

Define-se então a velocidade de difusão $\mathbf{u}_d$, cujas componentes em coordenadas cartesianas são

$$u_d = -\frac{\nu}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad \text{e} \quad v_d = -\frac{\nu}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (4.122a, b)$$

Para que se obtenha uma distribuição de vorticidade suavizada, desingulariza-se os vórtices pontuais, o que neste trabalho foi realizado através da utilização do vórtice de Lamb. Assim, a vorticidade induzida pela nuvem de vórtices j sobre o vórtice i pode ser escrita como

$$\omega_i = \frac{1}{\pi\sigma^2} \sum_j \exp\left[-\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{\sigma^2}\right] \Gamma_j, \quad (4.123)$$

sendo σ o raio do núcleo do vórtice. Substituindo-se a Eq. (4.123) nas Eqs. (4.122a) e (4.122b), chega-se às componentes da velocidade de difusão em coordenadas cartesianas

$$u_{di} = \frac{2\nu}{\pi\sigma^4 w_i} \sum_j (x_i - x_j) \exp\left[-\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{\sigma^2}\right] \Gamma_j \text{ e} \quad (4.124)$$

$$v_{di} = \frac{2\nu}{\pi\sigma^4 w_i} \sum_j (y_i - y_j) \exp\left[-\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{\sigma^2}\right] \Gamma_j. \quad (4.125)$$

A Eq. (4.124) e a Eq. (4.125) representam a parcela a ser somada na velocidade de convecção que permite a determinação da posição futura dos vórtices.

4.6.4. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido – MCNC

O método do crescimento do núcleo de Leonard (1980) estabelece uma aproximação para a evolução no tempo do campo de vorticidade devido à difusão, através do crescimento do raio do núcleo dos vórtices. Este método deixou de ser estudado quando Greengard (1985) provou que sua solução não converge para a equação de Navier-Stokes para longos tempos de simulação. Rossi (1996) apresentou uma modificação que tornou o método de Leonard convergente.

A modificação implementada por Rossi (1996), denominada “refinamento espacial”, torna o método do crescimento do núcleo convergente porque se baseia na escolha de parâmetros numéricos que controlam a evolução temporal do raio do núcleo, realizando uma divisão dos vórtices em intervalos regulares. Assim, o Método do Crescimento do

Núcleo Corrigido (MCNC) de Rossi tornou-se uma opção como um método de difusão determinístico, de fácil implementação e completamente livre de malhas. Outra particularidade do MCNC é o fato deste não utilizar a decomposição da equação de transporte de vorticidade. Apesar de não contribuir negativamente para a convergência, esta decomposição introduz um erro numérico que não está presente no MCNC.

No MCNC, a taxa de crescimento do raio do núcleo é determinada por

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial t} = \nu. \quad (4.126)$$

Definem-se os parâmetros numéricos α [0,1] e l que determinam a frequência do referido refinamento espacial. Deste modo, um vórtice com intensidade inicial γ terá seu raio variando de um valor mínimo inicial αl a um valor máximo l , quando sofrerá uma divisão em quatro novos vórtices com vorticidades de $\gamma/4$. Os valores mínimo e máximo do raio do vórtice estabelecem respectivamente a resolução máxima l_m e a resolução mínima l_M da simulação, ou seja, $l_m \leq \sigma_i \leq l_M$. Estes novos vórtices são posicionados a 90° uns dos outros e a uma distância r em torno do vórtice original, conforma a Fig. 4.12.

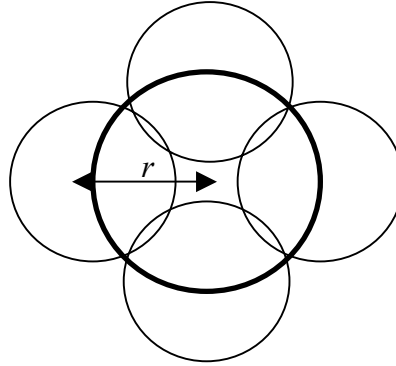


Figura 4.12 – Divisão do vórtice no MCNC

O valor de r é dado por

$$r = 2\sigma\sqrt{1-\alpha^2}, \quad (4.127)$$

o que garante a conservação do momento de segunda ordem.

É importante estabelecer uma relação entre α e a razão de recobrimento h/σ dos núcleos dos vórtices que surgem na divisão. Deste modo, supondo que os vórtices novos são posicionados tendo seus raios tangentes entre si, esta configuração geométrica estabelece $h/\sigma=2$, o que implica em $\alpha=0,8165$. Assim, para $\alpha \geq 0,8165$ ocorre recobrimento entre os núcleos dos vórtices que surgem da divisão do MCNC. Deve-se atentar que esta razão de recobrimento se refere apenas aos vórtices que se surgiram da divisão de apenas um vórtice original. Tendo em vista a coexistência e superposição de diversos outros vórtices, os quais são divididos no mesmo instante de tempo, a razão de recobrimento global tende a ser superior a $h/\sigma=2$.

Como discutido no capítulo 5, após estudo realizado com esses quatro métodos, optou-se pela utilização do MCNC para as simulações realizadas neste trabalho.

4.7. Avanço Temporal

As etapas convectiva e difusiva do Método de Vórtices fornecem os elementos necessários para o cálculo do deslocamento da nuvem de vórtices, ou seja, pode-se a partir deste ponto avançar no tempo no sentido de se determinar as novas posições para cada vórtice, o que é feito de acordo com o método de difusão em questão. Utiliza-se $\Delta t = k\Delta l$ para estabelecer uma relação entre o deslocamento dos vórtices e o tamanho do painel. Em todas as simulações deste trabalho foi utilizado $k=1$, ou seja, define-se como sendo igual à unidade a razão entre a discretização do deslocamento e a discretização do corpo.

Assim o deslocamento é calculado utilizando-se o avanço de Euler de primeira ordem para os vórtices que ainda não têm armazenadas as velocidades do passo anterior, ou seja, para os recém-nascidos utiliza-se

$$\begin{pmatrix} \Delta x_c \\ \Delta y_c \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}_i \Delta t. \quad (4.128)$$

Para os vórtices que já possuem a velocidade do passo anterior o deslocamento é calculado utilizando-se o avanço de Adams-Bashforth de segunda ordem, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \Delta x_C \\ \Delta y_C \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1,5u(t)-0,5u(t-\Delta t) \\ 1,5v(t)-0,5v(t-\Delta t) \end{pmatrix}_i \Delta t. \quad (4.129)$$

Assim, a nova posição do vórtice i é

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t+\Delta t) \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} \Delta x_C \\ \Delta y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_D \\ \Delta y_D \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

onde $(\Delta x_D, \Delta y_D) \neq 0$ apenas para o caso de utilização do MAR, onde este deslocamento de difusão é determinado pela Eq. (4.116), enquanto que para o MVD, para o MCNC e para o MRV $(\Delta x_D, \Delta y_D) = 0$.

As velocidades $u(t)$ e $u(t-\Delta t)$ da Eq. (4.129) advém da velocidade de convecção calculada pela Eq. (4.109), a qual representa a soma da velocidade do escoamento incidente, com a velocidade induzida pelos painéis e vórtices do sistema de geração de vorticidade, e com a velocidade induzida pela nuvem de vórtices.

Deve-se atentar ainda que, para o caso do MVD, as velocidades $u(t)$ e $u(t-\Delta t)$ da Eq. (4.129) devem ser acrescidas da velocidade de difusão calculada pelas Eq. (4.124) e Eq. (4.125).

Como dito anteriormente, o esquema de Adams-Bashforth (RUGGIERO & LOPES, 1997) necessita do armazenamento do campo de velocidade do passo anterior, por isto o primeiro passo sempre é feito com o esquema de Euler. Esquemas de predição-correção, tais como Runge-Kutta, não foram adotados, pois o cálculo de mais um campo de velocidade da etapa convectiva em um mesmo instante de tempo torna-se excessivamente dispendioso computacionalmente, como citado em GUEDES (2003).

Neste trabalho, os vórtices que surgem da divisão do MCNC utilizam $u(t-\Delta t)$ igual ao $u(t-\Delta t)$ do vórtice do qual foi originado. Este procedimento visa a garantir a acurácia do esquema de Adams-Bashforth de segunda ordem.

4.8. Mecanismos de redução do número de vórtices

4.8.1. Aglomeração direta

Como em todo método numérico, a eficiência do Método de Vórtices é medida pelo esforço computacional necessário para se obter uma determinada acurácia.

Nos métodos numéricos que utilizam malhas, o esforço computacional baseia-se no número de pontos da malha onde são realizados os cálculos. Por sua vez, no Método dos Vórtices, o esforço computacional é consequência do número de vórtices necessários para discretizar o campo de vorticidade acuradamente, garantindo o recobrimento de seus núcleos e a convergência do método.

O Método de Vórtices simula a solução da equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, aproximando o campo de vorticidade por uma combinação linear de funções de base carregadas pelos vórtices. O recobrimento ocorre quando a influência de mais de uma destas funções é sentida em um determinado ponto do domínio. O crescimento do número de vórtices durante a simulação, resultado da ampliação da região rotacional do escoamento, faz aumentar seu esforço computacional, sobretudo aquele relacionado à etapa convectiva.

Uma vez que os vórtices presentes estão livres para se mover por ação da convecção e da difusão, é possível que a simulação produza uma razão de recobrimento excessiva entre os núcleos, o que contribui sobremaneira para o aumento do esforço computacional.

Outro fator que contribui para um excessivo número de vórtices, e conseqüente aumento além do desejado da razão de recobrimento, é a utilização de métodos de difusão que realizam o refinamento espacial através da divisão dos vórtices, como ocorre no MRV e no MCNC, conforme visto anteriormente.

Deste modo, para garantir esforço computacional e acurácia competitivos, simulações com o Método de Vórtices devem recorrer à utilização de mecanismos de aglomeração eficientes, capazes de reduzir o número de vórtices sem, no entanto, causarem perdas na convergência ou na acurácia. Tais mecanismos permitem que se substitua diversos vórtices, que possuam seus núcleos em excessivo recobrimento, por um único vórtice que possui

novos valores de raio, circulação e posição, tais que esta substituição não implique em perda de representatividade.

Deve-se fazer uma distinção entre aglomeração numérica e aglomeração física, conforme salientado por Rossi (1997). A primeira, cujo objetivo é reduzir o esforço computacional, diminuindo o número de vórtices, pode ser encarada como uma simples perturbação no campo de vorticidade, ou seja, se o método for estável, esta perturbação não irá crescer indiscriminadamente. A segunda refere-se à situação física real, em que dois ou mais vórtices interagem entre si, formando uma estrutura rotacional nova.

O processo de aglomeração numérica apresentado a seguir tem como objetivo diminuir o número de vórtices, sem, no entanto, prejudicar a qualidade dos resultados, no que se refere à convergência e a acurácia da simulação. Para tanto, este mecanismo tem a necessidade de avaliar inteiramente a esteira, computando interações entre os vórtices presentes e aglomerando apenas aqueles que têm um excessivo recobrimento de seus núcleos. O algoritmo de aglomeração necessita, a rigor, do cálculo da distância entre os vórtices, o que requer M^2 operações, para uma nuvem de M vórtices. Deste modo, como o custo computacional da simulação como um todo foi reduzido para a ordem de M com a utilização da expansão em multipolos, percebe-se que o custo computacional envolvido no processo de aglomeração passa a ser o fator limitante.

Este trabalho utilizou o algoritmo de aglomeração desenvolvido por Rossi (1997), segundo o qual o campo de vorticidade ω é aproximado por uma combinação linear de N funções de base Gaussianas, dadas por

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{4\pi\sigma_i^2} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^2}{4\sigma_i^2}\right], \quad (4.131)$$

onde cada função de base é definida por três parâmetros $(\gamma_i, \mathbf{x}_i, \sigma_i)$, os quais correspondem à intensidade, posição e raio do vórtice.

A intensidade do vórtice é definida inicialmente na geração, satisfazendo-se as condições de contorno de impenetrabilidade e não-deslizamento na superfície sólida. A posição do vórtice é determinada pela evolução do escoamento, sendo resultado dos deslocamentos induzidos pela convecção e pela difusão. O raio do vórtice é um parâmetro

definido em função da física do escoamento em questão, ou seja, deve ser escolhido de acordo com a resolução necessária e imposta pelo problema. Estes valores podem sofrer alterações em função do processo de difusão que ocorre nos métodos de difusão MCNC e MRV. Deste modo, raios pequenos garantem maior resolução em regiões críticas, como por exemplo próximo ao corpo, no entanto podem causar problemas de instabilidade numérica, caso não exista um recobrimento suficiente de seus núcleos. Ao mesmo tempo a utilização de raios excessivamente grandes, como, por exemplo, aqueles obtidos pela aglomeração de diversos vórtices menores, pode implicar em perda de resolução. Assim, $l_m \leq \sigma_i \leq l_M$, ou seja, deve-se limitar o raio do núcleo a valores máximo e mínimo, aos quais correspondem respectivamente a máxima e a mínima resolução.

Supondo a aglomeração de n vórtices, o erro introduzido no campo de vorticidade é

$$e(\mathbf{x}) \equiv \frac{\gamma_0}{4\pi\sigma_0^2} \left[\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\sigma_0^2}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2}{4\sigma_i^2}\right) \right]. \quad (4.132)$$

O objetivo do processo de aglomeração é obter um conjunto de n vórtices que aglomerados em um único vórtice com $(\gamma_0, \mathbf{x}_0, \sigma_0)$ mantenha sob controle este erro.

Inicialmente a escolha de um vórtice que possa substituir um conjunto de n vórtices requer a manutenção dos momentos de ordem zero, de primeira e de segunda ordem, respectivamente

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad (4.133)$$

$$\gamma_0 \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{x}_i \quad (4.134)$$

$$4\gamma_0 \sigma_0^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i \left(4\sigma_i^2 + |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|^2 \right). \quad (4.135)$$

O algoritmo de Rossi (1997) baseia-se, portanto, em identificar os conjuntos de n vórtices que podem ser aglomerados segundo as Eqs. 4.133, 4.134 e 4.135, mantendo-se sob controle $e(\mathbf{x})$ da Eq. (4.132), e respeitando-se $l_m \leq \sigma_i \leq l_M$. O controle de $e(\mathbf{x})$ permite garantir que o campo de vorticidade seja submetido apenas à pequenas perturbações instantâneas que não resultarão em instabilidade numérica, enquanto que manter $l_m \leq \sigma_i \leq l_M$ se torna necessário para manter a acurácia da solução.

Considerando-se que somente serão aglomerados vórtices que tenham seus núcleos em recobrimento, pode-se dizer que o erro relativo ao processo de aglomeração de um conjunto de n vórtices estará restrito à região espacial onde este ocorreu, ou seja, cada processo de aglomeração implicará em um erro local específico, não ocasionando erros locais acumulativos introduzidos por aglomerações diferentes. Assim, o maior erro pontual do processo de aglomeração como um todo será comparável ao maior erro na aglomeração individual de um subconjunto de n vórtices.

Rossi (1997) realiza a adimensionalização $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/2\sigma_0$, o que permite escrever a Eq. (4.132) como se segue

$$e(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \frac{\gamma_0}{4\pi\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \left\{ \exp\left(-|\hat{\mathbf{x}}|^2\right) - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \exp\left[-|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_i|^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right] \right\}. \quad (4.136)$$

Considerando todos os γ com mesmo sinal, e atentando para a Eq. (4.133), percebe-se que a Eq. (4.136) realiza a média aritmética do termo

$$\mathbf{z}_i \equiv \exp\left(-|\hat{\mathbf{x}}|^2\right) - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \exp\left[-|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_i|^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right], \quad (4.137)$$

o que permite escrever como limite para o erro no processo de aglomeração de um subconjunto de n vórtices

$$e(\hat{\mathbf{x}}) \leq \frac{|\gamma_0|}{4\pi\sigma_0^2} \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{z}_i|. \quad (4.138)$$

Com a Eq. (4.138) pode-se limitar o erro de uma aglomeração de n vórtices limitando-se a diferença entre duas funções Gaussianas, conforme a Eq. (4.137). O erro somente será nulo se $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ e $\sigma_0/\sigma_i \rightarrow 1$, ou seja, caso estas duas funções estejam perfeitamente sobrepostas.

Se os parâmetros σ_0/σ_i e $\hat{\mathbf{x}}$ estão restritos a um conjunto de vórtices, a continuidade da Eq. (4.137) garante que haja um valor máximo M para $\mathbf{z}_i$, o que serve de base para o teorema apresentado por Rossi (1997), segundo o qual, considerando-se todos os γ com mesmo sinal,

$$\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|^2}{4\sigma_0^2} \leq R \quad (4.139)$$

e

$$b_1 \leq \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i} \right)^2 \leq b_2, \quad (4.140)$$

então o erro no campo de vorticidade $\|e(\hat{\mathbf{x}})\|_\infty$ será menor que

$$\frac{|\gamma_0| M}{4\pi\sigma_0^2}, \quad (4.141)$$

onde

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{z}_i|. \quad (4.142)$$

Rossi demonstra que os valores extremos de $\mathbf{z}_i$ são obtidos fazendo-se

$$\left(|\mathbf{x}_i|^2, \sigma_0^2 / \sigma_i^2 \right) = (R, b_1) \text{ ou } \left(|\mathbf{x}_i|^2, \sigma_0^2 / \sigma_i^2 \right) = (R, b_2).$$

Uma vez determinado M em função de R , b_1 e b_2 pode-se estabelecer condições para que se obtenha uma aglomeração com uma tolerância ε para $\|e(\hat{\mathbf{x}})\|_\infty$

$$\frac{|\gamma_0| M}{4\pi\sigma_0^2} \leq \varepsilon. \quad (4.143)$$

As Eqs. (4.139) e (4.140) e (4.143) formam os testes para que se efetue uma aglomeração em um conjunto de vórtices, cujo erro estará controlado pela tolerância ε estabelecida, porém, a realização destes testes é de elevado custo computacional, uma vez que é necessário calcular $(\gamma_0, \mathbf{x}_0, \sigma_0)$ pelas Eqs. (4.133), (4.134) e (4.135) toda vez que um novo candidato é acrescentado ao conjunto de vórtices que se deseja aglomerar.

Por esta razão é estabelecido um conjunto de testes mais restritivos do que o formado pelas Eqs. (4.139) e (4.143), ou seja

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 \leq R l_m^2, \quad (4.144)$$

para todo j e um particular i no conjunto de vórtices a ser aglomerado, e

$$|\gamma_0| \leq \varepsilon \frac{4\pi l_m^2}{M}. \quad (4.145)$$

A Eq. (4.144) substitui a Eq. (4.139), ao passo que a Eq. (4.145) substitui a Eq. (4.143), uma vez que $\sigma_0 \geq l_m$ e $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|^2 \leq D$. Esta última inequação advém do fato de $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 \leq D/4$ para todo vórtice j e um vórtice i em particular.

O algoritmo de Rossi (1997), implementado neste trabalho, é apresentado resumidamente abaixo:

1. Estabelecer a tolerância ε e os parâmetros R , b_1 e b_2 , o que permite determinar o valor de M ;
2. Fazer $i=1$ até N ;
3. Iniciar $C = \{(\gamma_i, \mathbf{x}_i, \sigma_i)\}$;

4. Fazer $j=1$ até N , adicionando j a C se as seguintes condições forem satisfeitas:
 - $i < j$;
 - γ_j tem o mesmo sinal de γ_i ;
 - as Eqs. 4.144 e 4.145 são satisfeitas.
5. Fim do loop em j ;
6. Se C tem mais de um vórtice, calcular $(\gamma_0, \mathbf{x}_0, \sigma_0)$ pelas Eqs. 4.133, 4.134 e 4.135.
7. Se $\sigma_0 < l_M$ e a Eq. (4.140) é satisfeita para cada vórtice em C , substituir o vórtice i pelo resultado da aglomeração de todos os vórtices de C ;
8. Fim do loop em i

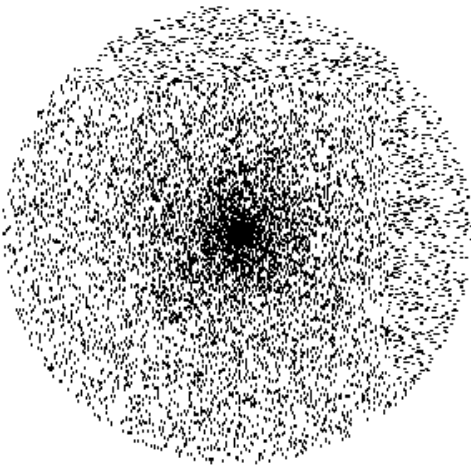


Figura 4.13a – 10.000 vórtices
antes da aglomeração

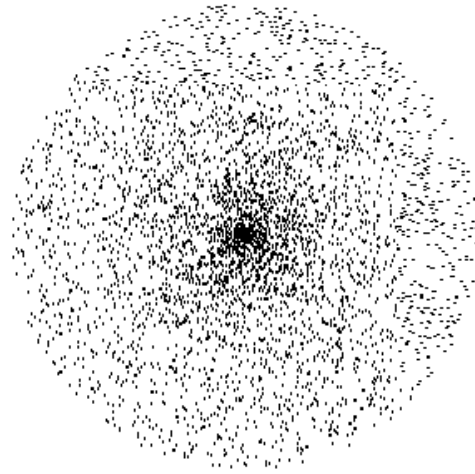


Figura 4.13b – 4.986 vórtices
depois da aglomeração

A Fig. 4.13a permite a visualização de uma distribuição aleatória de 10.000 vórtices em torno de um ponto fixo central. Após o processo de aglomeração, onde os parâmetros utilizados foram $\varepsilon=0.02$; $l_M=0,9$; $l_m=0,5$; $R=0,1$; $b_1=0,9$ e $b_2=1,1$, estes 10.000 vórtices são aglomerados em 4986 vórtices, conforme Fig. 4.13b.

Sendo o custo computacional do Método de Vórtices reduzido pela diminuição de vórtices na esteira, o ganho com a utilização do algoritmo de aglomeração é substancial, porém, o custo computacional deste processo deve ser contabilizado, uma vez que tende a ser de ordem M^2 .

4.8.2. Aglomeração utilizando a hierarquia de caixas do MEMA

Como citado anteriormente, uma alternativa para diminuir o custo computacional envolvido com na aglomeração, é realizar isoladamente a aglomeração em cada caixa resultante da divisão do domínio computacional estabelecida pelo MEMA. Tal procedimento permite a utilização do algoritmo de aglomeração em cada caixa separadamente, evitando avaliar as iterações entre os vórtices que estão em caixas diferentes, o que reduz o custo computacional do processo. A eficiência da aglomeração é garantida pelo fato de que a densidade local de vórtices é mantida sobre controle durante a divisão do domínio em caixas executada pelo MEMA.

O capítulo 5 apresenta o resultados de diversas simulações que compararam o custo computacional e a eficiência nos processos de aglomeração direta (seção 4.7.1), com aqueles obtidos com a aglomeração por caixa (seção 4.7.2). Este procedimento resulta em enorme ganho com relação ao custo computacional, porém não implica em perda de acurácia na simulação como um todo, tendo em vista que o erro introduzido no processo de aglomeração está limitado espacialmente em cada caixa, conforme é apresentado no capítulo 5.

4.8.3. Corte

Outro mecanismo encontrado na literatura é o denominado corte (“cut-off”), que objetiva manter sob controle o número de vórtices, estabelecendo um teto para o tamanho do problema, e mantendo sob controle o crescimento do número de vórtices. Assim, deve-se utilizar o corte em métodos como o MRV e MCNC, uma vez que o refinamento espacial realizado resulta na divisão de vórtices e crescimento exponencial do tamanho do problema. Neste processo de divisão, a intensidade dos vórtices vai sendo dividida sucessivamente, criando regiões com vorticidade extremamente baixa, na fronteira da região rotacional, com uma grande quantidade de vórtices que possuem intensidades muito pequenas, o que representa um esforço computacional desnecessário. Deste modo, o procedimento descrito como corte é adotado, fazendo simplesmente com que vórtices com intensidades inferiores a um parâmetro estabelecido (Γ_{corte}) parem de se dividir,

permanecendo com seu núcleo constante até o final da simulação. A escolha do parâmetro numérico para Γ_{corte} deve ser feita cuidadosamente, tendo em vista representar o limite para o processo de difusão da vorticidade. O valor deste parâmetro deve ser função do escoamento em estudo, do custo computacional admissível e da acurácia desejada.

4.9. Correção do campo de vorticidade para vórtices que cruzam a superfície

A desingularização dos vórtices insere um erro na avaliação do campo de velocidade induzido pelos vórtices que tem o seu núcleo interceptando a placa plana, conforme pode ser visto na Fig. 4.14, uma vez que parte da vorticidade de seu núcleo se encontra dentro do corpo sólido.

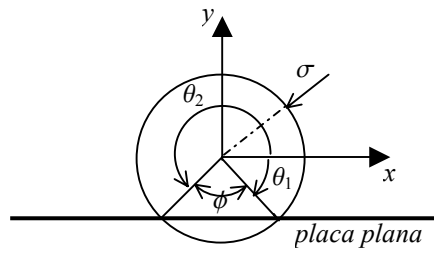


Figura 4.14 – Vórtice com raio σ que cruza a placa plana

Tal erro no campo de velocidades induzido pelos vórtices cujos núcleos cortam a superfície sólida pode ser modificado conforme proposto por Lewis (1991). No entanto, durante a execução deste trabalho, foi desenvolvida uma nova metodologia para esta correção. Propõe-se avaliar a vorticidade presente no escoamento corrigindo simultaneamente a circulação Γ e o raio σ dos vórtices cujos núcleos cruzam a superfície.

A vorticidade real presente no escoamento pode ser encontrada avaliando-se a seguinte integral

$$\Gamma^* = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \omega dA = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\infty} \frac{\Gamma}{\pi \sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r dr d\theta = \left(1 - \frac{\phi}{2\pi}\right) \Gamma, \quad (4.146)$$

onde ϕ define o arco que está dentro da placa, conforme Fig 4.14.

A Eq. (4.146) corrige a circulação que deve ser aplicada para cálculo do campo de velocidade. Desse modo, quando $\phi = \pi$ o vórtice tem metade de seu núcleo dentro do corpo, ou seja, $\Gamma^* = \frac{1}{2}\Gamma$. Por sua vez, quando o vórtice tangencia a superfície $\phi = 0$, ou seja, não é necessária correção da circulação.

A correção do raio é feita a partir da relação $A^* = A_T - A^{**}$, onde A_T é a área total do núcleo do vórtice, A^* é a área acima da superfície e A^{**} é a área abaixo da superfície. Como $A^{**} = \frac{\sigma^2}{2}(\phi - \sin\phi)$, chega-se a

$$\sigma^* = \sqrt{1 - \frac{(\phi - \sin\phi)}{2\pi}} \sigma. \quad (4.147)$$

Deste modo, implementando-se as correções relativas à circulação e ao raio, a velocidade induzida em qualquer ponto do domínio por um vórtice j que corta a placa é calculada

$$u_\theta(r, t) = -\frac{\left(1 - \frac{\phi}{2\pi}\right)\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\left(1 - \frac{(\phi - \sin\phi)}{2\pi}\right)\sigma^2}\right) \right]. \quad (4.148)$$

4.10. Correção para vórtices que penetram no corpo

O passo convectivo dos vórtices é calculado levando-se em consideração as velocidades induzidas pelos painéis e vórtices que formam a matriz de influência, pelos vórtices presentes na esteira, assim como pelo escoamento incidente. A discretização temporal do método de vórtices faz com que seja possível o deslocamento de um vórtice para o interior do corpo, o que é fisicamente impossível.

Deste modo, a modelagem em questão lança mão do esquema de reflexão dos vórtices (SILVA, 2005) que por ventura tenham sido deslocados para o interior do corpo, onde a posição é recalculada sobre a normal ao painel, como pode ser visto na Fig. 4.15.

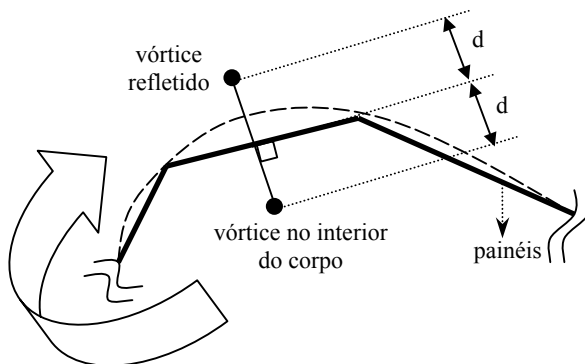


Figura 4.15 – Reflexão de vórtices (SILVA, 2005)

4.11. Suavização da velocidade induzida por vórtices muito próximos aos pontos de controle

A modelagem numérica apresentada utiliza um artifício proposto por Lewis (1991), para suavizar a velocidade induzida por um vórtice sobre o ponto de controle localizado a uma distância menor que um determinado valor. Este procedimento se baseia em considerar a velocidade induzida como um valor médio daquela induzida em pontos próximos do ponto de controle em questão.

Assim, supondo que um vórtice esteja a uma distância inferior a este valor, deve-se avaliar a velocidade induzida sobre os sub-painéis, conforme Fig. 4.16, que utiliza como exemplo quatro sub-painéis, e avaliar a média das velocidades nos pontos de controle dos sub-painéis. Este procedimento suaviza a velocidade induzida por vórtices muito próximos aos pontos de controle dos painéis.

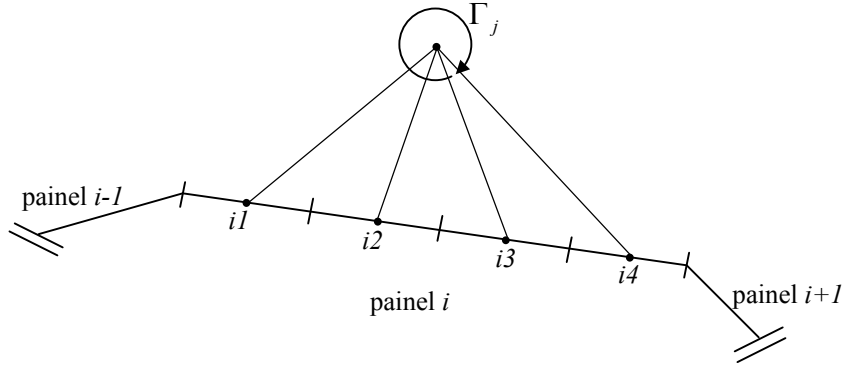


Figura 4.16 – Utilização de sub-painéis

Deste modo, pode-se generalizar a expressão para cálculo da velocidade induzida por um vórtice j sobre um painel i , utilizando N_{sub} sub-painéis, da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{kj} = \frac{1}{N_{sub}} \sum_{p=1}^{N_{sub}} \Gamma_j \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}_{pj} . \quad (4.149)$$

A seguir é apresentado um estudo onde a utilização de sub-painéis é avaliada para a região próxima ao corpo. As Fig 4.17 à 4.21 apresentam resultados para a velocidade induzida sobre o ponto de controle, por um vórtice de Lamb localizado em diversas posições ($\frac{x}{\Delta\ell} = 0$, $\frac{x}{\Delta\ell} = 0,5$ e $y = \Delta\ell$), com intensidade $0,01$, utilizando-se de 1 à 10 sub-painéis retos e curvos, onde x e y são coordenadas locais dos painéis (Fig. 4.14).

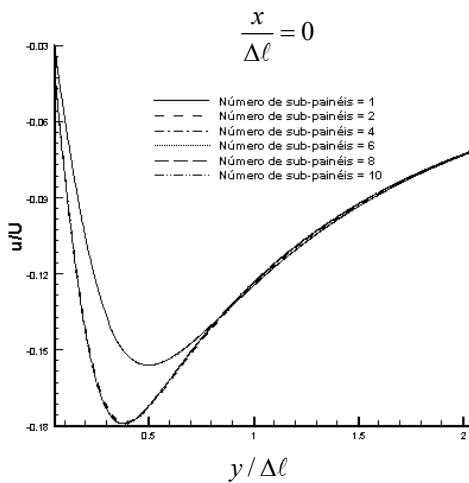


Figura 4.17a – u/U , vórtice de Lamb em $\frac{x}{\Delta\ell} = 0$ e sub-painéis retos.

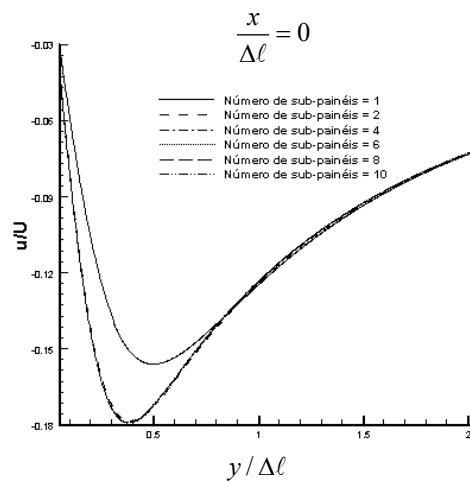


Figura 4.17b – u/U , vórtice de Lamb em $\frac{x}{\Delta\ell} = 0$ e sub-painéis curvos.

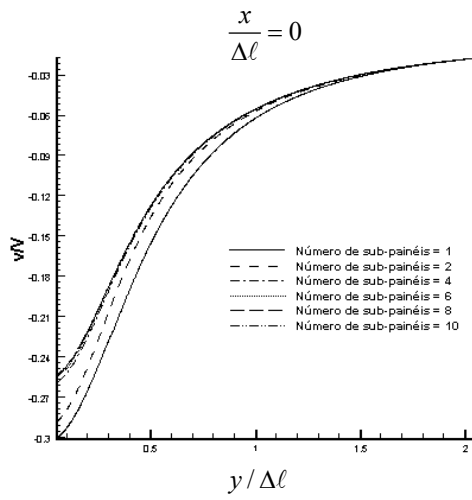


Figura 4.18a – v/V , vórtice de Lamb em $\frac{x}{\Delta\ell} = 0$ e sub-painéis retos.

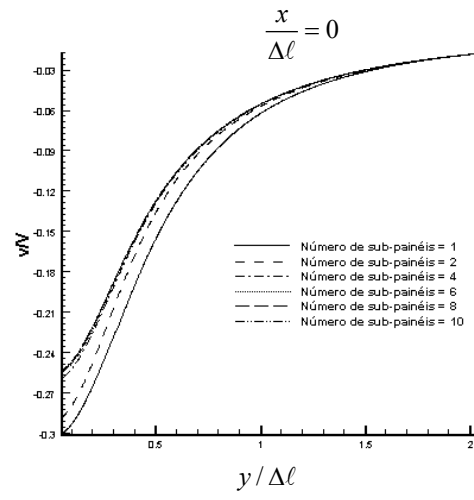


Figura 4.18b – v/V , vórtice de Lamb em $\frac{x}{\Delta\ell} = 0$ e sub-painéis curvos.

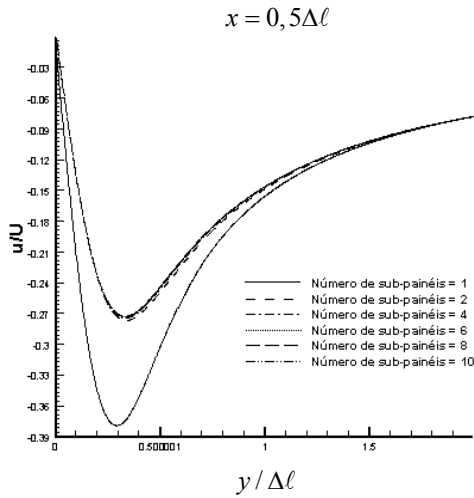


Figura 4.19a – u/U , vórtice de Lamb em $x = 0,5\Delta\ell$ e sub-painéis retos.

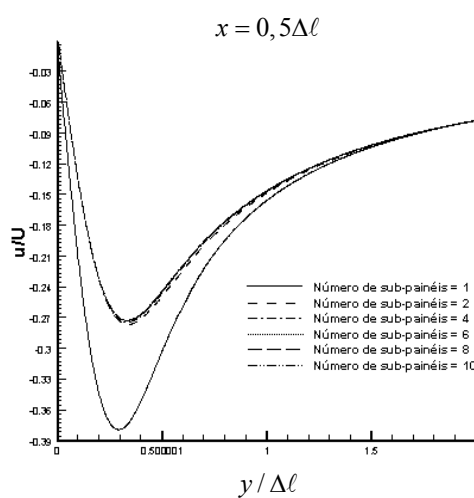


Figura 4.19b – u/U , vórtice de Lamb em $x = 0,5\Delta\ell$ e sub-painéis curvos.

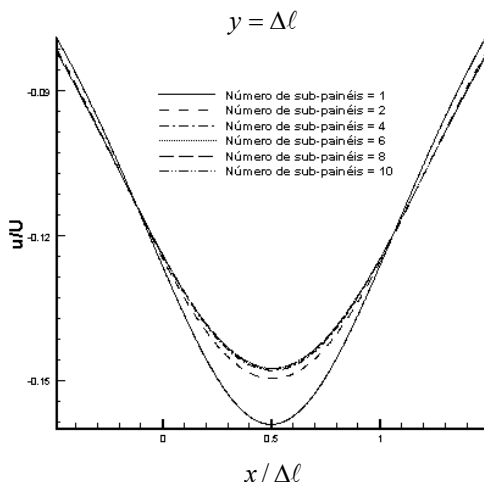


Figura 4.20a – u/U , vórtice de Lamb em $y = \Delta\ell$ e sub-painéis retos.

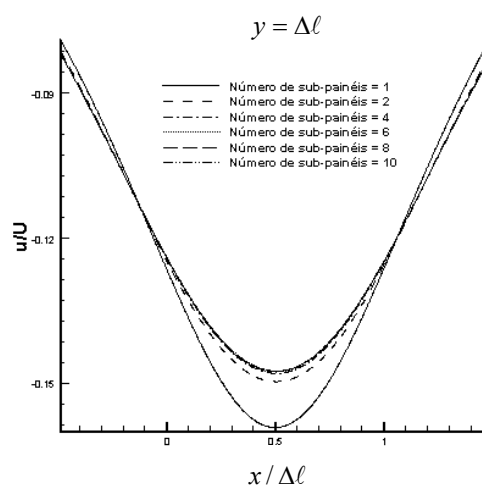


Figura 4.20b – u/U , vórtice de Lamb em $y = \Delta\ell$ e sub-painéis curvos.

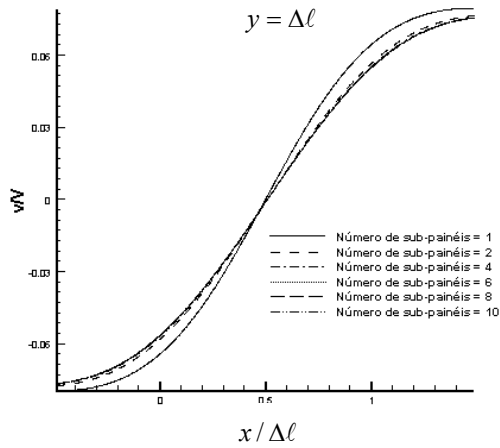


Figura 4.21a – v/V , vórtice de Lamb em $y = \Delta\ell$ e sub-painéis retos.

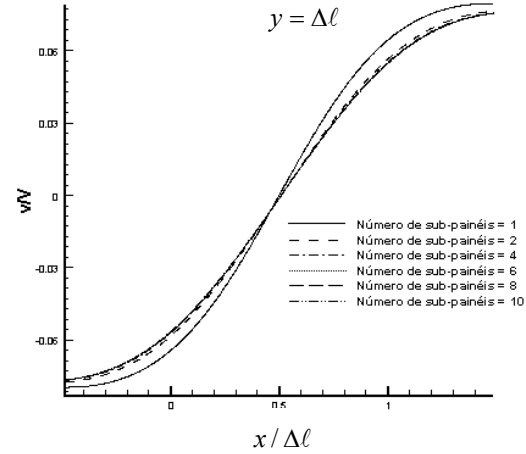


Figura 4.21b – v/V , vórtice de Lamb em $y = \Delta\ell$ e sub-painéis curvos.

As Fig 4.17 a 4.21 permitem concluir que, para qualquer posição relativa entre o vórtice e o ponto de controle, não há diferença gráfica na velocidade induzida quando se utiliza um número de sub-painéis superior a quatro, quer para painéis retos, quer para painéis curvos. As referidas figuras permitem que se arbitre também como $\Delta\ell/2$ a distância ao ponto de controle, a partir da qual a aplicação de sub-painéis não é realizada. Na simulações realizadas neste trabalho, utilizou-se, portanto, 5 sub-painéis, os quais são empregados quando o vórtice dista menos que $\Delta\ell/2$ do ponto de controle do painel.

4.12. Atualização das Condições de Contorno

Sendo o escoamento considerado impulsivo, ou seja, incide instantaneamente em todos os pontos do domínio fluido em $t = 0^+$, o termo independente b dos sistemas de equações algébricas lineares descritos anteriormente, quer para painéis com distribuição de vorticidade constante (4.48) ou linear (4.71), quer para painéis sem curvatura (4.98), ou com curvatura (4.99), deve ser atualizado porque a simulação evolui de uma situação em que b é formado apenas pelo escoamento incidente, para uma situação em que os vórtices adicionados na esteira também devem ser considerados. Esta evolução das condições de contorno caracteriza a transição de um problema inicial, em equilíbrio e puramente

potencial, para um problema transiente em que a região rotacional é simulada pela inserção de vórtices gerados na interação do fluido com o sólido.

Deste modo, deve-se adicionar ao vetor independente b_i a parcela correspondente à velocidade induzida no ponto de controle i pelos vórtices k presentes na nuvem, chegando-se ao novo vetor independente do sistema (4.98) ou (4.99), respectivamente para painéis retos ou curvos,

$$b_i = -U_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{n}_i - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{ik} \mathbf{n}_i, \text{ para, } 1 < i < N, \quad (4.150)$$

$$b_i = -U_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{t}_i - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{ik} \mathbf{t}_i, \text{ para, } N+1 < i < 2N, \quad (4.151)$$

onde α é o ângulo de ataque, $\mathbf{n}_i$ e $\mathbf{t}_i$ são, respectivamente, os vetores normal e tangencial ao painel i .

Assim, o termo $\sum_{k=1}^M \Gamma_k \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{ik}$, nas equações acima, refere-se à velocidade induzida no

ponto de controle i pelos vórtices k presentes na nuvem.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DOS TESTES DE DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

A modelagem numérica desenvolvida neste trabalho foi apresentada em detalhes no capítulo 4, permitindo a compreensão dos métodos aplicados em cada etapa da simulação e estabelecendo a interdependência entre eles. Deste modo foram deduzidas as equações que representam o problema em estudo, de acordo com as hipóteses consideradas, buscando uma contribuição no sentido de incorporar ao modelo como um todo, processos que melhor representem a situação física de interesse.

O Método dos Painéis foi descrito, ainda no capítulo 4, de maneira a percorrer todos os detalhes de sua implementação numérica, como a escolha das singularidades, seu modelo de representação ao longo da superfície, e o refinamento do corpo em painéis retos e curvos. O presente capítulo apresenta resultados para o escoamento potencial ao redor de um aerofólio de Van de Vooren, visando a avaliar as melhorias introduzidas no modelo, ou seja, comparando os resultados obtidos com painéis retos com aqueles obtidos com painéis curvos, e propiciando uma validação através da comparação com um escoamento que possui solução conhecida.

Ainda no que diz respeito à comparação entre painéis com e sem curvatura, diversos testes foram conduzidos para os campos de velocidade gerados nas proximidades do corpo. Tais testes também são mostrados neste capítulo, o que permite identificar a aplicabilidade, as regiões de concordância e as vantagens na utilização de cada uma destas modelagens.

O capítulo 4 também descreve o avanço, no que diz respeito ao custo computacional, ao se lançar mão do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA). Tal método foi utilizado em substituição ao cálculo direto vórtice-vórtice, que torna impeditivas simulações com elevada discretização do domínio rotacional, ou seja, simulações com elevado número de vórtices, uma vez que seu custo computacional era da ordem de M^2 , onde M é o número de vórtices livres presentes na simulação. O presente capítulo apresenta resultados que ilustram a enorme aceleração conseguida com a aplicação do MEMA, onde se obtém um custo computacional da ordem de M , demonstrando ainda sua alta capacidade de adaptação à diferentes distribuições espaciais.

Como dito anteriormente, o recobrimento dos núcleos dos vórtices é a característica que garante a convergência do método. No entanto, um recobrimento excessivo, além de aumentar os erros de truncamento, contribui substancialmente para elevar o custo computacional da etapa convectiva. Desta maneira, é altamente desejável que se mantenha controlado o nível de recobrimento dos raios dos vórtices. Para tanto, recorre-se ao algoritmo de Rossi (1997) para realizar o processo de aglomeração descrito no capítulo 4, cujos resultados são apresentados no presente capítulo. Por outro lado, o custo computacional do algoritmo de aglomeração de Rossi (1997) deve ser compatível com o ganho que este proporciona ao se diminuir o número de vórtices que se encontram com recobrimento excessivo, ou, em outras palavras, o tempo gasto para realizar a aglomeração deve ser justificado pelo ganho de se trabalhar com uma nuvem menor nas demais etapas. Ocorre que o citado algoritmo também possui custo computacional da ordem de M^2 . Por esta razão, e com o objetivo de diminuir este custo, o presente capítulo apresenta como alternativa a utilização da divisão espacial em caixas estabelecida pelo MEMA, empregando o algoritmo de aglomeração para cada caixa isoladamente. Este procedimento reduz em mais de uma ordem de grandeza o tempo de CPU da etapa de aglomeração dos vórtices. Os resultados destes testes também são apresentados neste capítulo.

Ainda no capítulo 4, o enriquecimento da modelagem no processo de difusão se dá através da eliminação da contribuição probabilística do Método de Avanço Randômico (MAR), e da utilização alternativa de três Métodos de Difusão determinísticos que simulam os efeitos viscosos do escoamento. São eles: Método da Velocidade de Difusão (MVD), Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Os resultados das simulações que constam do presente capítulo permitem comparar a eficiência de cada um destes métodos aplicados ao problema de difusão de um vórtice pontual, validar sua implementação numérica utilizando-se a solução proposta por Batchelor (1970) para este problema, e concluir quanto a melhor opção para incorporação no algoritmo completo do Método de Vórtices.

Deste modo, cada um dos aprimoramentos mencionados anteriormente são abordados a seguir, formando um conjunto de resultados parciais, os quais são resultantes da aplicação individual de cada melhoria em separado. A validação dos métodos de difusão é feita pela solução proposta por Batchelor para o problema de vórtice pontual, assim como a validação

da implementação dos painéis com curvatura lança mão da solução analítica para escoamento potencial em torno do aerofólio de Van de Vooren.

5.1. Incorporação do efeito da curvatura no Método dos Painéis

Como parte integrante do Método de Vórtices, o Método dos Painéis se encarrega de resolver o escoamento potencial, determinando a vorticidade gerada na superfície pela satisfação da condição de contorno nos pontos de controle dos painéis.

A discretização do contorno sólido é um procedimento que conduz a um refinamento na solução potencial. A utilização de painéis retos requer um número de painéis elevado para atender às solicitações onde os gradientes das grandezas de interesse são intensos, como os existentes nas regiões de grande curvatura do bordo de ataque de aerofólios. Deste modo, a utilização de painéis curvos representa um avanço na representação do corpo, porque faz com que seja necessário um número de painéis menor para uma acurácia pré-fixada, com reflexos na simulação como um todo.

A aplicação da metodologia de painéis com curvatura pode ser empregada na solução do escoamento potencial, permitindo que se estude o grau de aprimoramento do modelo quando comparado à aplicação de painéis retos. Recorre-se, neste caso, ao aerofólio de Van de Vooren com 15 % de espessura e ângulo de ataque de 10° , como pode ser visto na Fig. 5.1.

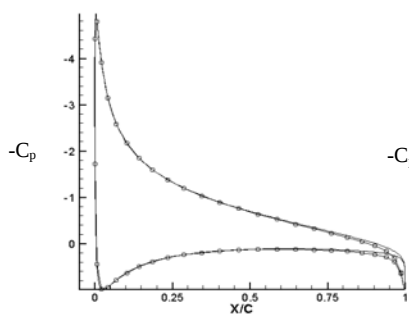


Figura 5.1a – C_p para Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$
N = 50 painéis curvos

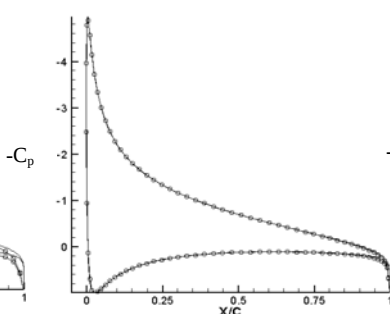


Figura 5.1b – C_p para Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$
N = 100 painéis curvos

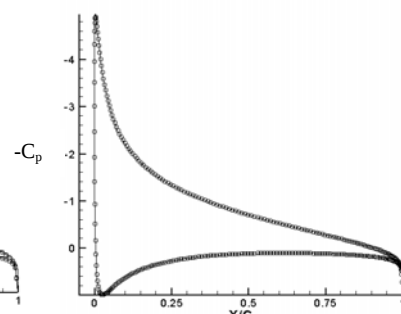


Figura 5.1c – C_p para Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$
N = 300 painéis curvos

Pode-se ainda comparar o resultado encontrado na utilização de painéis curvos com o resultado de painéis retos, sobretudo onde esta diferença se torna ainda mais evidente, ou seja, na região superior do bordo de ataque, como é apresentado nas Fig. 5.2a, Fig. 5.2b e Fig. 5.2c.

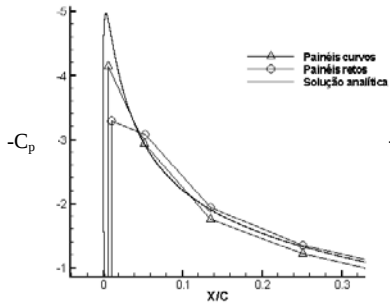


Figura 5.2a – C_p para Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$
N = 20 painéis

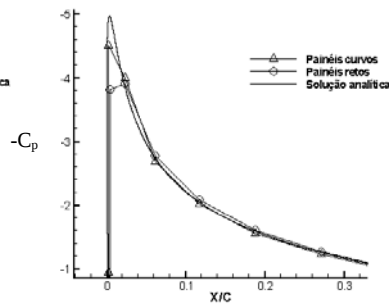


Figura 5.2b – C_p para Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$
N = 30 painéis

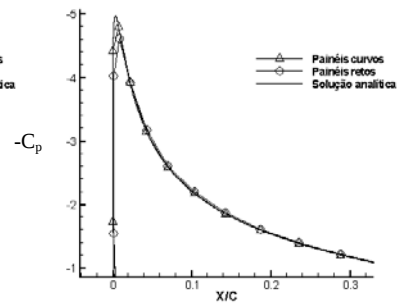


Figura 5.2c – C_p para Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$
N = 50 painéis

A utilização de painéis curvos não apenas melhora a distribuição de pressão na superfície do aerofólio, como também melhora o campo de velocidade induzido nas vizinhanças do painel. Esta melhoria é fundamental para o cálculo da velocidade em vórtices próximos aos painéis.

Por este motivo, é apresentado a seguir um estudo comparativo entre os campos de velocidade gerados por painéis retos e por painéis curvos, visando a obter um entendimento maior sobre a modelagem a ser empregada em cada situação e região estudadas, de acordo com as suas vantagens e desvantagens.

O primeiro caso estudado é o escoamento potencial ao redor de um circular, discretizado com $N = 8$ painéis, com vorticidade constante ao longo do painel, ou seja, há simetria em relação às vorticidades nos nós. A Fig. 5.3 apresenta o campo de velocidade no sistema de coordenadas do painel, em um eixo normal ao painel, em $x/\Delta\ell = 0.5$, induzido por um painel qualquer do cilindro. Cabe ressaltar que os 8 painéis do cilindro têm a mesma curvatura, induzindo campos de velocidade iguais no sistema de coordenadas do painel. Do mesmo modo, o campo de velocidade no sistema de coordenadas do painel induzido em $x/\Delta\ell = 1.0$ para o cilindro com $N = 8$ pode ser visto na Fig. 5.4

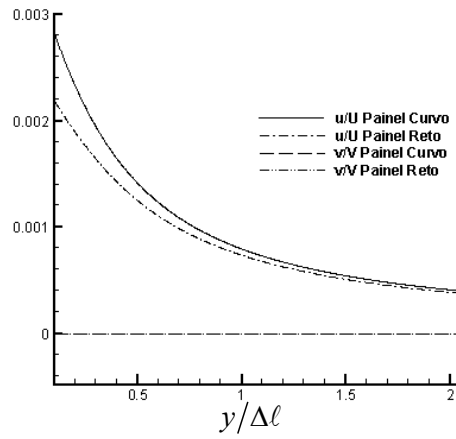


Figura 5.3 – Cilindro, $N = 8$, $x/\Delta\ell = 0.5$

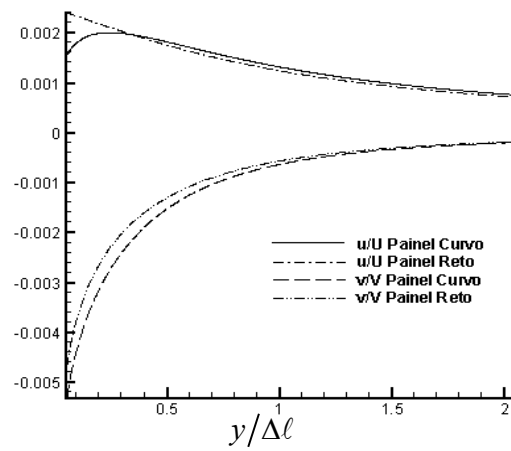


Figura 5.4 – Cilindro, $N = 8$, $x/\Delta\ell = 1.0$

Ainda para o cilindro com $N = 8$, pode-se ver o campo de velocidade no sistema de coordenadas do painel com $y/\Delta\ell = 0.2$, $y/\Delta\ell = 0.5$ e $y/\Delta\ell = 1.0$, respectivamente nas Fig. 5.5, Fig. 5.6 e Fig. 5.7.

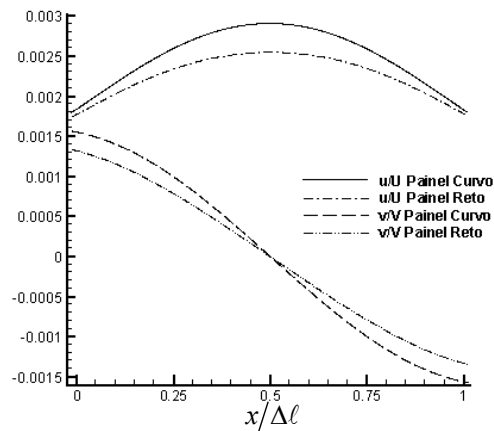


Figura 5.5 – Cilindro, $N = 8$, $y/\Delta\ell = 0.2$

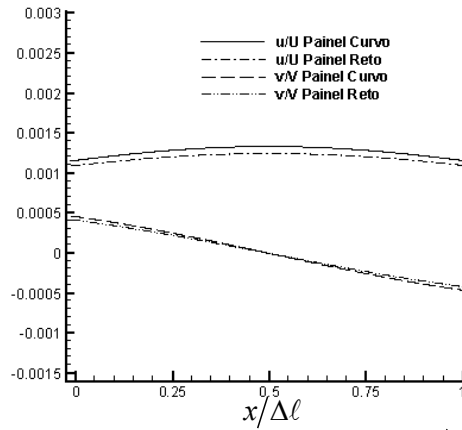


Figura 5.6 – Cilindro, $N = 8$, $y/\Delta\ell = 0.5$

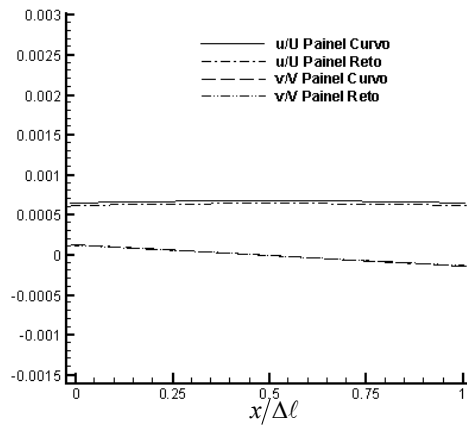


Figura 5.7 – Cilindro, $N = 8$, $y/\Delta\ell = 1.0$

A análise das Fig. 5.3 a. 5.7 permite que se conclua que para o caso considerado, os campos de velocidade induzidos por painéis retos e curvos têm uma coincidência gráfica para pontos distados a partir de $0.5\Delta\ell$ do ponto de controle do painel. Deve-se ressaltar que $N=8$ é uma discretização bastante grosseira, muito inferior da comumente utilizada em uma simulação com o Método de Vórtices.

A seguir são apresentadas as figuras para a simulação de um aerofólio NACA 0012 com $N=100$ e distribuição linear de vorticidade. O campo de velocidade, no sistema de coordenadas do painel, induzido por um painel do bordo de ataque (painel 49) pode ser visto nas Fig. 5.8 a 5.12.

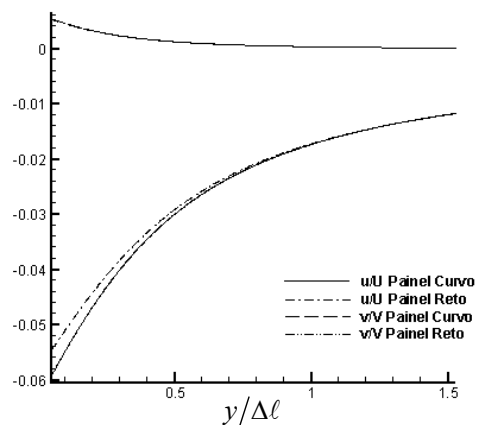


Figura 5.8 – NACA 0012, $N=100$, $x/\Delta\ell=0,5$

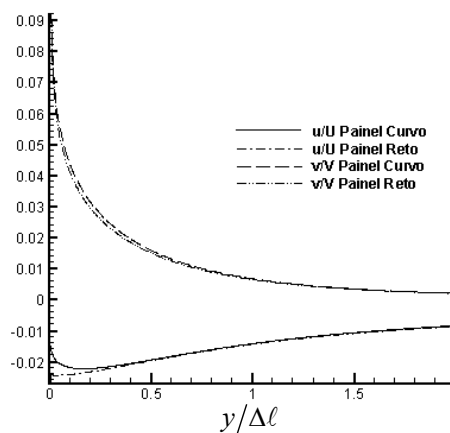


Figura 5.9 – NACA 0012, $N=100$, $x/\Delta\ell=1,0$

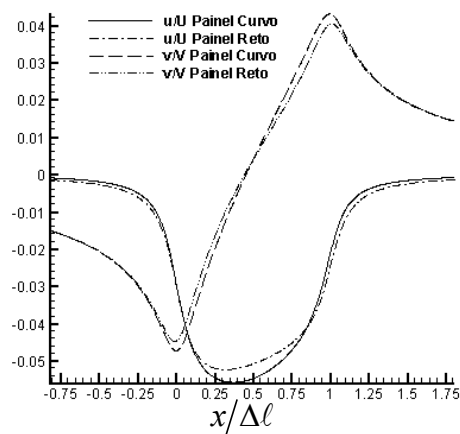


Figura 5.10 – NACA 0012, $N=100$, $y/\Delta\ell=0,1$

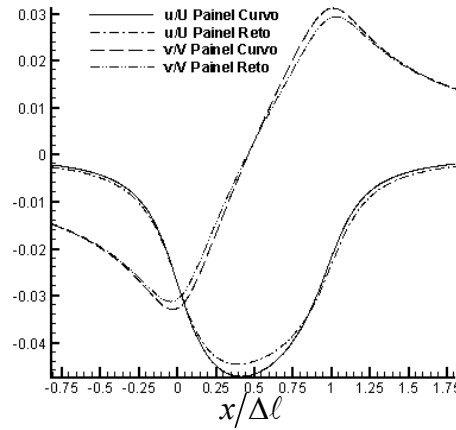


Figura 5.11 – NACA 0012, $N=100$, $y/\Delta\ell = 0,2$

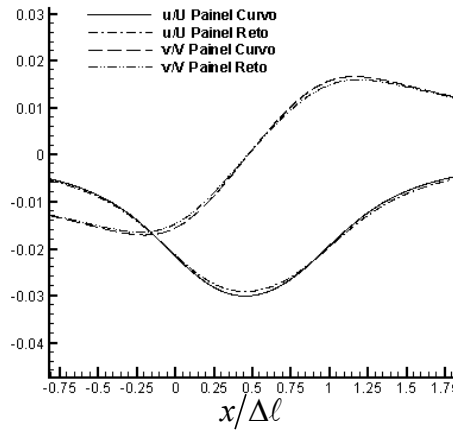


Figura 5.12 – NACA 0012, $N=100$, $y/\Delta\ell = 0,5$

As distribuições de velocidade no sistema de coordenadas do painel mostradas nas Fig. 5.8 a. 5.12, geradas pelo painel 49 do aerofólio NACA 0012 com $N=100$ e distribuição linear de vorticidade, permitem que se conclua que, também para este caso, o campo de velocidade induzido por um painel reto coincide graficamente com o campo de velocidade gerado por um painel curvo quando se avalia a velocidade em pontos que distam mais que $0,5\Delta\ell$ do ponto de controle considerado.

Por último, para conduzir a comparação entre o campo de velocidade induzido por um painel reto e por um painel curvo, foi escolhido o painel de maior curvatura (painel 149) em um aerofólio discretizado em 300 painéis, de modo a testar o grau de sensibilidade do modelo quanto a utilização ou não de painéis curvos para este nível de refinamento. Deste modo, a Fig. 5.13 refere-se ao campo de velocidade, no sistema de coordenadas do painel,

induzido por um painel do bordo de ataque do aerofólio NACA 0012 (painel 149), adimensionalizado pelo seu comprimento $\Delta\ell$, sobre os pontos de uma linha normal ao painel, situada no centro do mesmo ($x = 0,5\Delta\ell$). Observa-se uma boa concordância gráfica entre as velocidades induzidas pelos painéis reto e curvo, sobretudo para a componente v/V . Para a componente u/U a concordância se dá a partir de $y/\Delta\ell$ maior que $0,5\Delta\ell$, ou seja, para um ponto situado a uma distância maior que metade do painel, os campos de velocidade induzidos por painéis curvos e retos são graficamente coincidentes.

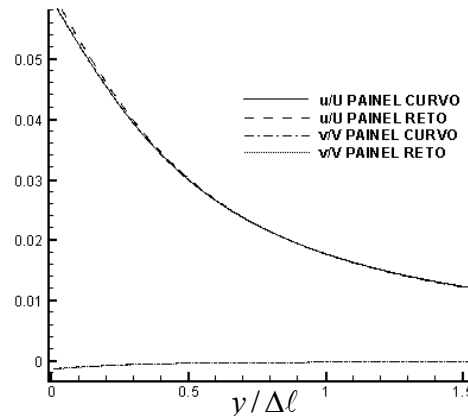


Figura 5.13 – NACA 0012, $N = 300$,
 $x/\Delta\ell = 0.5$

A Fig. 5.14 mostra os componentes de velocidade induzidas pelo mesmo painel do bordo de ataque do aerofólio NACA 0012, no sistema de coordenadas do painel, porém agora sobre uma linha normal ao painel, situada em sua extremidade $\Delta\ell$. Verifica-se concordância gráfica para ambos os componentes u/U e v/V induzidos pelos painéis curvo e reto, para quaisquer valores de $y/\Delta\ell$.

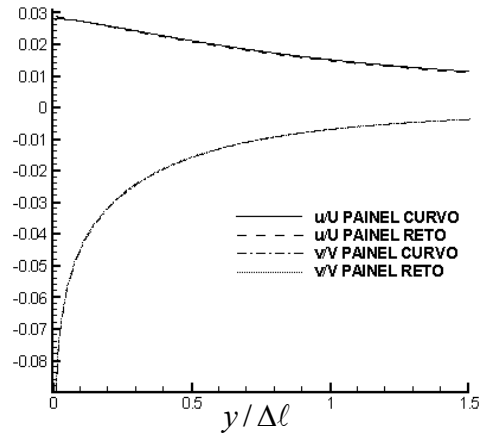


Figura 5.14 – NACA 0012, $N = 300$, $x = \Delta\ell$

As Fig. 5.15, Fig. 5.16 e Fig. 5.17 mostram o campo de velocidade induzido novamente pelo painel 149 do bordo de ataque do aerofólio NACA 0012, porém agora sobre uma linha paralela ao painel, a uma distância de $y = 0,001\Delta\ell$, $y = 0,005\Delta\ell$ e $y = 0,01\Delta\ell$ respectivamente. Nota-se uma perfeita concordância gráfica nos componentes de velocidade para todos os casos.

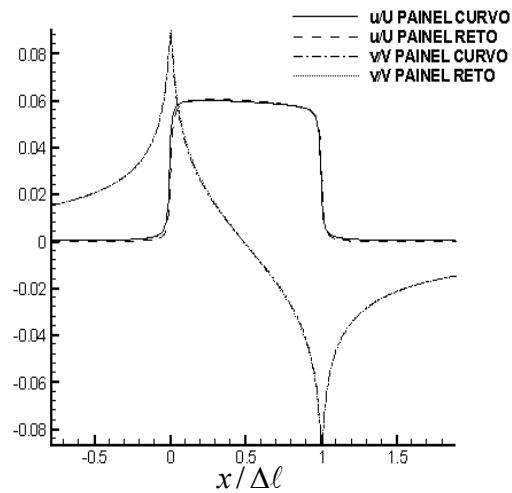


Figura 5.15 – NACA 0012, $N = 300$,
 $y = 0,001\Delta\ell$

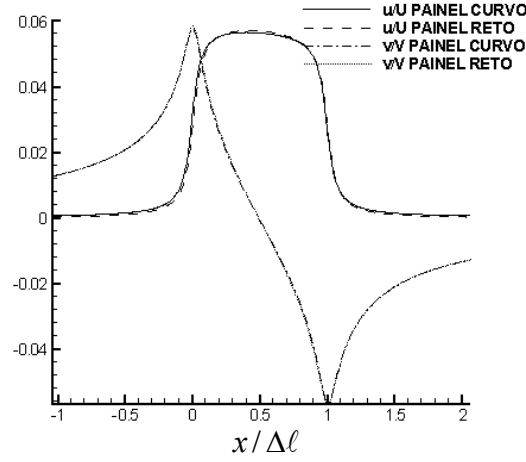


Figura 5.16 – NACA 0012, $N = 300$,
 $y = 0,005\Delta\ell$

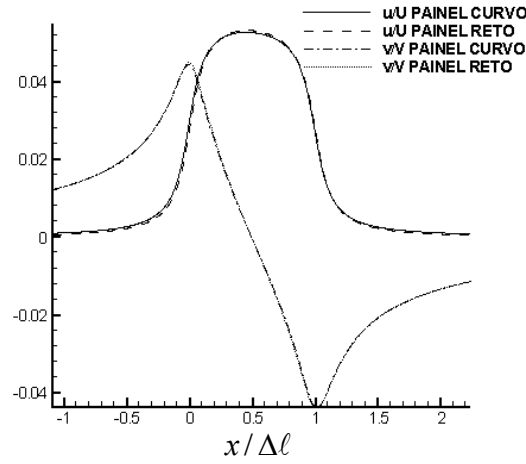


Figura 5.17 – NACA 0012, $N = 300$,
 $y = 0,01\Delta\ell$

O estudo comparativo entre os campos de velocidade induzidos por painel reto e curvo permitiu estabelecer um parâmetro para otimizar a avaliação das velocidades induzidas pelos painéis sobre os vórtices, na etapa convectiva do modelo, dando prioridade à utilização de painéis retos. Tal preferência se deve ao fato do custo computacional relacionado à avaliação numérica das integrais das Eqs. (4.83) e (4.84), para o caso de

painéis curvos, ser maior do que o custo computacional relacionado à avaliação direta das Eq. (4.57) e (4.58), para o caso de painéis retos. Deste modo, e pela análise das Fig. 5.13 à 5.17, as simulações conduzidas por este trabalho utilizaram como parâmetro para avaliação por painéis curvos a distância de referência $0,5\Delta\ell$, ou seja, para vórtices que distam menos que $0,5\Delta\ell$ do ponto de controle do painel, utiliza-se painéis curvos para o cálculo das velocidades induzidas, caso contrário, se a distância ao ponto de controle é superior $0,5\Delta\ell$, utiliza-se painéis retos para o cálculo da velocidade induzida pelo painel sobre o vórtice. Cabe ressaltar que a formação da matriz de influência não leva em consideração este parâmetro, ou seja, todos os coeficientes de influência são calculados com painéis curvos, tendo em vista a pequena quantidade de avaliações efetuadas neste caso.

Desta forma, a utilização de painéis que incorporem curvatura na discretização do corpo introduz no modelo um grau superior de refinamento, permitindo obter resultados semelhantes àqueles alcançados com painéis retos, porém, com a utilização de um número menor de painéis, ou, alternativamente, pode-se trabalhar com o mesmo número de painéis e obter-se resultados mais acurados na simulação. No entanto, como é de se esperar, o custo computacional envolvido com a integração numérica realizada quando se utiliza painéis curvos deve ser levado em consideração para a escolha do modelo. Tais conclusões são resultado dos testes apresentados acima.

5.2. Avaliação do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo - MEMA

A adaptabilidade espacial do algoritmo desenvolvido por Carrier *et al.* (1988) foi avaliada recorrendo-se a quatro tipos de configurações geométricas diferentes, a saber: quadrado com distribuição estatisticamente uniforme (Fig. 5.18a); distribuição estatisticamente não uniforme em torno quatro pontos com posições aleatórias (Fig. 5.18b); distribuição estatisticamente não uniforme em torno de 4 pontos posicionados em linha (Fig. 5.18c); distribuição estatisticamente não uniforme em torno de pontos posicionados em senoide (Fig. 5.18d); e esteira formada por aerofólio estolado (Fig. 5.18e). Para cada caso, as posições exatas dos vórtices são aleatórias, geradas a partir de uma distribuição estatisticamente uniforme.

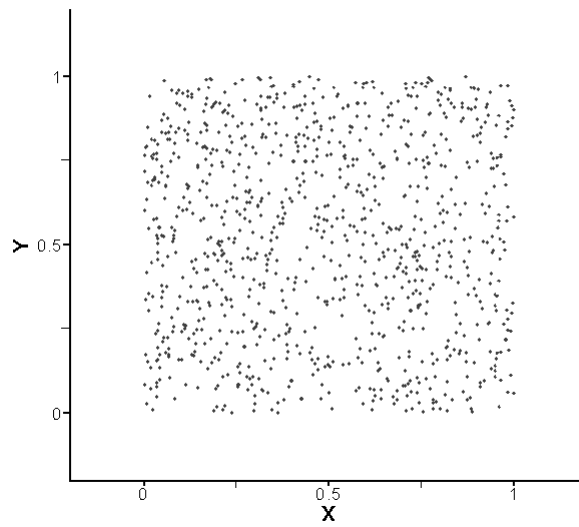


Figura 5.18a - Quadrado com distribuição uniforme

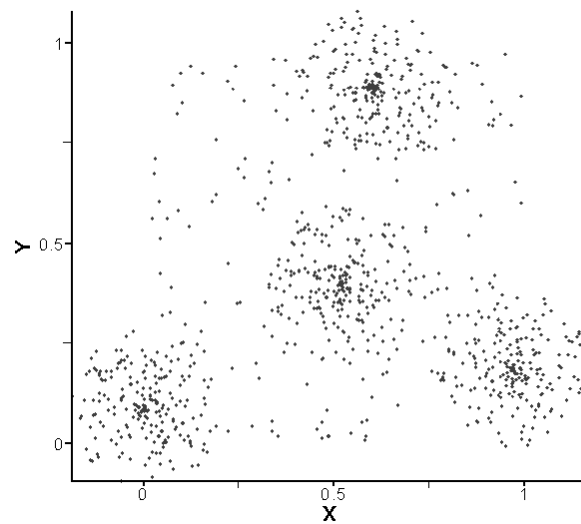


Figura 5.18b - Distribuição não uniforme.

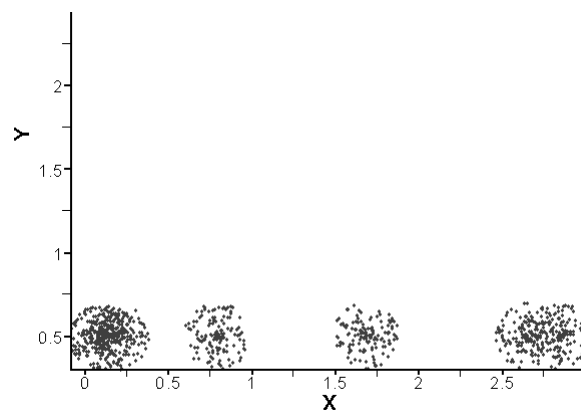


Figura 5.18c - Distribuição não uniforme em linha

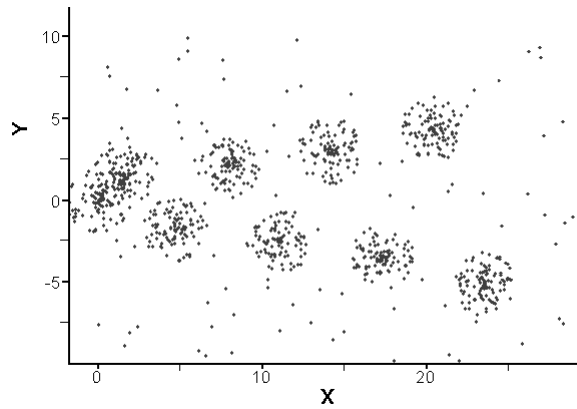


Figura 5.18d – Distribuição em Senóide

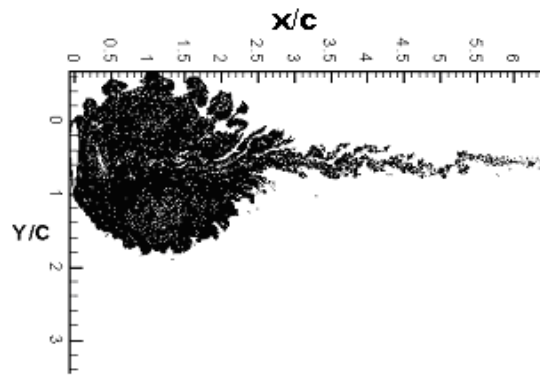


Figura 5.18e – Esteira formada por aerofólio com ângulo de ataque de 90 °

Estas geometrias representam qualitativamente diferentes tipos de configurações instantâneas de esteiras que podem ser obtidas em simulações, com diferentes níveis de concentração e não uniformidade. A Fig. 5.18a representa uma região com bastante uniformidade na distribuição dos vórtices, enquanto que a Fig. 5.18b apresenta uma não uniformidade na distribuição limitada a uma região bem definida. A Fig. 5.18c representa a esteira de um aerofólio com baixo ângulo de ataque, e a Fig. 5.18d uma esteira com ângulo de ataque elevado. A Fig. 5.18e foi gerada com a posição dos vórtices obtida ao se simular o escoamento ao redor de um aerofólio com ângulo de ataque 90°.

As Figuras 5.19a a 5.19e apresentam as curvas de tempo de processamento em função do número de vórtices obtidas pelo cálculo direto com precisão dupla e pelo MEMA para cada geometria citada anteriormente.

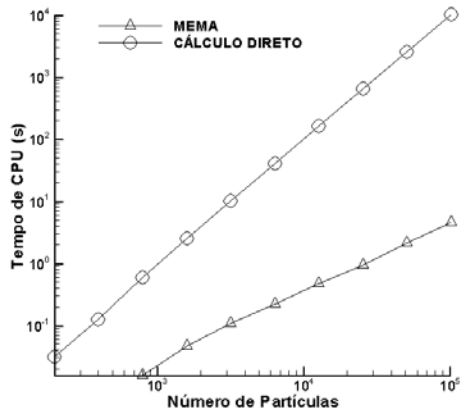


Figura 5.19a. Quadrado com distribuição uniforme.

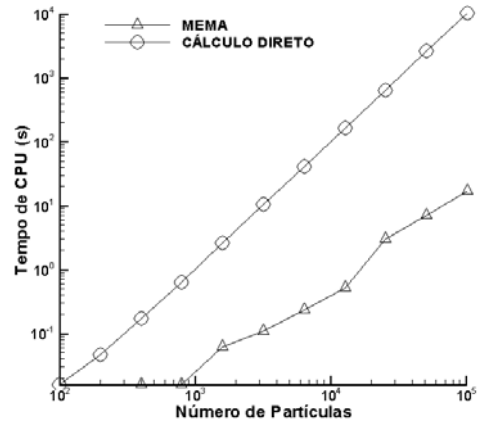


Figura 5.19b. Distribuição não uniforme.

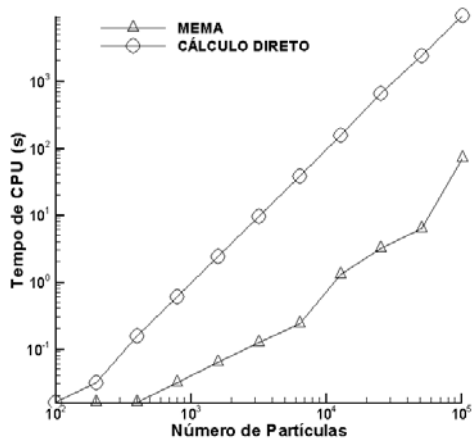


Figura 5.19c. Distribuição não uniforme em linha

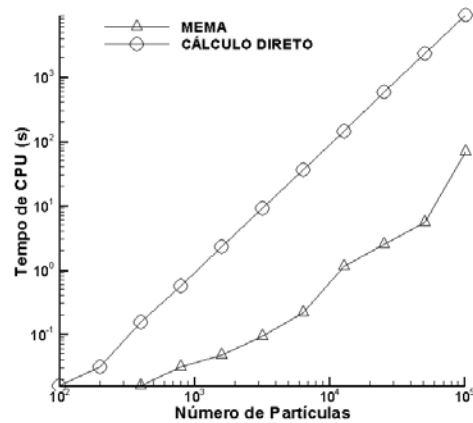


Figura 5.19d. Distribuição em senóide

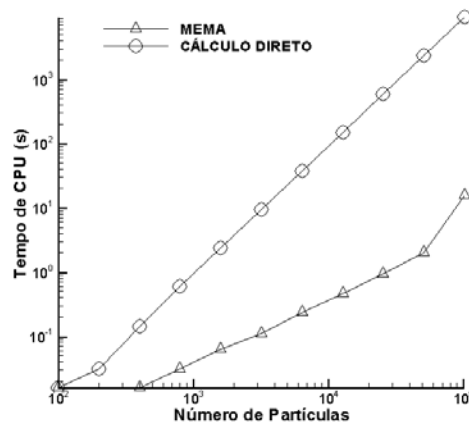


Figura 5.19e. Esteira formada por aerofólio com ângulo de ataque de 90°

O algoritmo do MEMA requer que o domínio que contém a nuvem de vórtices seja dividido sequencialmente em caixas quadradas, até que estas possuam um número de vórtices menor que o número máximo de vórtices por caixa. Este parâmetro é importante para o desempenho do algoritmo. Entretanto, este refinamento também é interrompido quando o tamanho da caixa se torna menor do que a distância para desingularização. Nesta situação, se o refinamento tivesse continuidade, vórtices que devem ser tratados pelo cálculo direto seriam colocados em caixas diferentes, o que faria a interação entre eles ser calculada pela expansão em multipolos. Em outras palavras, a distância para desingularização não pode ser superior ao tamanho da caixa e, por este motivo, regiões com grande densidade de vórtices causam situações em que se deve aumentar o número máximo de vórtices por caixa para se manter o tamanho das caixas superior à distância de desingularização.

Em contrapartida, quando se torna necessário aumentar o número máximo de vórtices por caixa, o tempo de processamento se torna maior, uma vez que o refinamento espacial é interrompido com um número menor de caixas. Como consequência, o número de interações diretas partícula-partícula aumenta. Tal prejuízo no desempenho do código pode ser visualizado nas Fig. 5.19b – 5.19e, onde as retas de desempenho do MEMA se aproximam das curvas obtidas com o cálculo direto. Este comportamento é consequência da multiplicação do número de vórtices por caixa por um fator igual a oito, toda vez que a distância de desingularização ultrapassa o tamanho da caixa onde aquele vórtice se encontra. O procedimento adotado tem como objetivo dobrar o tamanho da menor caixa na próxima chamada do MEMA, tendo em vista que, para a confecção dos gráficos das Fig. 5.19a – 5.19e, o número de vórtices dobra entre cada chamada. A configuração geométrica da esteira simulada na Fig. 5.19a não apresenta a necessidade de se utilizar este procedimento, uma vez que a distribuição estatisticamente uniforme de vórtices mostrada na Fig. 5.19a faz com que não apareça localmente nenhuma região com caixas menores que a distância de desingularização. Para o caso da Fig. 5.19e, verifica-se a aproximação entre as curvas apenas para o último ponto ($M = 10^5$), o que se deve ao fato de que a distribuição de vórtices gerados pelo aerofólio estolado da Fig. 5.19e apresenta, estatisticamente, grande uniformidade.

O procedimento para controle do número máximo de vórtices por caixa, adotado nas simulações apresentadas nos capítulos 6 e 7, respectivamente para placa plana de Blasius e para aerofólio, foi aumentar em apenas 50 vórtices o número máximo de vórtices por caixa, toda vez que a distância de desingularização se tornar maior que o tamanho da caixa. Isto é possível porque, diferentemente das simulações desta seção, que dobram propositalmente o número de vórtices a cada nova avaliação, nas simulações dos capítulos 6 e 7 o número de vórtices cresce a uma taxa muito inferior. Deste modo, o efeito do aumento instantâneo do tempo de CPU, relacionado ao aumento do número máximo de vórtices por caixa, é menos perceptível nas simulações dos capítulos 6 e 7 do que nesta seção.

O desempenho do MEMA pode ser medido de duas maneiras. A primeira, mais facilmente observável nos gráficos das Figs. 5.19a a 5.19e, é o fato de que a ordem de grandeza dos tempos de CPU obtidos para as simulações com o MEMA é muito menor do que a ordem de grandeza dos tempos de CPU obtidos com o método direto partícula-partícula. Por exemplo, pelo cálculo direto, são necessários aproximadamente 10^2 s para processar 10^4 vórtices e 10^4 s para processar 10^5 vórtices, em todas as configurações geométricas estudadas. No caso do MEMA, são necessários 0,5 s para processar 10^4 vórtices e 5 s para 10^5 vórtices. Como se pode ver nas figuras, o tempo de CPU requerido pelo MEMA é muito menor. Por outro lado, o exemplo acima serve também para ilustrar a segunda observação que pode ser inferida. O tempo de processamento obtido pelo método direto é multiplicado por 10^2 ao se multiplicar o número de vórtices por 10, enquanto que, no caso do MEMA, multiplicando-se por 10 o número de vórtices, o tempo necessário também é multiplicado por 10. Este comportamento se deve à inclinação que cada reta tem nas Fig. 5.19a a 5.19e, o que é mais facilmente notado na Fig. 5.19a. Deste modo comprova-se que o custo computacional do MEMA é de ordem M , enquanto que o do cálculo direto é da ordem de M^2 , como esperado.

As Fig. 5.19a a 5.19e também mostram que a inclinação da reta se mantém constante nos intervalos em que o número máximo de vórtices por caixa é mantido constante. A reta aumenta localmente a sua inclinação nos pontos em que há um aumento do número máximo de vórtices por caixa, como claramente mostrado nas Fig. 5.19a a 5.19e, mas retoma a inclinação anterior uma vez mantido fixo o número máximo de vórtices por caixa.

O erro quadrático médio, E , pode ser utilizado como uma medida do erro global introduzido ao se calcular as interações entre as partículas pelo MEMA ao invés de se utilizar o método direto. Esta grandeza é definida pela seguinte expressão

$$E = \left(\frac{\sum_{i=1}^M |f_i - \tilde{f}_i|^2}{\sum_{i=1}^M |f_i|^2} \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

onde f_i é o valor do campo gerado no vórtice i por todos os $M-1$ vórtices, calculado pelo método direto com precisão dupla, enquanto $\tilde{f}_i$ é o valor do campo no vórtice i calculado pelo MEMA. O máximo valor de E encontrado para todos os casos simulados foi de $1,0 \times 10^{-11}$, nos quais foi utilizado um número máximo de vórtices por caixa inicial igual a 30, e uma distância para desingularização igual $5,0 \times 10^{-03}$.

O MEMA foi testado no código computacional desenvolvido por SILVA & BODSTEIN (2005) para a simulação do escoamento ao redor de um aerofólio, visando verificar o ganho em tempo de computação alcançado pela aplicação da expansão em multipolos no Método de Vórtices. A Tab. 5.1 a seguir mostra o tempo de CPU para a realização de simulações utilizando o MEMA, 300 painéis retos, Método do Avanço Randômico para a difusão e 800 passos no tempo, totalizando os 240.000 vórtices presentes em $t = 20$ com $\Delta t = 0,025$.

Tabela 5.1. Tempo de processamento MEMA

Ângulo de Ataque	Tempo de CPU (h): MEMA
0°	21
10°	19
18°	16
45°	15

Simulações de tempo longo tornam o tempo de processamento impeditivo no caso do cálculo direto, que chega a 30 horas para alcançar $t = 10$, em 400 passos no tempo com $\Delta t = 0,025$. Pode-se extrapolar para 168 horas, aproximadamente, o tempo necessário para simulações semelhantes às da Tab. 5.1 utilizando o cálculo direto. Todas as simulações,

com MEMA e com método direto, foram realizadas em uma máquina que possui processador Pentium IV 3.2 GHz, com 2 Gb de memória RAM.

A Tabela 5.1 mostra que há uma dependência entre os tempos de processamento e o ângulo de ataque, que é fruto do grau de espalhamento dos vórtices. Como discutido anteriormente, quanto maior for a densidade local de vórtices, maior será o número máximo de vórtices por caixa no cálculo por expansão em multipolos, tendo em vista que o tamanho da menor caixa tem que ser necessariamente maior que a distância de desingularização (raio do vórtice de Lamb). Assim, baixos ângulos de ataque têm a tendência de formar maiores concentrações de vórtices em sua esteira, implicando em maiores tempos de processamento quando se utiliza a expansão em multipolos do que nos casos de alto ângulo de ataque.

5.3. Processo de aglomeração

O algoritmo de aglomeração estudado no capítulo anterior tem um custo computacional elevado, da ordem de M^2 , o que diminui o benefício de sua utilização nas simulações, à medida que o número de vórtices livres na esteira cresce. Uma alternativa à sua utilização indiscriminada em todo o domínio que compreende a nuvem de vórtices, é a sua aplicação individualizada por caixa, ou seja, divide-se o conjunto de vórtices em caixas, conforme determina o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA) para avaliação do campo de velocidade auto-induzido pelos vórtices, apresentado na seção 4.5.1.

Deste modo, utiliza-se a sub-rotina de expansão em multipolos para se determinar o conjunto de caixas com suas respectivas distribuições de vórtices. A partir deste momento procede-se a aglomeração dos vórtices que estão no interior de cada caixa, substituindo a nuvem inicial por outra com vórtices resultantes da aglomeração realizada. Este procedimento é possível com a utilização de um ponteiro numérico que identifica os vórtices de cada caixa, realizando as iterações necessárias somente nestes vórtices. O custo computacional é reduzido substancialmente, sendo que para uma distribuição uniforme cai para ordem de M .

A seguir são apresentados os resultados para cada tipo de distribuição estudada na seção 5.2, começando com a distribuição uniforme da Fig. 5.18a, cuja comparação do tempo de

CPU entre a aglomeração normal (aglomerando-se todo o domínio) e a aglomeração por caixas é mostrada na Fig. 5.20.

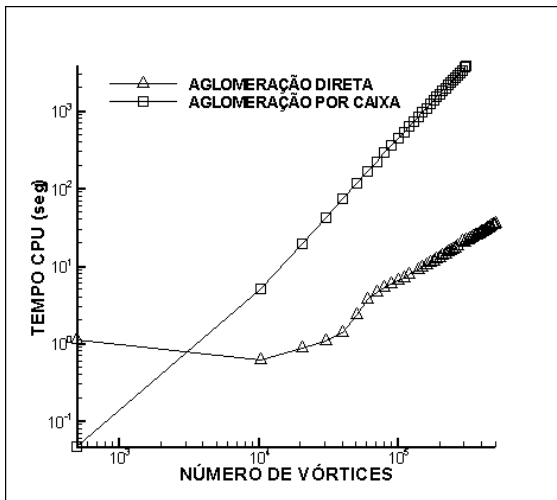


Figura 5.20 – Tempo de CPU aglomeração distribuição uniforme.

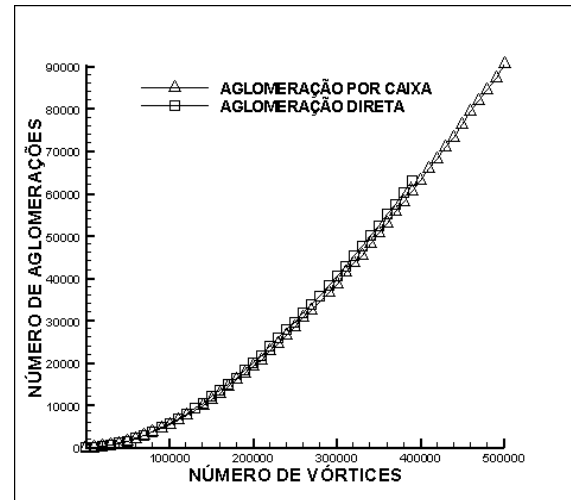


Figura 5.21 – Número de vórtices aglomerados distribuição uniforme.

A Fig. 5.20 permite verificar que o tempo de CPU cai da ordem M^2 para a ordem M , quando utiliza-se a aglomeração por caixa em substituição à aglomeração normal, ao passo que a Fig. 5.21 permite observar que a eficiência no processo de aglomeração é mantida para o mesmo caso da distribuição uniforme da Fig. 5.18 a.

Para os casos das distribuições não uniformes das Fig. 5.18b, Fig. 5.18c e Fig 5.18d, os tempos de CPU não caem para ordem M , porém a melhoria representa uma redução de tempo de CPU de mais de uma década, como pode ser visto nas Fig. 5.22, Fig. 5.24 e Fig. 5.26. Novamente as eficiências destas aglomerações permanecem as mesmas quando comparadas às aglomerações normais, como se vê nas Fig. 5.23, Fig. 5.25 e Fig. 5.27.

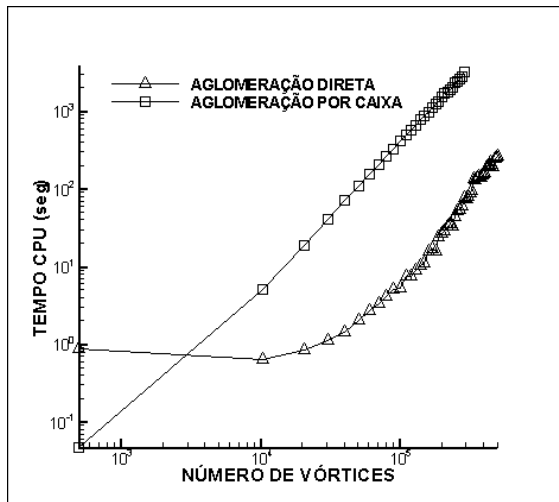


Figura 5.22 – Tempo de CPU aglomeração distribuição não-uniforme.

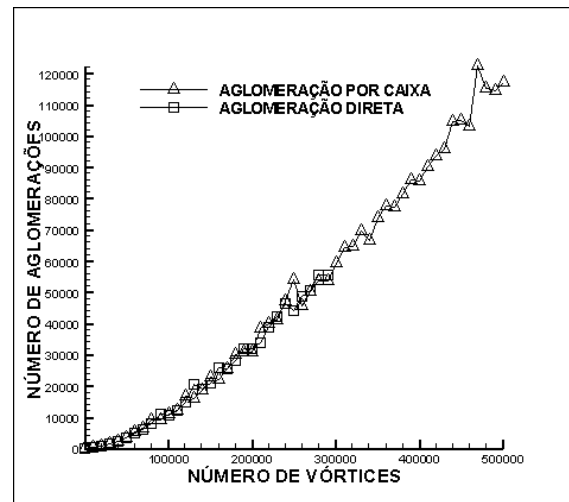


Figura 5.23 – Número de vórtices aglomerados distribuição não-uniforme

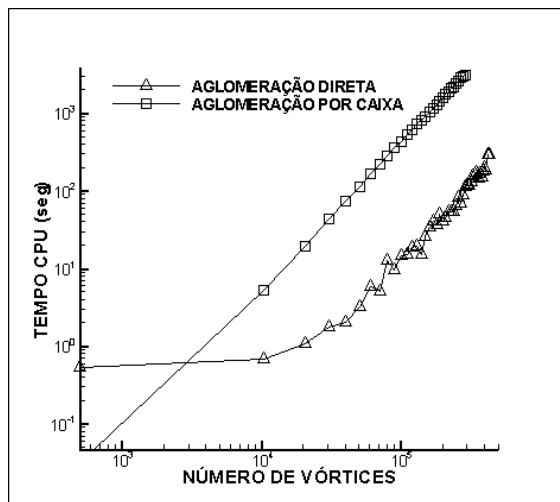


Figura 5.24 – Tempo de CPU aglomeração distribuição não-uniforme em linha reta

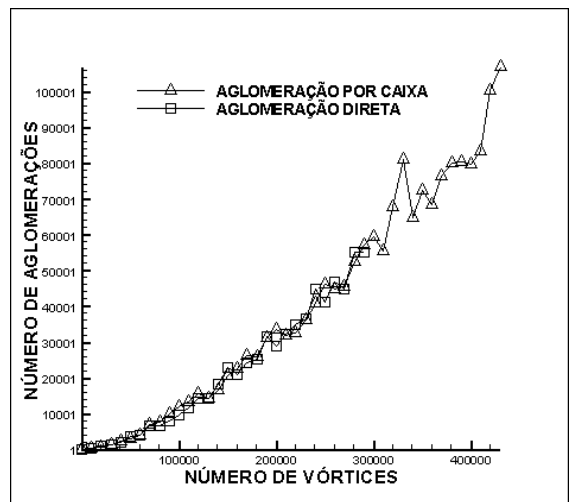


Figura 5.25 – Número de vórtices aglomerados distribuição não-uniforme em linha reta

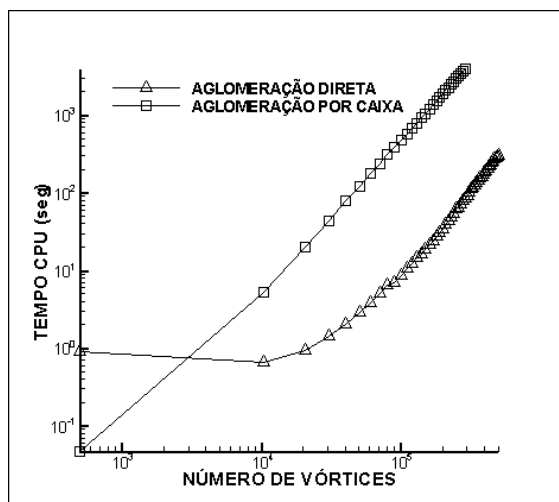


Figura 5.26 – Tempo de CPU aglomeração distribuição não-uniforme em senóide

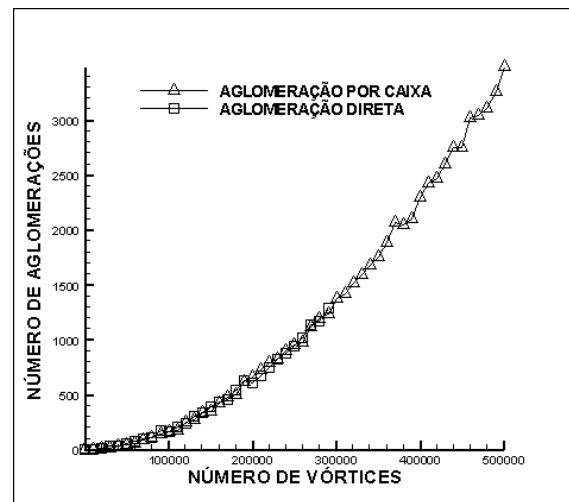


Figura 5.27 – Número de vórtices aglomerados distribuição não-uniforme em senóide

As Fig. 5.29 e Fig. 5.30 apresentam respectivamente o tempo de CPU e o número de aglomerações para o caso da esteira do aerofólio NACA 0012 com 10° de ângulo de ataque, mostarda na da Fig. 5.28.



Figura 5.28 – Esteira de um aerofólio NACA 0012 com 10° de ângulo de ataque

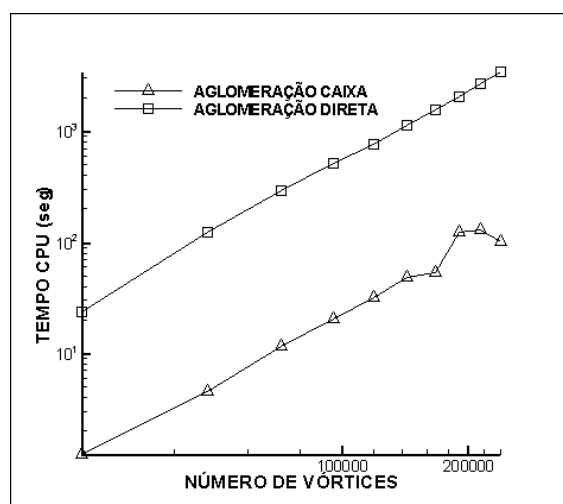


Figura 5.29 – Tempo de CPU aglomeração da esteira da Fig. 5.28

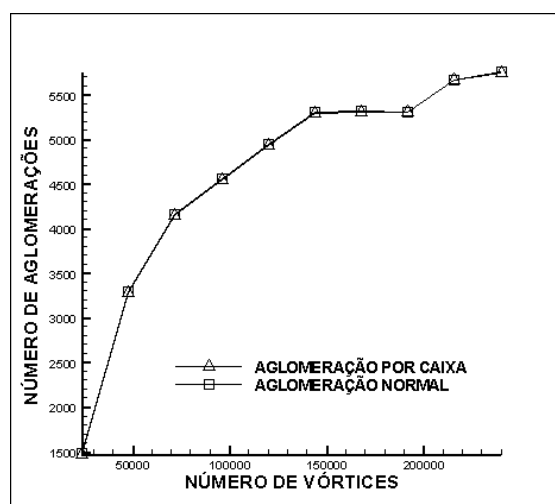


Figura 5.30 – Número de vórtices aglomerados da esteira da Fig. 5.28

Novamente se percebe, de acordo com as Fig. 5.29 e Fig. 5.30, o ganho em custo computacional e a manutenção da eficiência na comparação da aglomeração normal com a aglomeração por caixa, no que se refere a esteira da Fig. 5.28.

A ganho em custo de CPU propiciado pela utilização da aglomeração por caixa permitiu que se efetuasse aglomerações de até 500.000 vórtices, como pode ser visto nas Fig. 5.20 à Fig 5.27. A aglomeração normal de nuvens desta magnitude seria inviável, como pode ser estimado por extrapolação nestas figuras.

5.4. Métodos de Difusão Aplicados ao Vórtice Pontual

Utilizando-se como referência a solução analítica puramente difusiva para um Vórtice pontual, esta seção analisa, do ponto de vista de acurácia e custo computacional, os quatro métodos de simulação da difusão viscosa citados anteriormente: Método do Avanço Randômico (MAR); Método da Velocidade de Difusão (MVD); Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Os resultados permitem apontar mais claramente algumas vantagens e desvantagens de cada método na aplicação destes ao Método de Vórtices.

O problema clássico de difusão de um vórtice pontual é simulado pelo MAR, MRV, MVD e MCNC, tendo em vista a existência de uma solução analítica que permite uma comparação geral entre estes quatro métodos de difusão. Entretanto, a escolha dos diversos parâmetros numéricos influencia os resultados encontrados e dificulta um pouco esta comparação, uma vez que tais parâmetros não mantêm correspondência direta entre os diferentes métodos analisados.

A taxa de variação da vorticidade de um vórtice pontual centrado na origem, com intensidade Γ , é descrita pela Eq. (4.4), a qual, em coordenadas polares, pode ser escrita como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right\}. \quad (5.2)$$

Batchelor (1970) apresenta a solução para a Eq. (5.2), relacionando a distribuição espacial com a temporal. O resultado pode ser expresso por

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right). \quad (5.3)$$

Definindo-se as variáveis adimensionais $\tau = \frac{t\nu}{L^2}$, $r^* = \frac{r}{L}$, $\omega^* = \frac{2\pi L^2 \omega}{\Gamma}$, a Eq. (5.3) se torna

$$\omega^* = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{r^{*2}}{4\tau}\right). \quad (5.4)$$

A seguir são apresentados os resultados para o caso de difusão de um vórtice pontual, localizado na origem, simulado pelo MAR, MRV, MVD e MCNC, de acordo com a modelagem acima e com a adimensionalização feita para a solução teórica da Eq. (5.4). Após a simulação, o campo de vorticidade é determinado utilizando-se a metodologia descrita por Lewis (1991), a qual divide o domínio em coroas circulares concêntricas, sobre as quais é calculada a vorticidade de acordo com o número de vórtices encontrados em cada coroa. Alternativamente, o campo de vorticidade também é calculado desingularizando-se os vórtices e aplicando o princípio da superposição de efeitos de toda a nuvem, ou seja, utilizando-se a Eq. (4.131) para cada ponto de interesse.

5.4.1. Método do Avanço Randômico – MAR

Lewis (1991) propõe a simulação da difusão de um vórtice pontual através do deslocamento randômico de um conjunto de N vórtices com intensidade $2\pi/N$, todos partindo da origem e se deslocando como descrito na seção 4.5.1. Tal procedimento foi executado para $N = 1000$, utilizando inicialmente um único passo no tempo ($NT = 1$). A Fig. 5.31 compara os resultados obtidos calculando-se ω^* através da metodologia descrita por Lewis (1991), a qual divide o domínio em coroas circulares concêntricas, com a solução analítica da Eq. (5.4)

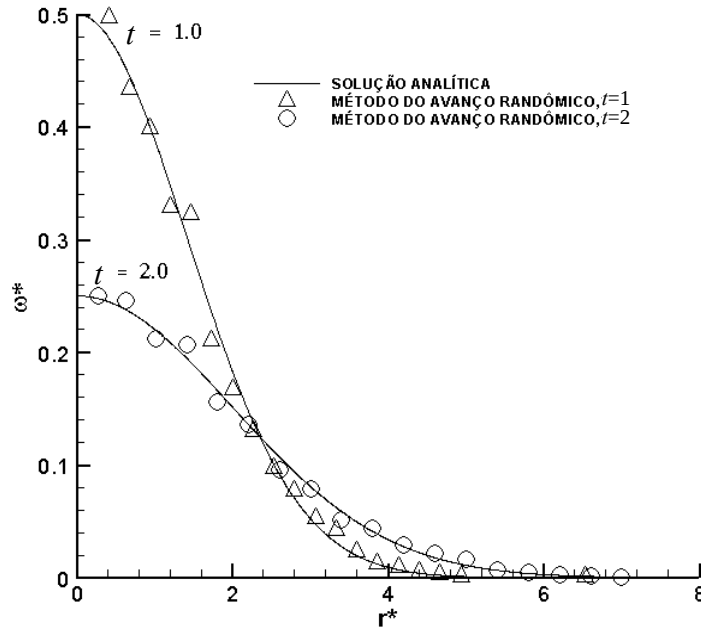


Figura 5.31 - Vórtice pontual
MAR: $M = 1000$ e $NT = 1$.

As Fig. 5.32 e 5.33, geradas utilizando-se o princípio da superposição da Eq. (4.131), apresentam a análise de convergência ao se variar o número de passos no tempo para atingir $\tau = 1$ e $\tau = 2$, respectivamente. Verifica-se, em primeiro lugar, que o princípio da superposição fornece resultados mais acurados do que a metodologia descrita por Lewis (1991), a qual divide o domínio em coroas circulares concêntricas, quando comparados com a solução analítica. Em segundo lugar, conclui-se que há uma melhora nos resultados com o aumento de NT .

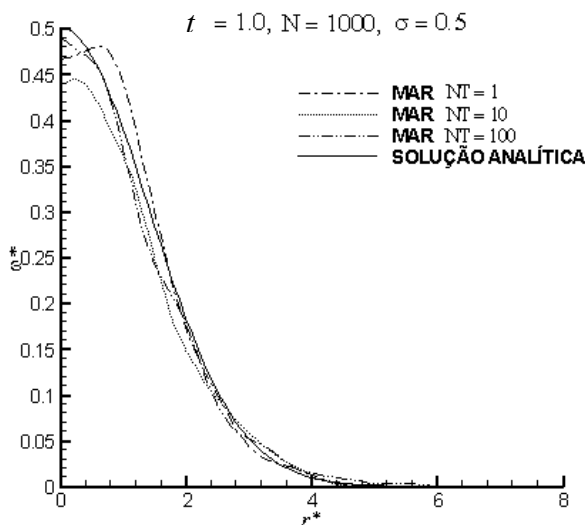


Figura 5.32 - Vórtice pontual
MAR: $t = 1$; $M = 1000$; $\sigma = 0.5$

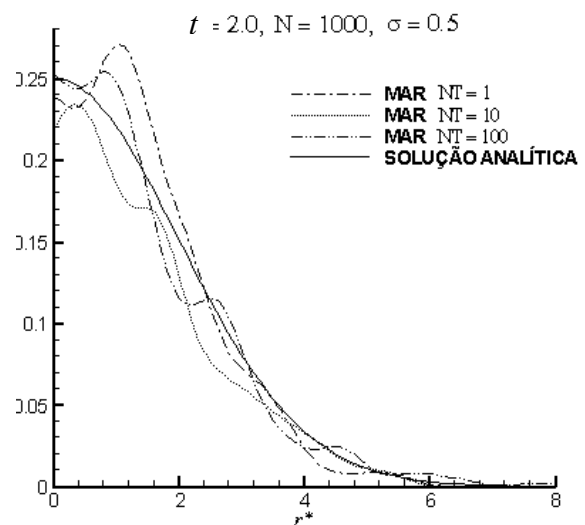


Figura 5.33 - Vórtice pontual
MAR: $t = 2$; $M = 1000$; $\sigma = 0.5$.

As Fig. 5.34 e 5.35, geradas com o princípio da superposição (Eq. 4.131), apresentam a análise de convergência para o raio do núcleo do vórtice σ , para $t = 1$ e $t = 2$, respectivamente. Verifica-se uma melhora na convergência com o aumento de σ , devido ao aumento da interseção entre os núcleos dos vórtices.

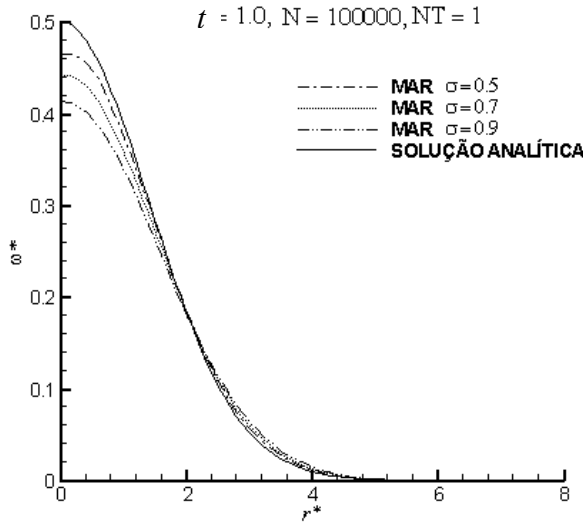


Figura 5.34 - Vórtice pontual
MAR: $t = 1$; $M = 100000$; $NT = 1$

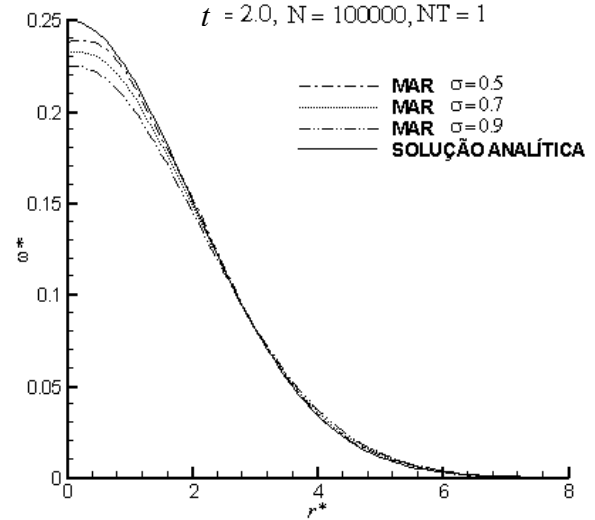


Figura 5.35 - Vórtice pontual
MAR: $t = 2$; $M = 100000$; $NT = 1$

As Fig. 5.36 e 5.37, mais uma vez geradas com o princípio da superposição (Eq. 4.131), apresentam a análise de convergência para o número de vórtices N , para $\tau = 1$ e $\tau = 2$, respectivamente. Há uma clara melhora na convergência quando N aumenta.

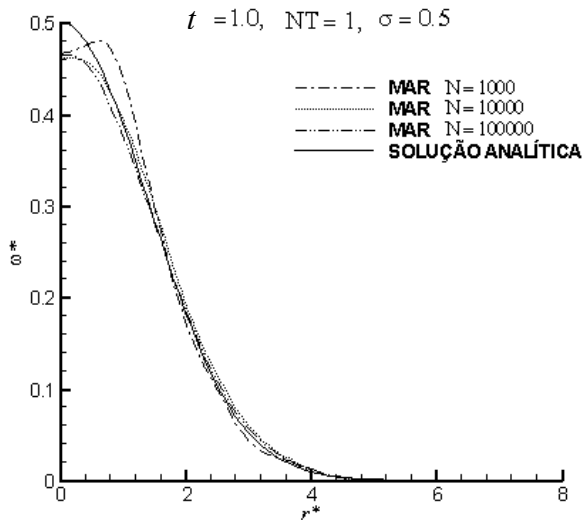


Figura 5.36 - Vórtice pontual
MAR; $t = 1$; $NT = 1$; $\sigma = 0.5$.

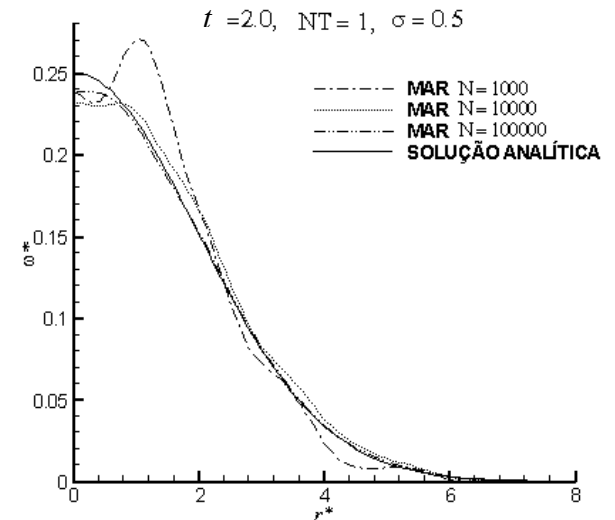


Figura 5.37 - Vórtice pontual
MAR; $t = 2$; $NT = 1$; $\sigma = 0.5$.

5.4.2. Método da Redistribuição de Vorticidade - MRV

A simulação da difusão de vorticidade do vórtice pontual utilizando-se o MRV foi realizada seguindo-se a formulação apresentada na seção 4.6.2 e os resultados são comparados com a solução teórica da Eq. (5.4). Deste modo, um vórtice com intensidade inicial 2π é posicionado na origem no instante $\tau = 0$, dando início à simulação. Uma vez que não existem vórtices vizinhos, o sistema (4.121) não apresenta solução possível, sendo necessária a criação de seis novos vórtices, distando $\sqrt{6}$ do vórtice inicial. Deste modo, novos vórtices são criados a cada passo no tempo, o que aumenta a área abrangida pelos vórtices a partir da origem e possibilita que o sistema (4.121) seja resolvido, determinando-se, assim, as parcelas de vorticidade que devem ser trocadas entre os vórtices.

As Fig. 5.38 e 5.39 apresentam os resultados das simulações para o campo de vorticidade calculados, respectivamente, pela metodologia descrita por Lewis (1991), a qual divide o domínio em coroas circulares concêntricas, e pelo procedimento de superposição de efeitos Eq. (4.131). Novamente observa-se que o princípio da superposição fornece resultados mais acurados e com menos dispersão que o método dos anéis concêntricos. Além disso, nota-se a grande acurácia dos resultados produzidos pelo MRV em comparação com a solução analítica.

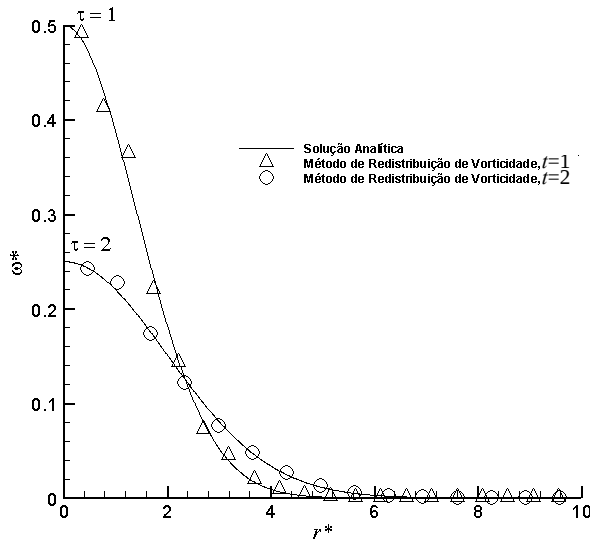


Figura 5.38 - Vórtice pontual
MRV: Lewis (1991)

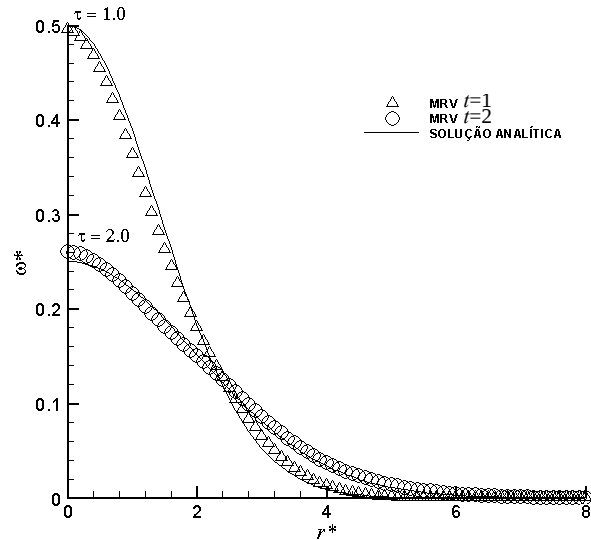


Figura 5.39 - Vórtice pontual
MRV: superposição

5.4.3. Método da Velocidade de Difusão – MVD

A difusão de um vórtice pontual foi simulada desta vez utilizando-se a metodologia apresentada na seção 4.6.3, no entanto, esta implementação apresenta a dificuldade adicional de não se contar com o gradiente do campo de vorticidade em $\tau = 0$, uma vez que toda a vorticidade está concentrada na origem. Para contornar este problema, deixou-se a simulação evoluir a partir da condição inicial de um vórtice com intensidade 2π , utilizando-se o MCNC por 30 passos consecutivos, gerando-se, assim, um gradiente de vorticidade que permitiu a utilização do MVD a partir deste ponto.

A Fig. 5.40 apresenta os resultados desta simulação para $t = 1$ e $t = 2$ utilizando-se a metodologia descrita por Lewis (1991), a qual divide o domínio em coroas circulares concêntricas. Como observado nos resultados anteriores, os resultados acompanham a curva teórica, mas apresentam alguma dispersão.

As Fig. 5.41 e 5.42, geradas para $t = 1$ e $t = 2$, respectivamente, analisam a convergência do MVD com relação à variação do número de vórtices N , utilizando o princípio da superposição (Eq.4.131). Estas figuras permitem observar que os resultados apresentam melhora à medida que o número de vórtices na simulação, N , cresce.

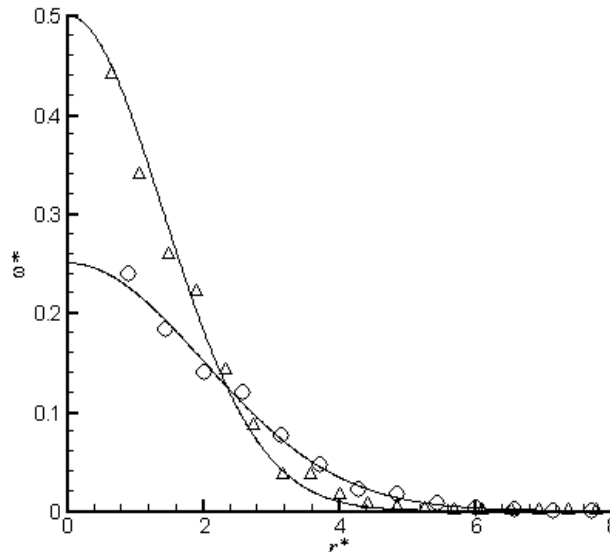


Figura 5.40 - Vórtice pontual
MVD: Lewis (1991)

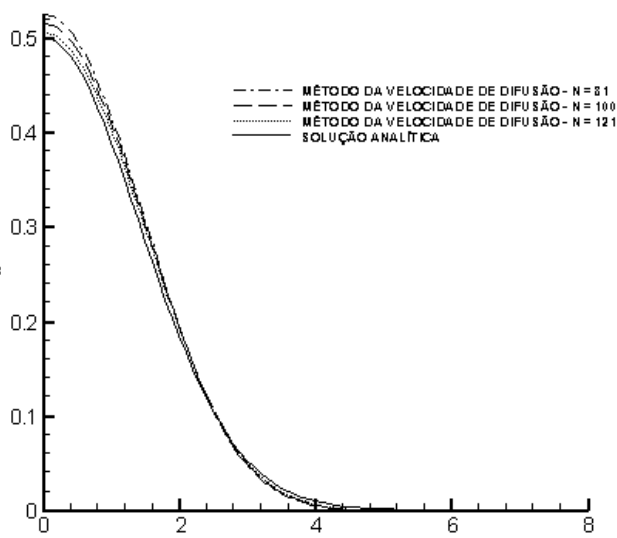


Figura 5.41 - Vórtice pontual
MVD: $t = 1$

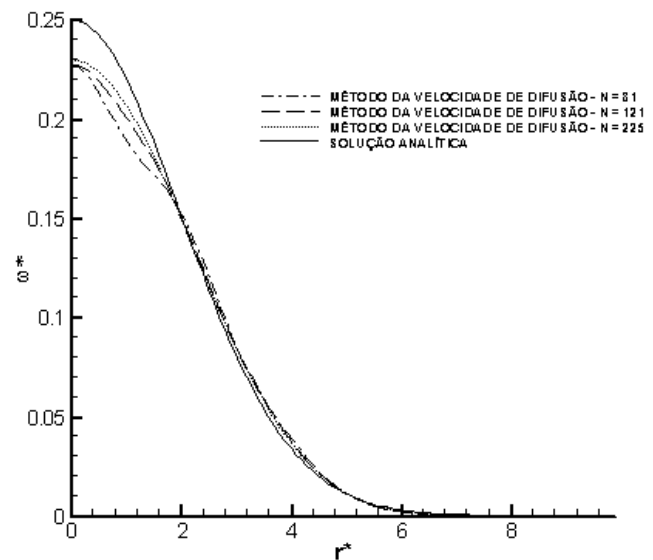


Figura 5.42 - Vórtice pontual
MVD: $t = 2$

5.4.4. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido – MCNC

Os resultados a seguir foram gerados utilizando-se o MCNC para simular a difusão de um vórtice pontual centrado na origem, com intensidade 2π , de acordo com a formulação apresentada na seção 4.6.4. A Fig. 5.43 refere-se novamente à aplicação da metodologia descrita por Lewis (1991), a qual divide o domínio em coroas circulares concêntricas. Mais uma vez observa-se que o cálculo de ω^* utilizando-se esta metodologia produz alguma dispersão nos resultados.

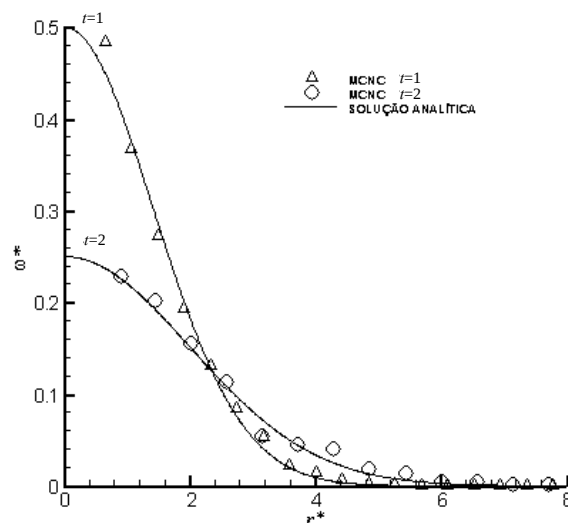


Figura 5.43 - Vórtice pontual
MCNM: Lewis (1991)

As Fig. 5.44 e 5.45 mostram a convergência de ω^* com relação a α para $\tau = 1$ e $\tau = 2$, respectivamente, calculada pelo MCNC utilizando-se o princípio da superposição (Eq. 4.131). Nota-se claramente resultados mais convergidos quando α aumenta.

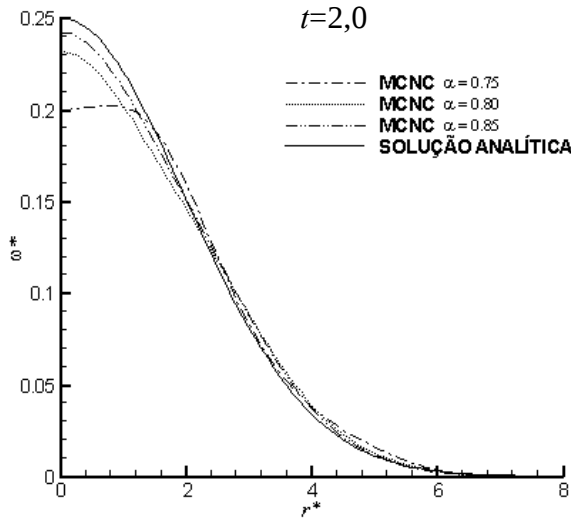


Figura 5.44 - Vórtice pontual
MCNM: $t = 2$

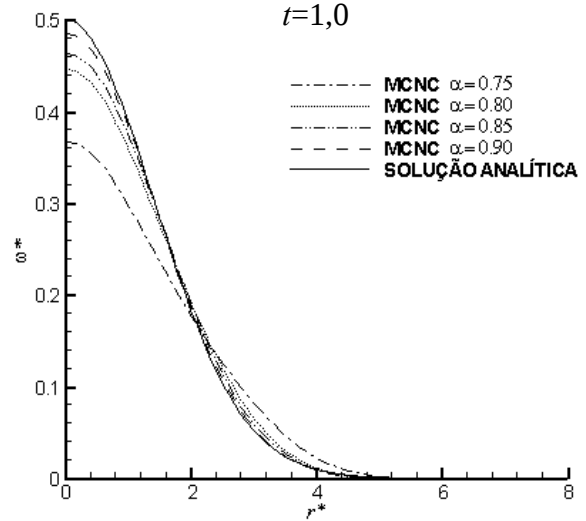


Figura 5.45 - Vórtice pontual
MCNM: $t = 1$

A Tabela 5.2 apresenta resultados que permitem uma análise comparativa entre os métodos quanto a acurácia de cada um. Manteve-se o Δt fixo para todos os casos, variando-se τ apenas para o MRV e para o MCNC com o objetivo de produzir um número de vórtices semelhante para todos. Os demais parâmetros numéricos são os que geram os melhores resultados para cada método, no que se refere ao erro máximo ($E_{\max}$) e ao erro médio ($\bar{E}$) do valor da vorticidade, calculada com a Eq. (4.131) e comparados à solução analítica (Eq.5.4). Define-se o erro médio $\bar{E}$ como a média aritmética do módulo da diferença entre o valor da vorticidade calculada pelo método numérico em questão e o valor exato em cada ponto. Define-se como erro máximo $E_{\max}$ o módulo da diferença máxima entre a vorticidade calculada pela Eq. (4.131) e a solução analítica (Eq. 5.4). Cabe lembrar que os pontos de cálculo da vorticidade são tomados variando-se r^* .

Tabela 5.2 - Erro máximo ($E_{\max}$) e erro médio ($\bar{E}$) da vorticidade.

	$E_{\max}$	$\bar{E}$	M	Δt	t	σ	α
MAR	$5,51205 \times 10^{-3}$	$3,32237 \times 10^{-2}$	1000	0,05	2	0,005	-
MVD	$6,76687 \times 10^{-3}$	$3,46612 \times 10^{-2}$	1089	0,05	2	0,005	-
MRV	$1,97361 \times 10^{-3}$	$8,49746 \times 10^{-2}$	1024	0,05	1,65	0,005	-
	$2,67586 \times 10^{-3}$	$1,11671 \times 10^{-2}$	1521	0,05	2	0,005	-
MCNC	$1,07325 \times 10^{-3}$	$5,35153 \times 10^{-3}$	4447	0,05	2	0,005	0,97
	$2,06599 \times 10^{-3}$	$1,02798 \times 10^{-2}$	1027	0,05	1	0,005	0,97

Do ponto de vista de acurácia, os resultados da Tabela 5.2 permitem que se conclua que o MCNC é superior aos demais métodos porque apresenta os menores erros, enquanto que o MVD é o que apresentou pior desempenho, com erro ligeiramente inferior ao MAR. Porém, deve-se ressaltar que tanto o MAR quanto o MVD produzem oscilações na distribuição de vorticidade resultantes da baixa ocorrência de interseção entre os núcleos dos vórtices, como mostrado nas Fig. 5.33 e 5.37 para o MAR, e Fig. 5.42 para o MVD. Nota-se, entretanto, que as oscilações dos resultados obtidos com o MAR são bem maiores que as do MVD. Estas oscilações impossibilitam o uso do MAR em simulações de grande acurácia, sem um mecanismo que introduza vórtices na região rotacional, de modo a eliminar tais flutuações e garantir a convergência. Nas simulações realizadas, o MVD possui ainda uma limitação quanto ao estabelecimento da condição inicial, pois o gradiente de vorticidade necessário para o cálculo da velocidade de difusão é inexistente em $\tau = 0$. Esta limitação, porém, não existe na sua aplicação no método de vórtices para escoamento externo sobre corpos. Os outros dois métodos, MRV e MCNC, são os que se mostram mais acurados de um modo geral, além de não apresentarem o problema de convergência resultante da baixa ocorrência de interseção entre os núcleos dos vórtices. No entanto, o MCNC possui erros um pouco menores e é muito mais simples de ser implementado.

A Tab.5.3 ilustra os tempos de CPU obtidos para $t = 1$ e $t = 2$, variando-se o passo de tempo, Δt , e o número de vórtices. A comparação entre os quatro métodos simulados, MAR, MRV, MVD e MCNC, quanto ao custo computacional é tarefa bastante complexa e difícil de ser realizada, tendo em vista a inexistência de uma relação entre os diversos parâmetros numéricos de cada método. Como consequência, nem sempre é possível manter o número de vórtices constante entre as diversas simulações. Apesar deste fato tornar difícil o estabelecimento de critérios que permitam uma comparação definitiva, pode-se observar que os resultados, organizados do método mais lento para o mais rápido, são: MRV,

MCNC, MVD e MAR. As diferenças em tempo de CPU são muito grandes entre o MAR e os demais métodos porque o contador de operações do MAR é proporcional a M . Essa diferença, no entanto, diminui muito se considerarmos que, para reduzir drasticamente as oscilações no campo de ω , seria necessário povoar a região rotacional do escoamento com um número muito maior de vórtices, o que aumentaria muito o tempo computacional do MAR. O MVD é intrinsecamente um método lento porque possui contador de operações proporcional a M^2 , mas seu desempenho nos resultados obtidos é superior ao MCNC e ao MRV porque M é menor nas simulações realizadas. Os resultados em termos de tempo de CPU para o MCNC e o MRV são bastante piores do que os para o MAR e o MVD porque os algoritmos do MCNC e do MRV povoam continuamente a região rotacional com novos vórtices para garantir convergência, o que gera um número muito maior de vórtices na região fluida e um grande aumento no tempo de CPU, apesar de produzir resultados mais acurados.

Tabela 5.3: Tempos de CPU (s) e número de vórtices (M)

MÉTODO	Δt	$t=1$	$t=2$
MAR	0.025	$M=1000$; $t=3,12 \times 10^{-2}$ s	$M=1000$; $t=6,25 \times 10^{-2}$ s
	0.050	$M=1000$; $t=1,56 \times 10^{-2}$ s	$M=1000$; $t=3,12 \times 10^{-2}$ s
MRV	0.025	$M=4921$; $t=2,30 \times 10^3$ s	$M=19441$; $t=1,35 \times 10^5$ s
	0.050	$M=1261$; $t=4,75 \times 10^1$ s	$M=4921$; $t=2,31 \times 10^3$ s
MCNC	0.025	$M=1600$; $t=9,68 \times 10^2$ s	$M=6400$; $t=1,33 \times 10^5$ s
	0.050	$M=400$; $t=7,25 \times 10^0$ s	$M=1600$; $t=9,57 \times 10^2$ s
MVD	0.025	$M=961$; $t=3,50 \times 10^1$ s	$M=961$; $t=7,23 \times 10^1$ s
	0.050	$M=961$; $t=1,79 \times 10^1$ s	$M=961$; $t=3,60 \times 10^1$ s

Dois fatores adicionais devem ser ressaltados quando se analisa tempo de CPU. Em primeiro lugar, métodos que geram muitos vórtices, como o MCNC e o MRV, podem reduzir a quantidade de vórtices presentes no escoamento utilizando um algoritmo de aglomeração de vórtices, como o desenvolvido por Rossi (1997). Em segundo lugar deve ser levado em consideração, na comparação quanto ao custo computacional, a grande particularidade do problema de difusão do vórtice pontual, que tende a encobrir deficiências que seriam aparentes em um problema que envolvesse convecção. Como exemplo, pode-se citar a criação de vórtices coincidentes no MRV e no MCNC, o que só ocorre em um problema puramente difusivo como o do vórtice pontual estudado. Em simulações de escoamento externo utilizando o método de vórtices, a convecção presente

no escoamento movimenta vórtices coincidentes e produz a mesma modelagem da região rotacional do escoamento com menos vórtices, o que também reduz o tempo de CPU.

CAPÍTULO 6

PLACA PLANA - RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

O Capítulo 5 apresentou os resultados parciais do modelo desenvolvido neste trabalho, buscando quantificar o grau de melhoria de cada aprimoramento introduzido na modelagem numérica individualmente. Assim, foram comparados os valores obtidos para o coeficiente de pressão (C_p), no escoamento potencial ao redor de um aerofólio de Van de Vooren, obtidos com a utilização de painéis retos e curvos. Posteriormente o Capítulo 5 apresentou a comparação do campo de velocidade induzido por painéis curvos e retos, em cilindro e aerofólio NACA 0012, buscando-se estabelecer o grau de melhoria e os parâmetros de utilização da curvatura na discretização do corpo. Ainda no Capítulo 5, explorou-se a utilização do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), do processo de aglomeração direta e por caixas, e por último, estudou-se os processos de difusão viscosa, quais sejam: Método do Avanço Randômico (MAR); Método da Velocidade de Difusão (MVD); Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC).

O presente capítulo, por sua vez, busca apresentar os resultados do modelo como um todo, onde todos os aprimoramentos enunciados acima são colocados para trabalhar em conjunto, formando um código computacional completo que simule de maneira representativa escoamentos viscosos ao redor de corpos, mantendo-se as hipóteses anteriormente descritas, e respeitando-se as limitações computacionais existentes.

Para tanto, o escoamento estudado neste capítulo é o desenvolvimento de camada limite sobre uma placa plana de comprimento igual a 1. Os resultados obtidos são comparados com a solução exata por similaridade obtida por Blasius, o que permite validar o código computacional deste trabalho. Deve-se ressaltar que a teoria de camada limite conduz a uma formulação que representa assintoticamente as Equações de Navier-Stokes quando $Re_x \rightarrow \infty$, ou seja, esta só deve ser empregada em regiões suficientemente distantes do bordo de ataque. Da mesma maneira, os efeitos de descontinuidade do bordo de fuga também não são considerados pela formulação teórica de camada limite, uma vez que a placa plana é considerada semi-infinita, ou seja, assim como o bordo de ataque, esta região também deve ser considerada fora do domínio de utilização do modelo ora apresentado.

Deste modo, as seções a seguir buscam validar o modelo desenvolvido e evidenciar a convergência do método diante dos parâmetros numéricos e físico (Número de Reynolds) que controlam a simulação, quais sejam:

- Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC - α ;
- Razão entre a distância de nascimento (h) e o raio do vórtice (σ_0) - h/σ_0 ;
- Número de painéis - N ;
- Número de Reynolds - Re .

Como descrito nos capítulos anteriores, α [0,1] estabelece a relação entre a menor e a maior escala de resolução da simulação, ou seja, entre o raio mínimo e máximo dos vórtices, uma vez que $\alpha\sigma_{Max} = \sigma_{Min}$. Assim, quanto maior o valor de α , maior o refinamento espacial do processo de divisão dos vórtices, como foi explicado em detalhes na seção 4.6.4.

O Método de Vórtices tem a convergência garantida pela razão de recobrimento entre os raios dos vórtices, uma vez que estes discretizam o campo de vorticidade que está sendo resolvido numericamente. Porém, uma boa resolução somente é alcançada fazendo-se os núcleos cada vez menores, o que requer um aumento do número de vórtices para manter o recobrimento. A convergência da simulação como um todo é alcançada fazendo-se o raio tender a zero e a distância entre os vórtices tender a zero mais rapidamente. Dos parâmetros citados acima, os que controlam a razão de recobrimento e garantem a convergência são h/σ_0 e α . A relação entre h/σ_0 e a razão de recobrimento é direta, porém, a relação entre α e h/σ_0 é função direta da distância de divisão $r = 2\sigma\sqrt{1-\alpha^2}$, imposta pelo MCNC.

Por último, pode-se estabelecer a relação entre N e a discretização da superfície sólida, ou seja, quanto maior N , melhor será representada a presença do corpo, discretizando de maneira mais refinada a vorticidade gerada na parede sólida.

Em síntese, espera-se resultados cada vez mais representativos e aprimorados utilizando-se α maiores, h/σ_0 menores e N maiores. Entretanto, como era de se esperar, cada um destes parâmetros também influencia de maneira particular o custo computacional

da simulação, ou seja, para se obter resultados mais acurados deve-se considerar o custo computacional envolvido.

Como discutido na seção 4.8, o custo computacional deve ser mantido sob controle e em nível aceitável. Para tanto, utiliza-se o processo de aglomeração e o corte, ambos colocados a trabalhar em conjunto durante as simulações apresentadas neste capítulo.

6.1. Análise de convergência

A modelagem numérica descrita nos capítulos anteriores deve ser analisada quanto à sensibilidade com relação aos parâmetros numéricos que controlam a simulação, quais sejam, α , h/σ_0 e N , tendo em vista realizar a análise de convergência do método.

Assim, as Fig. 6.1a, 6.1b e 6.1c mostram inicialmente a convergência do perfil de velocidade no tempo, respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,5$ e $x/c = 0,75$, para os mesmos valores de $\alpha = 0.6$, $h/\sigma_0 = 0.85$ e $N=50$.

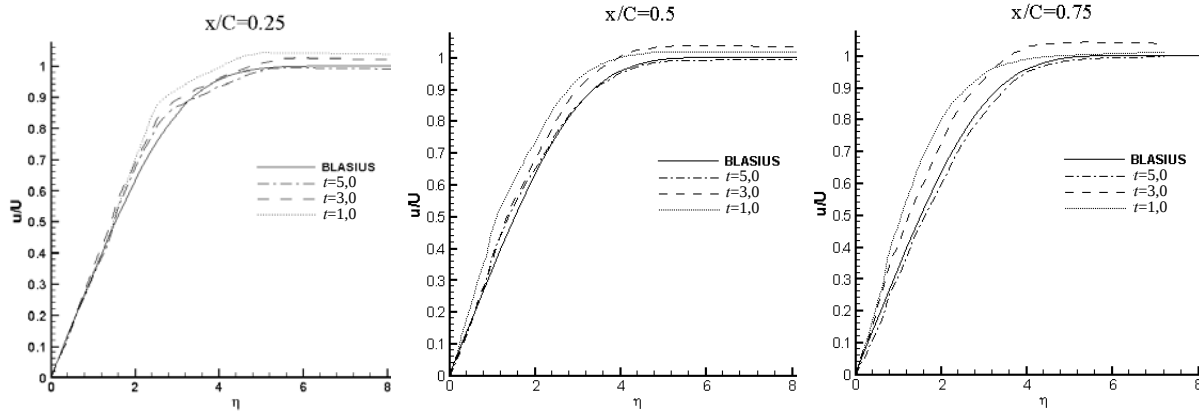


Figura 6.1a – Convergência do perfil de velocidade em $x/c = 0,25$

Figura 6.1b – Convergência do perfil de velocidade em $x/c = 0,50$

Figura 6.1c – Convergência do perfil de velocidade em $x/c = 0,75$

As Fig. 6.1a, 6.1b e 6.1c quando analisadas individualmente permitem que se observe a convergência do perfil de velocidade no tempo, porém, quando comparadas entre si, nota-se claramente a tendência de convergência mais acelerada na região próxima ao bordo de ataque, uma vez que, para o mesmo instante de tempo, tem-se um perfil mais próximo da solução de Blasius em $x/c = 0,25$, seguido de $x/c = 0,50$, e, por último, em $x/c = 0,75$.

Esta tendência de convergência mais acelerada quando se aproxima do bordo de ataque é normal e esperada, sobretudo pelo fato da espessura da camada limite ser menor nesta região, implicando em menor quantidade de vórtices necessários para representá-la. Naturalmente, a medida que t aumenta, espera-se uma convergência melhorada nas regiões mais próximas ao bordo de fuga.

As Fig. 6.2a, 6.2b e 6.2c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se α , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para tempo $t=0,1$.

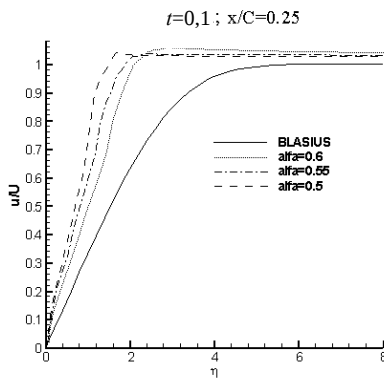


Figura 6.2a – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t=0,1$ e $x/c = 0,25$

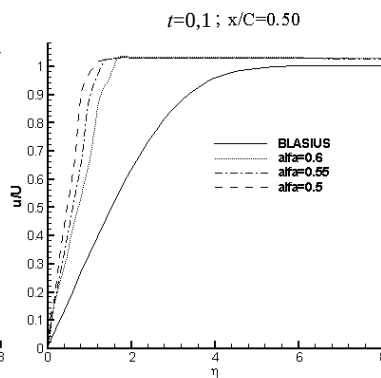


Figura 6.2b – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t=0,1$ e $x/c = 0,50$

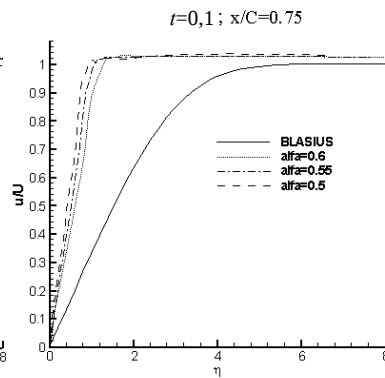


Figura 6.2c – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t=0,1$ e $x/c = 0,75$

A análise individual das Fig. 6.2a, 6.2b e 6.2c evidenciam claramente o melhor resultado do perfil de velocidade obtido com α maiores, situação em que ocorre um refinamento espacial mais acentuado, provocado pela maior quantidade de divisões dos vórtices e conseqüente aumento da nuvem.

Comparando-se as Fig. 6.2a, 6.2b e 6.2c entre si, para o mesmo instante de tempo, percebe-se a tendência de se encontrar uma taxa de convergência maior nas regiões mais próximas ao bordo de ataque, uma vez que é possível representar estas regiões com uma quantidade menor de vórtices, tendo em vista a menor espessura da camada limite.

As Fig. 6.3a, 6.3b e 6.3c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se α , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t=0,3$.

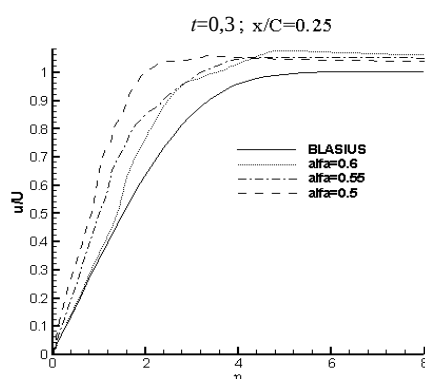


Figura 6.3a – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t = 0,3$ e $x/c = 0,25$

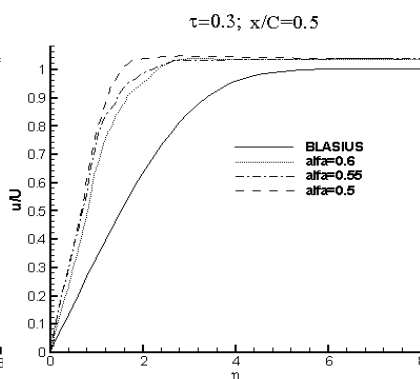


Figura 6.3b – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t = 0,3$ e $x/c = 0,50$

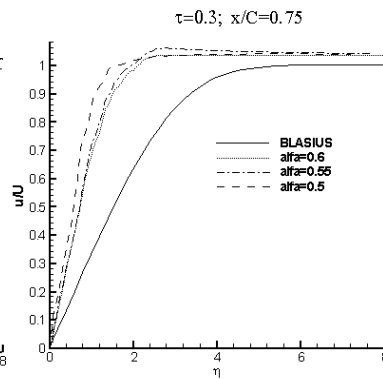


Figura 6.3c – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t = 0,3$ e $x/c = 0,75$

Do mesmo modo, faz-se a análise das Fig. 6.3a, 6.3b e 6.3c individualmente e comparando-as entre si, como feito para as Fig. 6.2a, 6.2b e 6.2c. Novamente encontra-se resultados melhores para α maiores, e convergência mais rápida perto do bordo de ataque.

As Fig. 6.4a, 6.4b e 6.4c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se α , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,5$.

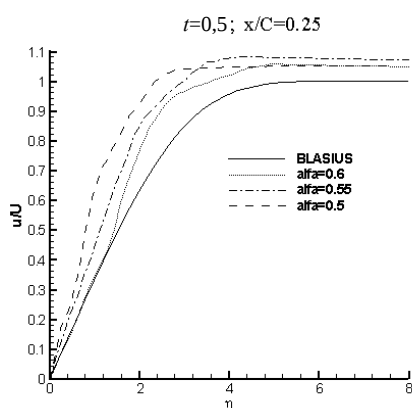


Figura 6.4a – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t = 0,5$ e $x/c = 0,25$

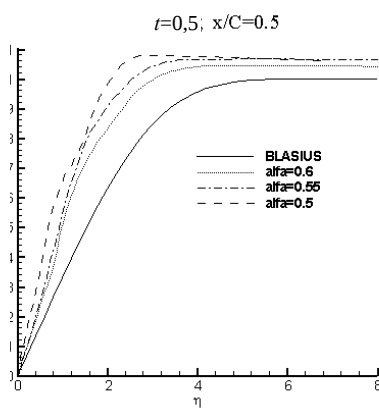


Figura 6.4b – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t = 0,5$ e $x/c = 0,50$

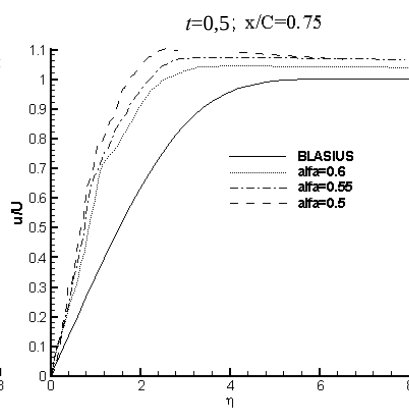


Figura 6.4c – Convergência do perfil de velocidade variando-se α , $t = 0,5$ e $x/c = 0,75$

Analisando as Fig. 6.4a, 6.4b e 6.4c novamente percebe-se melhores resultados para α maiores e para $x/c = 0,25$, devido, respectivamente, à melhor razão de recobrimento e menor espessura da camada limite.

Finalmente, pode-se comparar as Fig. 6.2a, 6.3a e 6.4a entre si, ou seja, para a mesma posição $x/c = 0,25$, verifica-se a convergência no tempo, respectivamente para $t = 0,1$, $t = 0,3$ e $t = 0,5$. O mesmo procedimento de comparação pode ser feito para as Fig. 6.2b, 6.3b e 6.4b, assim como para as Fig. 6.2c, 6.3c e 6.4c, respectivamente para a posição $x/c = 0,25$ e $x/c = 0,75$ nos instantes de tempo $t = 0,1$, $t = 0,3$ e $t = 0,5$. As Fig. 6.5a, 6.5b e 6.5c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,1$.

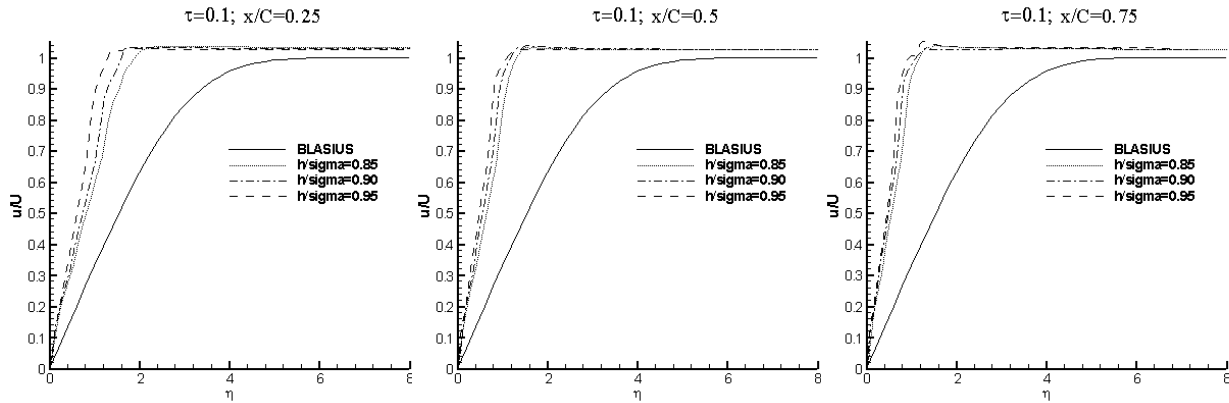


Figura 6.5a – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,1$ e $x/c = 0,25$

Figura 6.5b – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,1$ e $x/c = 0,50$

Figura 6.5c – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,1$ e $x/c = 0,75$

Analisando-se individualmente as Fig. 6.5a, 6.5b e 6.5c percebe-se melhores resultados do perfil de velocidade para valores de h/σ_0 menores, os quais representam uma razão de recobrimento melhor de seus núcleos. Comparando entre si estas figuras, novamente se percebe uma convergência mais acelerada perto no bordo de ataque, tendo em vista a menor espessura da camada limite permitir sua representação com um número menor de vórtices.

As Fig. 6.6a, 6.6b e 6.6c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,3$.

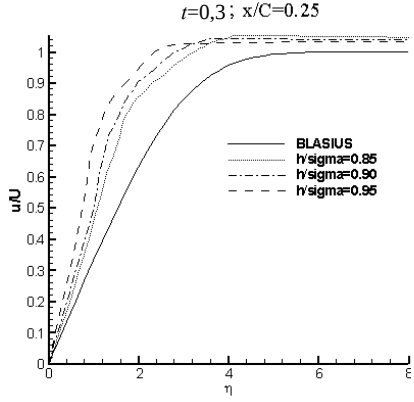


Figura 6.6a – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,3$ e $x/c = 0,25$

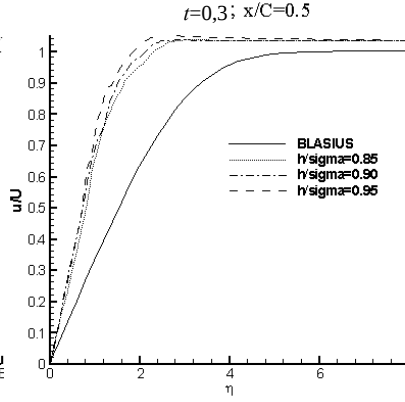


Figura 6.6b – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,3$ e $x/c = 0,50$

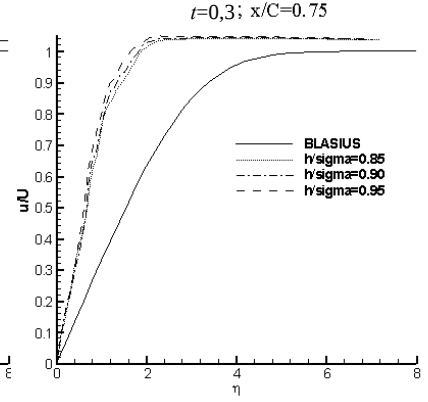


Figura 6.6c – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,3$ e $x/c = 0,75$

Pelos mesmos motivos citados anteriormente, as Fig. 6.6a, 6.6b e 6.6c também apresentam resultados melhores para h/σ_0 menores e taxas de convergência mais acentuadas na região do bordo de ataque.

As Fig. 6.7a, 6.7b e 6.7c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,5$.

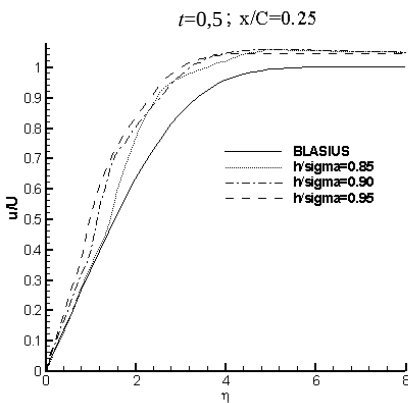


Figura 6.7a – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,5$ e $x/c = 0,25$

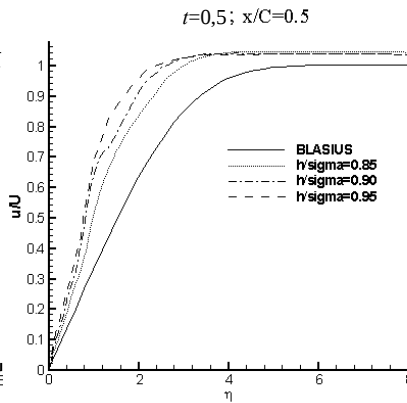


Figura 6.7b – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,5$ e $x/c = 0,50$

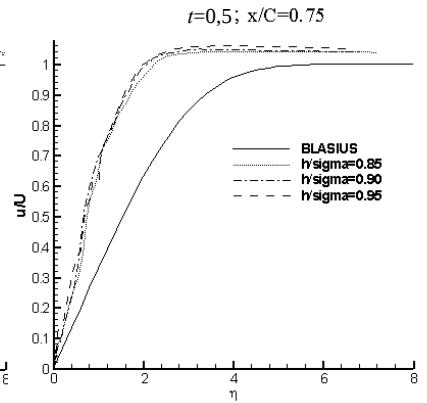


Figura 6.7c – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 , $t = 0,5$ e $x/c = 0,75$

Pode-se analisar a convergência temporal para diversos valores de h/σ_0 , comparando-se as Fig 6.5a, 6.6a e 6.7a, para $x/c = 0,25$, as Fig 6.5b, 6.6b e 6.7b, para $x/c = 0,50$ e, por último, as Fig. 6.5c, 6.6c e 6.7c, para $x/c = 0,75$.

As Fig. 6.8a, 6.8b e 6.8c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se N , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,1$.

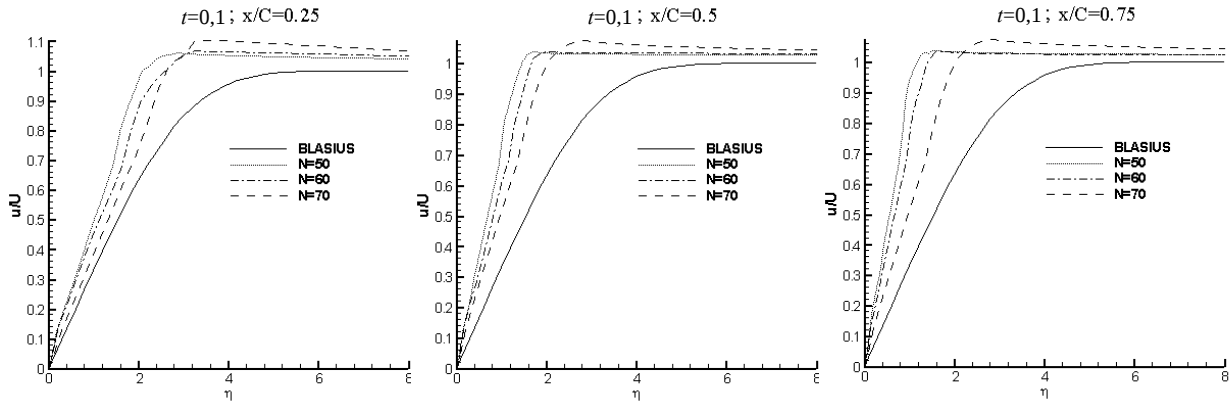


Figura 6.8a – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,1$ e $x/c = 0,25$

Figura 6.8b – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,1$ e $x/c = 0,50$

Figura 6.8c – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,1$ e $x/c = 0,75$

As Fig. 6.8a, 6.8b, 6.8c analisadas uma a uma permitem que se perceba a influência de N nos resultados obtidos para o perfil de velocidade. Percebe-se que este parâmetro estabelece grande relação com a qualidade da simulação, sobretudo porque representa o grau de discretização da superfície sólida. Estas figuras, comparadas entre si, novamente demonstram a maior taxa de convergência próximo do bordo de ataque.

As Fig. 6.9a, 6.9b e 6.9c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se N , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,3$.

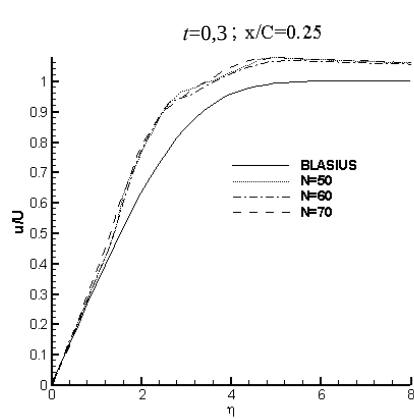


Figura 6.9a – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,3$ e $x/c = 0,25$

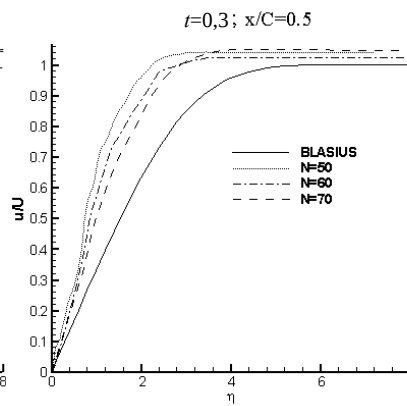


Figura 6.9b – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,3$ e $x/c = 0,50$

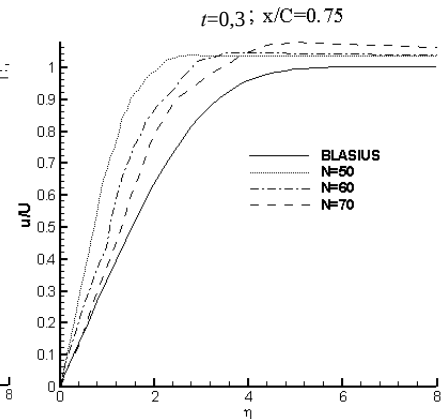


Figura 6.9c – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,3$ e $x/c = 0,75$

As Fig. 6.10a, 6.10b e 6.10c apresentam a convergência do perfil de velocidade variando-se N , respectivamente em $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$ e $x/c = 0,75$, para o instante de tempo $t = 0,5$.

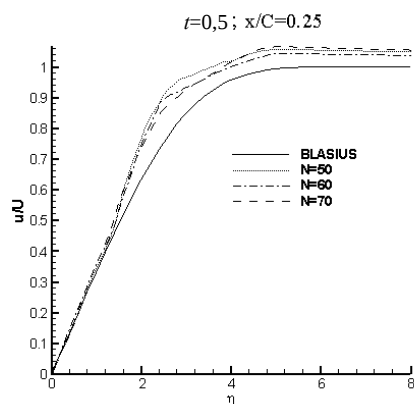


Figura 6.10a – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,5$ e $x/c = 0,25$

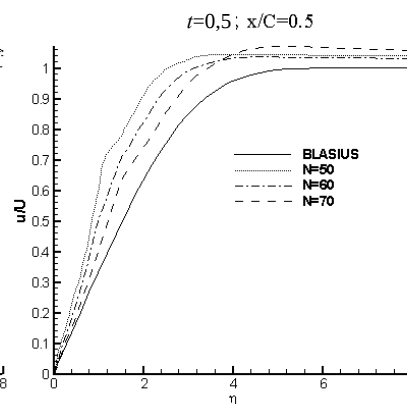


Figura 6.10b – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,5$ e $x/c = 0,50$

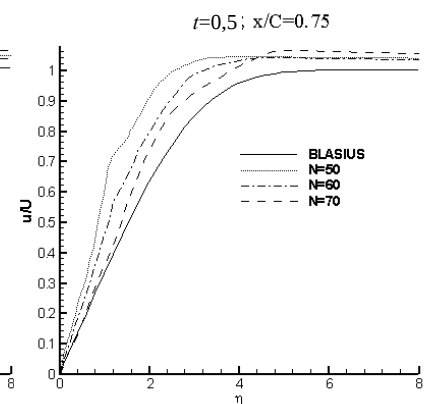


Figura 6.10c – Convergência do perfil de velocidade variando-se N , $t = 0,5$ e $x/c = 0,75$

Finalmente, no caso da análise da influência de N na simulação, a comparação temporal pode ser feita entre as Fig. 6.8a, 6.9a e 6.10a, para $x/c = 0,25$, entre as Fig. 6.8b, 6.9b e 6.10b, para $x/c = 0,50$, e por último, entre as Fig. 6.8a, 6.9a e 6.10a, para $x/c = 0,75$.

A Fig. 6.11 apresenta a convergência da Espessura de Quantidade de Movimento e da Espessura de Deslocamento no tempo, para o caso de placa plana com 1% de espessura, $\alpha = 0.6$, $h/\sigma_0 = 0.85$, $N=50$, $Re=1000$, $\Gamma_{corte} = 1.0^{-04}$.

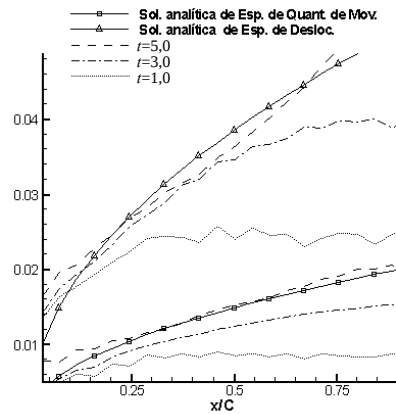


Figura 6.11 – Convergência das Espessuras de Quantidade de Movimento e Deslocamento

Por último, a Fig. 6.12 apresenta a convergência do Coeficiente de Atrito (C_f) no tempo, novamente para o caso de placa plana com 1% de espessura, $\alpha = 0.6$, $h/\sigma_0 = 0.85$, $N=50$, $Re=1000$, $\Gamma_{corte} = 1.0^{-04}$. Os valores de C_f são obtidos numericamente através de uma aproximação de primeira ordem de $\partial u/\partial y$ na parede.

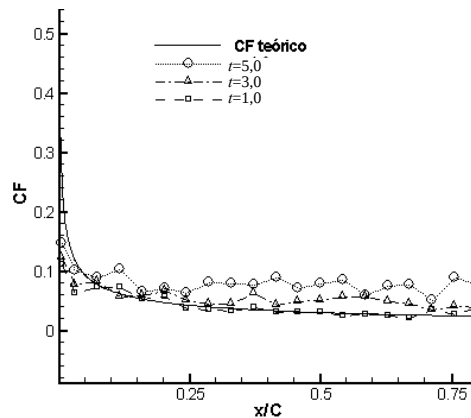


Figura 6.12 – Convergência do Coeficiente de Atrito (C_f)

6.2. Escoamento em placa plana - validação

A seguir são apresentados os resultados convergidos para o modelo apresentado neste trabalho e detalhado nos capítulos anteriores, para o caso placa plana com 1% de espessura, $\alpha = 0.6$, $h/\sigma_0 = 0.85$, $N=50$, $Re=1000$, $\Gamma_{corle}=1,0 \times 10^{-04}$ e no instante de tempo $t=4,5$. A simulação gerou 264252 vórtices em 84 horas 10 minutos e 21 segundos de tempo de CPU.

As Fig. 6.13a, 6.13b e 6.13c apresentam os resultados do presente trabalho e da simulação numérica de NIKONOV & SHAKHOV (2008), para a componente u do perfil de velocidade ao longo da placa, em $x/c=0,25$, $x/c=0,50$ e $x/c=0,75$, onde $\eta=y\sqrt{ReU/x}$, $c=1$ e $U=1$.

As Fig. 6.13a, 6.13b e 6.13c permitem uma comparação do modelo numérico desenvolvido no presente trabalho com um modelo numérico encontrado na literatura. Percebe-se que os resultados alcançados têm maior acurácia que os apresentados por NIKONOV & SHAKHOV (2008) ao longo de toda a placa plana.

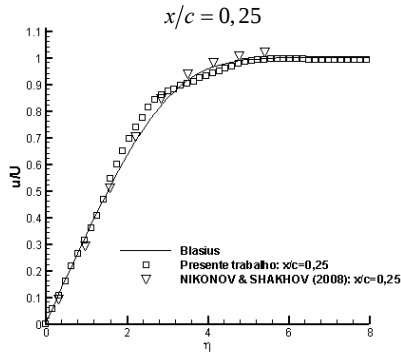


Figura 6.13a
Perfil de velocidade
($x/c = 0,25$)

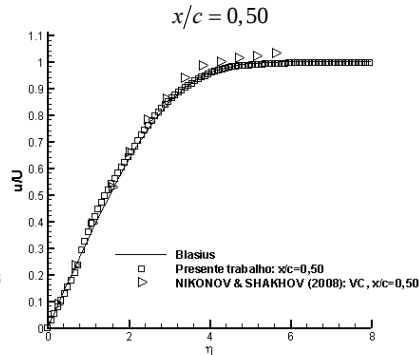


Figura 6.13b
Perfil de velocidade
($x/c = 0,50$)

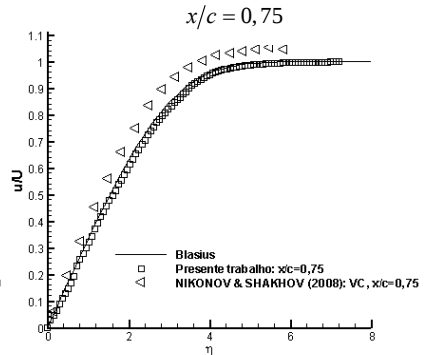


Figura 6.13c
Perfil de velocidade
($x/c = 0,75$)

Outra comparação com resultados numéricos encontrados na literatura é apresentada na Fig. 6.14, onde se percebe uma superioridade ainda maior da modelagem aqui desenvolvida, em comparação o modelo de LEWIS (1991), o qual utiliza o Método do Avanço Randômico para simulação do processo de difusão da vorticidade e $Re=500$.

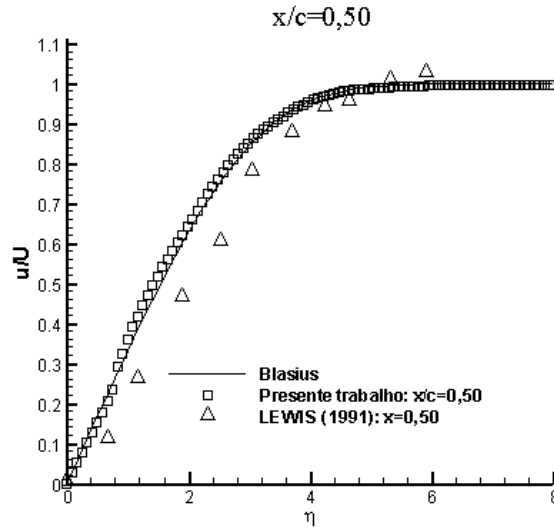


Figura 6.14
Perfil de velocidade
($x/c = 0,50$)

As Fig. 6.13a, 6.13b e 6.13c evidenciam o excelente resultado conseguido com a modelagem numérica deste trabalho. O perfil de Blasius é reproduzido pelos resultados numéricos de maneira altamente representativa, o que atesta a excelente acurácia da simulação realizada ao longo da placa plana. Deste modo, pode-se afirmar que o modelo numérico desenvolvido neste trabalho é capaz de reproduzir com elevada representatividade o processo de geração de vorticidade na superfície, o que o habilita a realizar simulações em corpos aerodinâmicos, determinando com precisão os esforços no corpo. A boa qualidade do perfil de velocidade na parede, que pode ser vista nas Fig. 6.13a, 6.13b e 6.13c, permite o cálculo do Coeficiente de Atrito (C_f) com bastante precisão, como apresentado na Fig. 6.15.

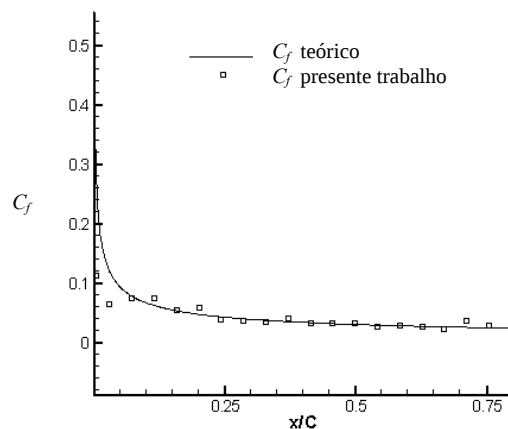


Figura 6.15 – Coeficiente de Atrito (C_f)
converrido

A Fig. 6.16 apresenta a Espessura de Quantidade de Movimento e a Espessura de Deslocamento convergidas.

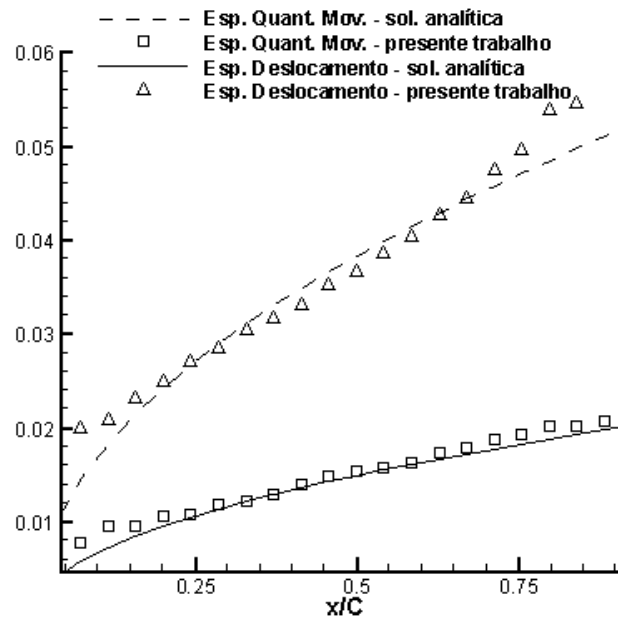


Figura 6.16 – Espessuras de Quantidade de Movimento e Deslocamento convergidas

As Fig. 6.15 e 6.16 permitem que se observe melhores resultados na parte central da placa plana, em comparação com os visualizados próximo das extremidades. Esta constatação é esperada, conforme dito anteriormente, tendo em vista a teoria de camada limite ser aplicável apenas à regiões suficientemente distantes do bordo de ataque ($Re_x \rightarrow \infty$), assim como pelo fato de ser deduzida para placa plana semi-infinita, ou seja, também não contempla a descontinuidade do bordo de fuga.

CAPÍTULO 7

AEROFÓLIO - ANÁLISE DE RESULTADOS

O Capítulo 6 apresentou os resultados das simulações em placa plana, com o objetivo de validar o modelo numérico desenvolvido, estabelecer o custo computacional a ele relacionado, e levantar a faixa adequada de variação dos parâmetros numéricos e físico (Re) utilizados, quais sejam:

- Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC - α ;
- Razão entre a distância de nascimento (h) e o raio do vórtice (σ_0) - h/σ_0 ;
- Número de painéis - N ;
- Número de Reynolds – Re .

O presente capítulo desenvolve uma análise do escoamento ao redor de aerofólio, utilizando o modelo computacional descrito nos capítulos anteriores, e explorando os parâmetros numéricos listados acima, dentro da faixa de utilização que foi testada e validada no capítulo anterior, e que fornece uma relação custo computacional/resultados viável e satisfatória.

O estudo do escoamento ao redor de aerofólios é de elevado interesse da engenharia, tendo em vista a enorme gama de aplicações em escoamentos internos e externos, como em turbo máquinas, em turbinas eólicas, em pás de helicópteros e em superfícies de sustentação e controle de aeronaves. As teorias para escoamentos não viscosos fornecem resultados limitados, sobretudo para a determinação das forças de arrasto em aerofólios com baixos ângulos de ataque.

A utilização de um aerofólio, ou seja, de uma seção reta de uma asa ou pá de uma turbina, permite calcular as forças de superfície no corpo tridimensional, através de considerações e modificações em algumas de suas propriedades. Tal abordagem é utilizada com muita frequência nas linhas de pesquisas atuais.

As simulações apresentadas neste capítulo utilizam o aerofólio simétrico NACA 0012, tendo em vista se dispor na literatura de alguma informação no que diz respeito a simulações e experimentos.

7.1. Verificação dos parâmetros numéricos e análise de convergência para aerofólios

Os parâmetros numéricos descritos acima, e testados no Capítulo 6 para placa plana, foram utilizados em simulações de tempo curto para o aerofólio NACA 0012, de acordo com a Tabela 7.1. Esta verificação visa a adequá-los às simulações em aerofólios, tendo em vista a existência de algumas particularidades e diferenças com relação à placa plana, onde ocorrem os efeitos de quina no bordo de ataque, assim como os efeitos de proximidade entre painéis opostos. O número de Reynolds escolhido ($2,0 \times 10^6$) visa a possibilidade de comparação com dados experimentais disponíveis na literatura.

Tabela 7.1 – Casos de tempo curto para verificação dos parâmetros

CASO	Re	Ângulo de ataque	α	h/σ_0	N
1	$2,0 \times 10^6$	6°	0,4	0,8	50
2					80
3					100
4			0,4	0,8	50
5				0,7	
6				0,6	
7			0,4	0,8	50
8			0,5		
9			0,6		

Adicionalmente, estas rodadas de tempo curto permitiram a visualização da tendência de convergência da simulação, como será explorado a seguir.

As Fig. 7.1a, 7.1b e 7.1c abaixo apresentam a distribuição de pressão em um aerofólio NACA 0012, para as simulações da Tabela 7.1 com ângulo de ataque = 6° , no instante $t=1,0$. Os resultados são então comparados aos dados experimentais de GREGORY & O'REILLY (1973).

As Fig. 7.1a, 7.1b e 7.1c, quando comparadas entre si, permitem que se observe, no mesmo instante de tempo $t=1,0$, as taxas de convergência melhores para os parâmetros numéricos que representam maior refinamento.

Deste modo, a Fig. 7.1a permite observar que maiores valores de N conduzem a soluções mais refinadas, para o mesmo instante de tempo $t=1,0$. Tal constatação é esperada, uma vez que N maiores representam melhores discretizações do aerofólio.

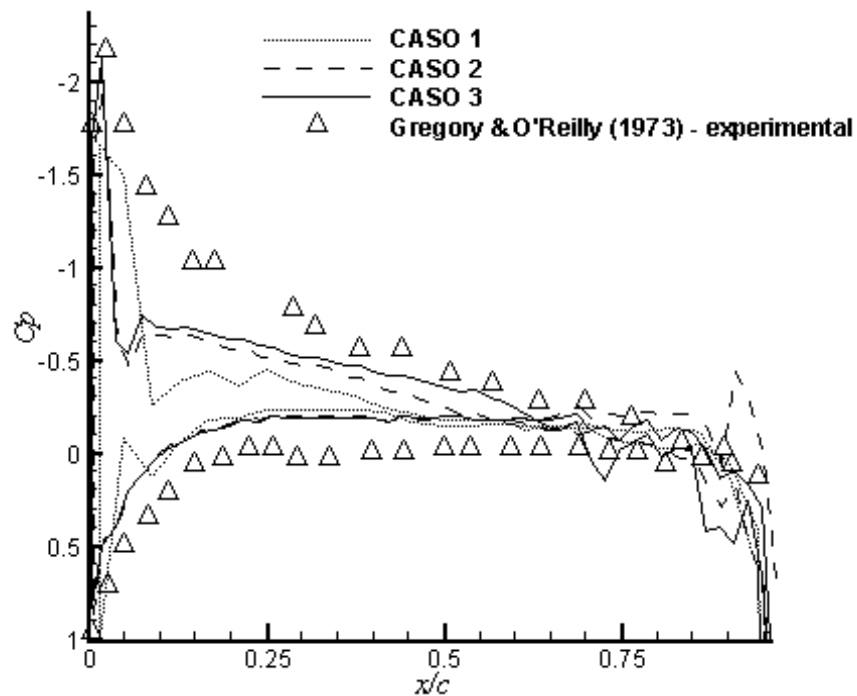


Figura 7.1a – C_p - NACA 0012
 $t=1,0$, Casos 1, 2 e 3

Do mesmo modo, a Fig. 7.1b permite observar que menores valores de h/σ_0 fornecem melhores resultados, para o mesmo instante de tempo $t=1,0$, uma vez que conduzem a maiores taxas de recobrimento dos núcleos dos vórtices, ou seja, melhores representações do campo de vorticidade.

Por último, a análise da Fig. 7.1c indica que obtém-se melhores resultados com maiores valores de α , os quais representam melhor refinamento espacial por promoverem maior número de divisões dos vórtices no MCNC.

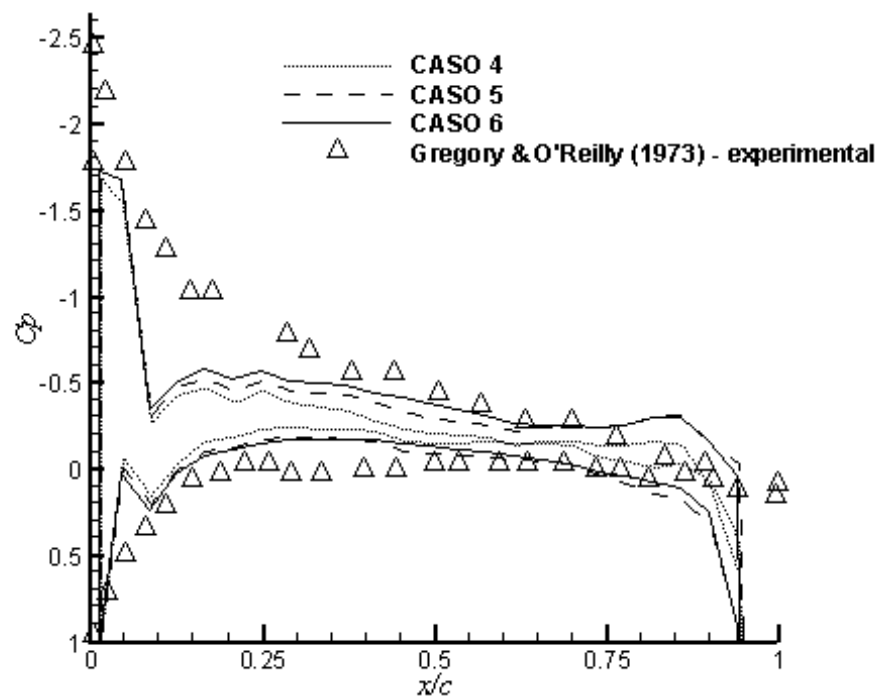


Figura 7.1b – C_p - NACA 0012,
 $t = 1,0$, Casos 4, 5 e 6

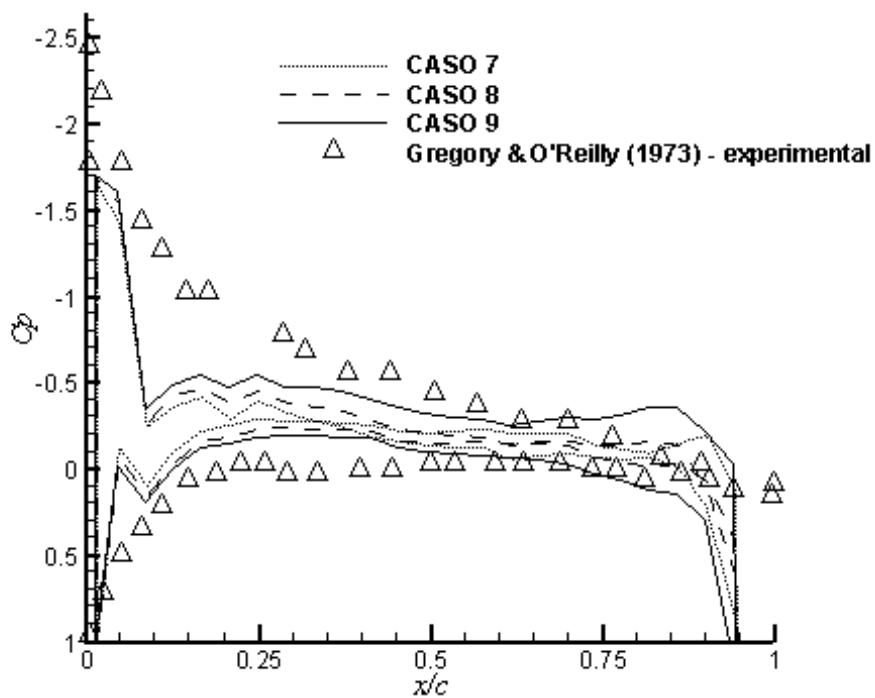


Figura 7.1c – C_p - NACA 0012,
 $t = 1,0$, Casos 7, 8 e 9

Cabe ressaltar que as figuras relativas aos casos da Tab. 7.1 não correspondem a resultados convergidos, no entanto, estas permitem que se perceba, para um mesmo instante de tempo, uma combinação de parâmetros numéricos que se adequa à simulação de escoamentos em aerofólios, e que serão utilizados nas simulações de tempo longo apresentadas na seção seguinte.

7.2. Apresentação e análise dos resultados

A Tabela. 7.2 mostra os valores dos parâmetros numéricos e demais dados de entrada utilizados nas simulações de tempo longo, com valores de $Re=10^4$ e $Re=10^5$ e ângulos de ataque variando entre 0° e 16° . Os resultados apresentados nesta seção são apenas para os ângulos de ataque 4° , 10° e 14° , com $Re=10^5$. Os demais ângulos de ataque para $Re=10^5$ são apresentados no APÊNDICE A, enquanto que os resultados para $Re=10^4$ são apresentados no APÊNDICE B.

Tabela 7.2 – Parâmetros numéricos e dados de entrada empregados nas simulações de tempo longo

Parâmetro ou dado de entrada	Símbolo	Valor	Referências e observações
Número de Reynolds	Re	10^4 e 10^5	Foram realizadas simulações com 10^4 e 10^5 .
Parâmetro de divisão dos vórtices no MCNC	α	0,6	Definido na seção 4.6.4. Escolhido com base no Capítulo 6 e nas rodadas de tempo curto deste capítulo.
Relação entre a distância dos centros (h) e o raio do vórtice (σ_0)	h/σ_0	0,6	Definido na seção 4.4. Escolhido com base no Capítulo 6 e nas rodadas de tempo curto deste capítulo.
Numero de painéis	N	200	Escolhido com base no Capítulo 6 e nas rodadas de tempo curto deste capítulo.
Corte	Γ_{corte}	10^{-4}	Definido na seção 4.8.3. Escolhido com base no Capítulo 6 e nas rodadas de tempo curto deste capítulo.
Relação $\Delta t = k \Delta l$	k	1	Definido na seção 4.7. e no APÊNDICE C
Número de sub-painéis	N_{Sub}	5	Definido na seção 4.11.

Para facilitar o seu entendimento, a Tab. 7.2 fornece ainda a referência do parâmetro em questão, com relação à localização de sua definição no texto dos capítulos anteriores.

As Fig. 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8 a seguir apresentam respectivamente os resultados para o coeficiente de sustentação, o coeficiente de arrasto, o coeficiente de pressão, as linhas de corrente com os campos de velocidade, o campo de vorticidade e a esteira, obtidas com os dados da Tabela. 7.2 para $Re=10^5$, ângulo de ataque= 4° .

As Fig. 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14 e 7.15 apresentam respectivamente os resultados para o coeficiente de sustentação, o coeficiente de arrasto, o coeficiente de pressão, as linhas de corrente com os campos de velocidade, campo de vorticidade e a esteira, obtidas com os dados da Tab. 7.2 para $Re=10^5$ e ângulo de ataque= 10° .

As Fig. 7.16, 7.17, 7.18, 7.19, 7.20, 7.21 e 7.22 apresentam respectivamente os resultados para o coeficiente de sustentação, o coeficiente de arrasto, o coeficiente de pressão, as linhas de corrente com os campos de velocidade, campo de vorticidade e a esteira, obtidas com os dados da Tab. 7.2 para $Re=10^5$ e ângulo de ataque= 14° .

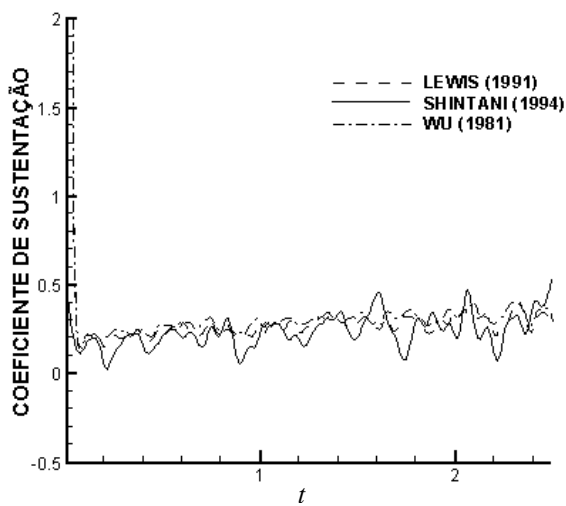


Figura 7.2 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$

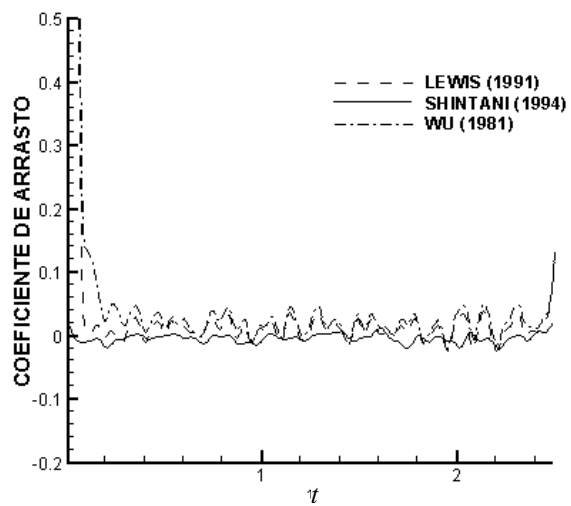


Figura 7.3 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$

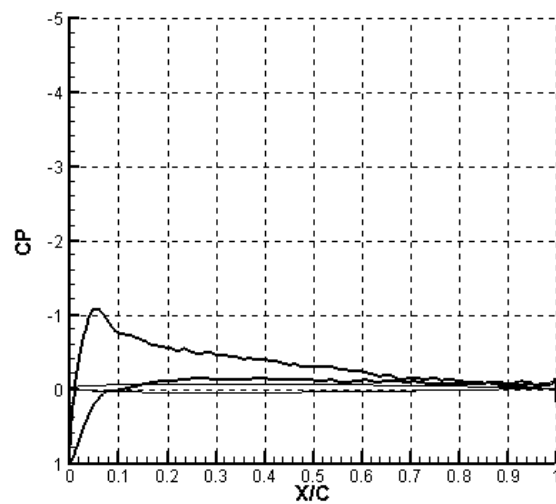


Figura 7.4 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$



Figura 7.5 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

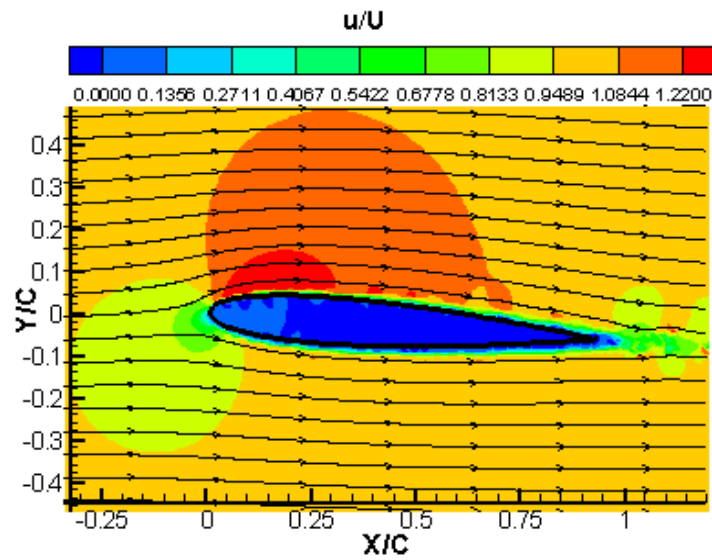


Figura 7.6 – Linhas de corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

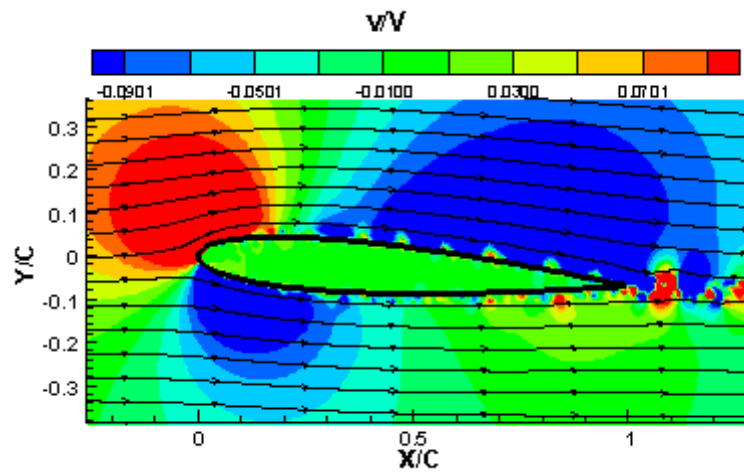


Figura 7.7 – Linhas de corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

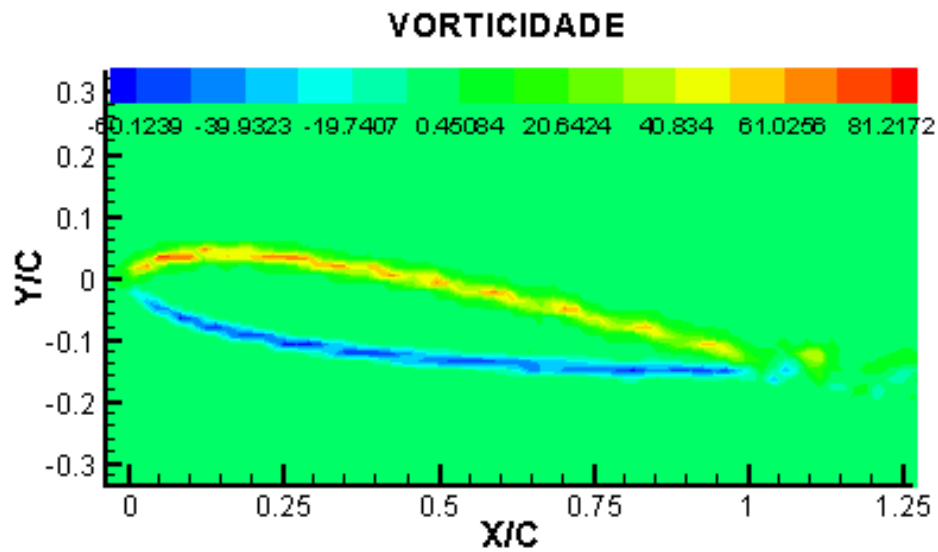


Figura 7.8 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

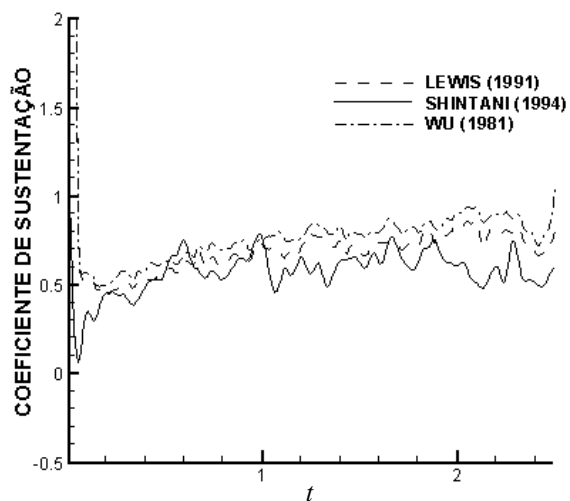


Figura 7.9 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$

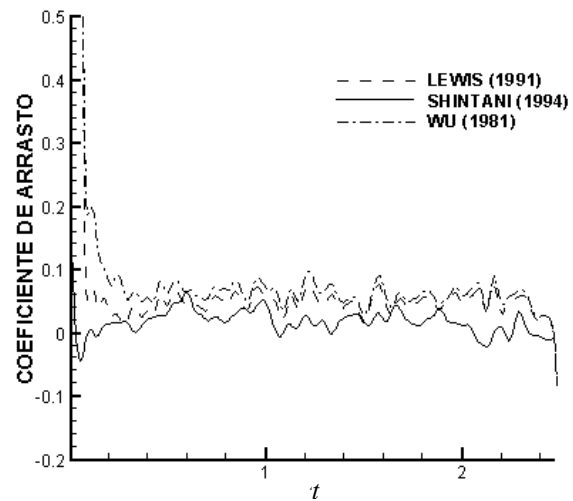


Figura 7.10 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$

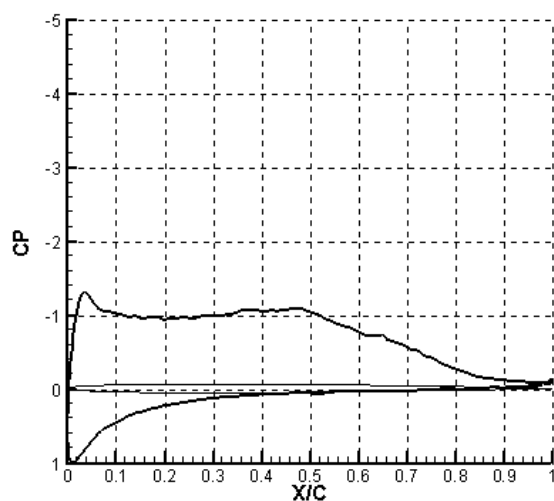


Figura 7.11 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$



Figura 7.12 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

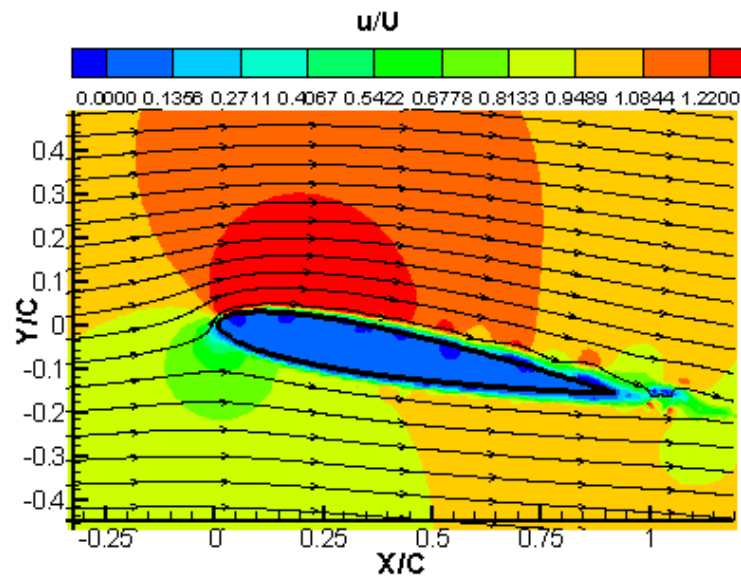


Figura 7.13 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

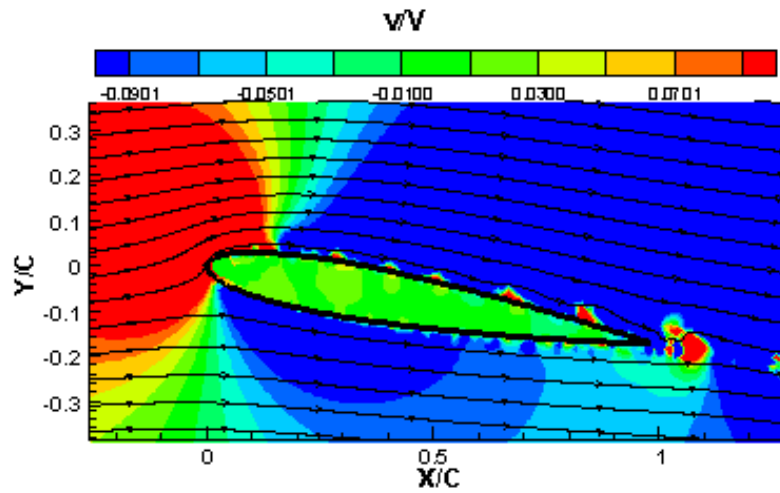


Figura 7.14 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

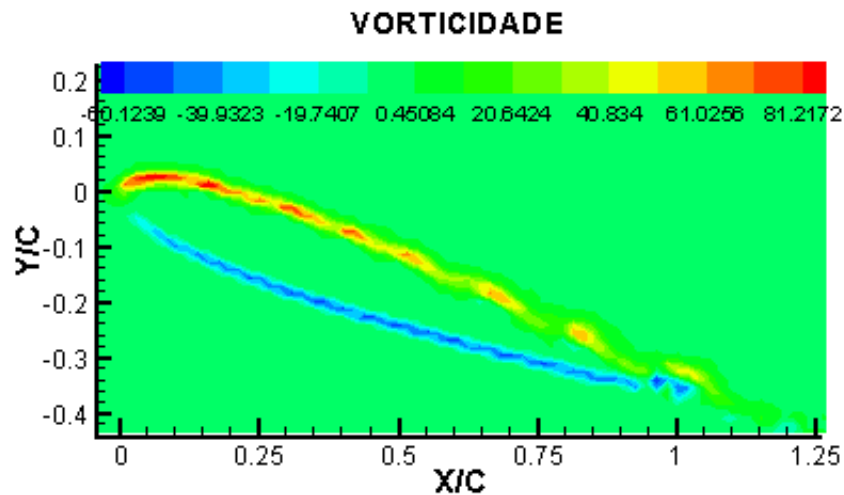


Figura 7.15 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

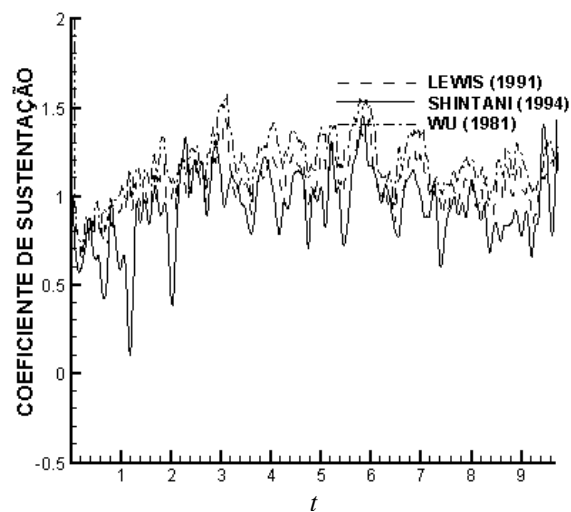


Figura 7.16 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$

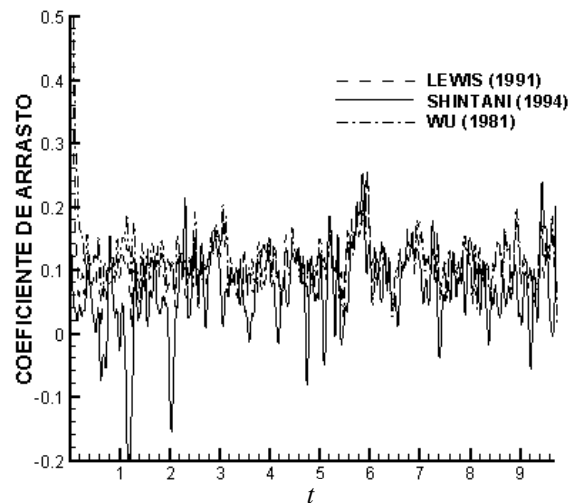


Figura 7.17 Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$

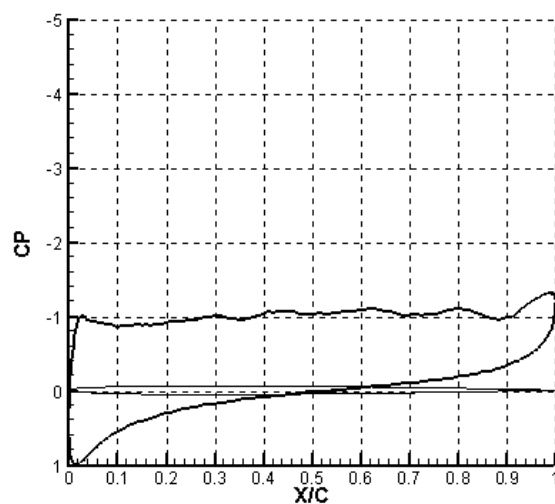


Figura 7.18 – Coeficiente de pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$



Figura 7.19 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

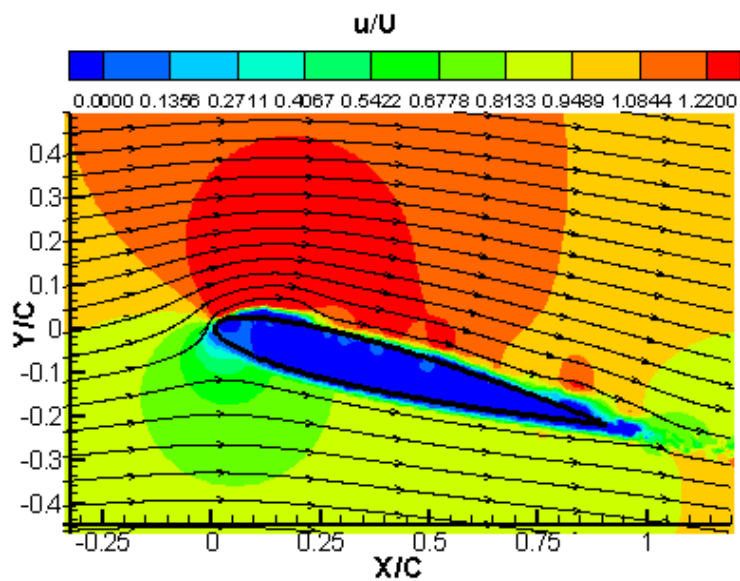


Figura 7.20 – Linhas de corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

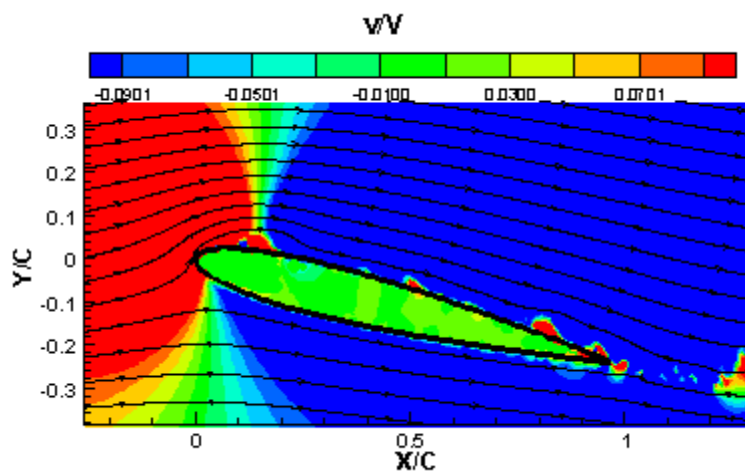


Figura 7.21 – Linhas de corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

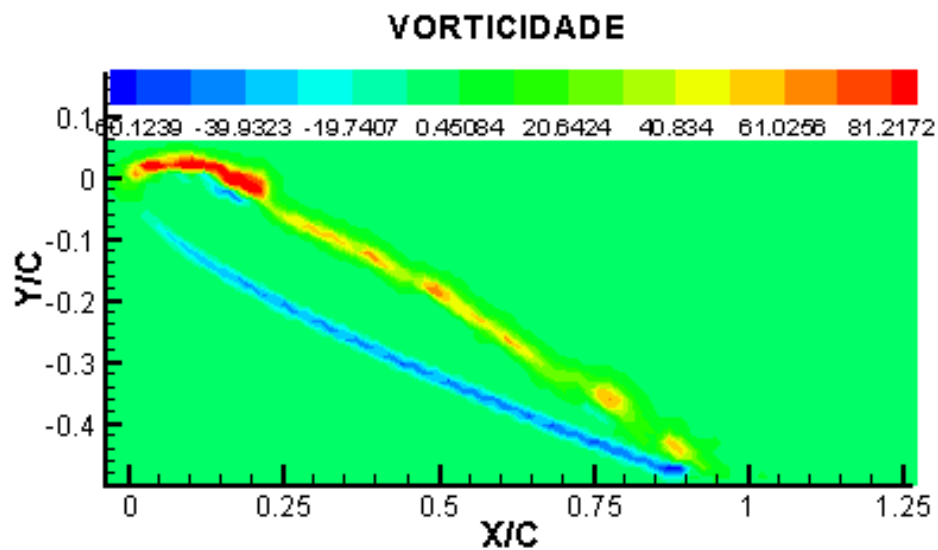


Figura 7.22 - Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

A simulação realizada pelo modelo numérico desenvolvido neste trabalho pretende capturar os instantes iniciais da formação da camada limite e da esteira viscosa de um escoamento impulsivo ao redor de um aerofólio com baixo ângulo de ataque. As simulações utilizando os dados e parâmetros numéricos da Tab. 7.2 permitiram gerar um conjunto de resultados satisfatórios para realização de uma análise física completa.

As Fig. 7.2 e 7.3 mostram uma oscilação de elevada frequência e pequena amplitude nos Coeficientes de Sustentação (C_L) e Arrasto (C_D). Este comportamento corresponde à física do escoamento em questão, uma vez que, para baixos ângulos de ataque, como o do caso em questão (4°), o desenvolvimento da esteira viscosa se dá de forma rápida, com oscilações elevada frequência e pequena amplitude. Nota-se também que o Coeficiente de Sustentação atinge rapidamente o patamar superior, o que também é resultado da rápida formação da esteira viscosa para ângulos de ataque baixos.

As Fig. 7.9 e 7.10 apresentam respectivamente os Coeficientes de Sustentação (C_L) e Arrasto (C_D) para o ângulo de ataque 10° . Percebe-se que o desenvolvimento da esteira para este ângulo de ataque é mais demorado quando comparado ao das Fig. 7.2 e 7.3, tendo em vista a demora do C_L em atingir seu patamar superior. Outro fato observado nas Fig. 7.9 e 7.10 é que os cálculos de C_L e C_D por WU (1981) e LEWIS (1991) começam a apresentar diferenças substanciais com relação ao cálculo por SHINTANI (1994).

Para ângulo de ataque 14° , as Fig. 7.16 e 7.17 mostram C_L e C_D com maiores amplitudes de oscilação, o que representa o efeito do desprendimento de estruturas rotacionais de maiores escalas, fato esperado para ângulos de ataque maiores. Novamente percebe-se que os cálculos de C_L e C_D por WU (1981) e LEWIS (1991) apresentam diferenças com relação ao cálculo por SHINTANI (1994).

O coeficiente de pressão das Fig. 7.4, 7.11 e 7.18 é uma média no tempo, onde são considerados diversos períodos de oscilação. Percebe-se claramente a tendência de uniformização da pressão na superfície superior do aerofólio, à medida que o ângulo de ataque cresce, indicando a dificuldade do escoamento acompanhar a curvatura superior, o que é prenúncio do estol.

As Fig. 7.5 e 7.12, respectivamente para ângulos de ataque 4° e 10° , mostram esteiras densas e aderidas ao corpo, sem nenhuma tendência de descolamento, conforme esperado para a situação de baixos ângulos de ataque. Porém, a Fig. 7.19, para ângulo de ataque 14° ,

permite perceber uma esteira com diversas perturbações na superfície superior do aerofólio, sobretudo no bordo de ataque, onde começa a se desenvolver uma bolha de recirculação.

As linhas de corrente perfeitamente aderidas à superfície superior do aerofólio das Fig. 7.6 e 7.7, para ângulo de ataque 4° , e Fig. 7.13 e 7.14, para ângulo de ataque 10° , contrastam com as linhas de corrente da Fig. 7.20 e 7.21, para ângulo de ataque 14° . Nestas últimas figuras, nota-se que o escoamento começa a ter dificuldade em acompanhar a superfície superior do aerofólio, sendo obrigado a contornar a bolha de recirculação no bordo de ataque, para posteriormente recolar na superfície.

Apesar do fenômeno de transição da camada limite laminar para a turbulenta ser inerentemente tridimensional, uma simulação bidimensional pode ter a capacidade de capturar seus efeitos, tendo em vista as perturbações provenientes dos resíduos da solução numérica (SHAN et al. (2005)). As Fig. 7.6, 7.7, 7.8, 7.13, 7.14, 7.15, 7.20, 7.21 e 7.22. mostram esta capacidade do modelo desenvolvido neste trabalho representar um efeito puramente tridimensional, a partir de uma simulação bidimensional. Percebe-se claramente a formação de instabilidades na superfície superior do aerofólio, cuja origem no bordo de ataque desenvolve uma camada cisalhante, melhor visualizada entre a bolha e o aerofólio da Fig. 7.22, que tende a se enrolar e a provocar instabilidades na geração de vórtices, como pode ser visto também na Fig. 7.22, a partir da metade da corda em direção ao bordo de fuga do aerofólio. O recolamento do escoamento pode ser então visualizado nas linhas de corrente das Fig. 7.20 e 7.21.

O modelo numérico desenvolvido mostrou-se suficientemente sensível para capturar o fenômeno da formação da camada limite laminar, desenvolvimento de uma bolha de circulação primária, transição da camada limite laminar para a turbulenta e conseqüente recolamento do escoamento e retardamento do estol, como pode ser observado novamente nas linhas de corrente das Fig. 7.20 e 7.21.

Deste modo, em uma simulação bidimensional, apesar das condições de contorno serem permanentes e de não haver nenhuma perturbação externa, o fenômeno da transição pode ser disparado por ruídos numéricos, os quais transferem a instabilidade para o escoamento através da geração de vorticidade na parede, provocando as oscilações nos resultados, e o aparecimento de estruturas rotacionais de maior escala, emitidas repetidamente, como pode ser visto nas Fig. 7.7 e 7.14 e 7.21.

A Fig. 7.23 mostra os resultados obtidos para C_L utilizando-se as metodologias para cálculo dos carregamentos de LEWIS (1991), SHINTANI (1994) e WU (1981), a partir dos dados da Tab. 2 com $Re = 10^5$, em comparação com os valores experimentais de BLENVIS (1984).

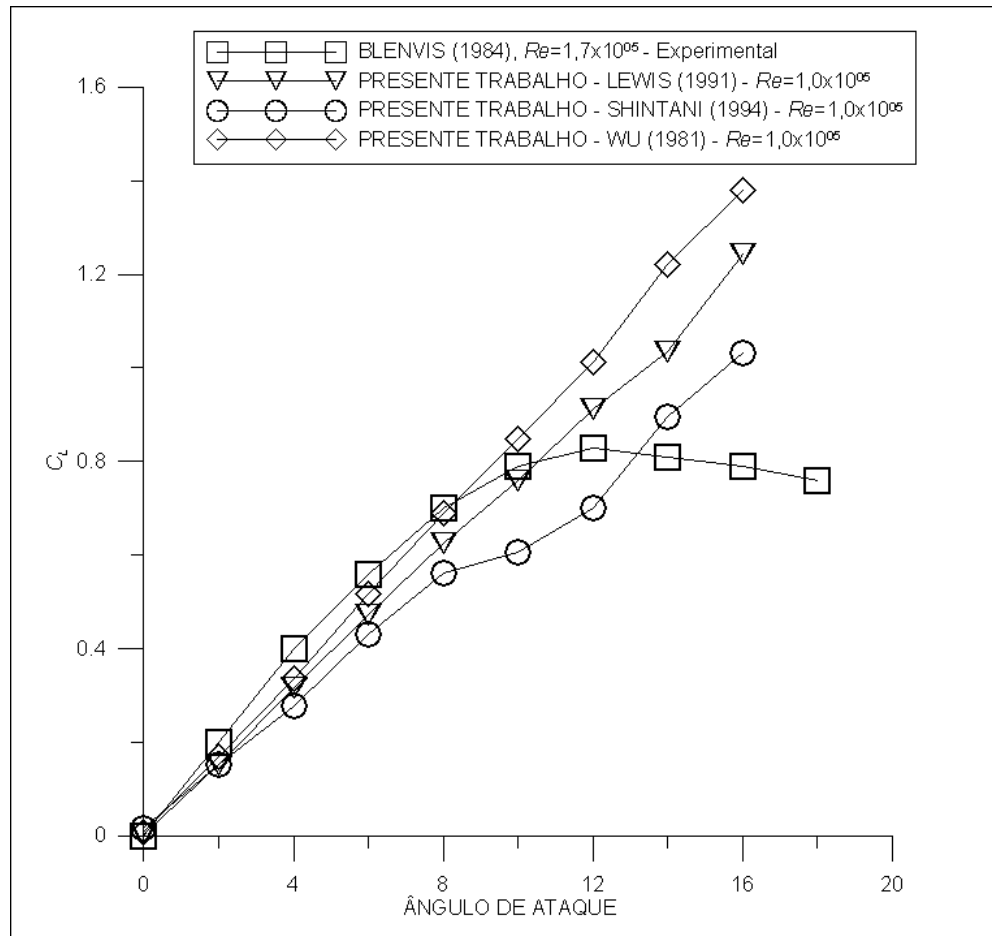


Figura 7.23 – Coeficiente de Sustentação(C_L)
Dados da Tab. 7.2 e $Re=10^5$

A Fig. 7.23 permite concluir que, para o caso da simulação em estudo, os resultados de C_L obtidos utilizando-se a metodologia de WU (1981) para cálculo das cargas apresentam melhor concordância com os resultados experimentais de BLENVIS (1984), quando comparados à LEWIS (1991) e a SHINTANI (1994).

A Fig. 7.24 mostra os resultados obtidos para C_D utilizando-se as metodologias para cálculo dos carregamentos de LEWIS (1991), SHINTANI (1994) e WU (1981), a partir dos

dados da Tab. 2 com $Re = 10^5$, em comparação com os valores experimentais de BLENVIS (1984).

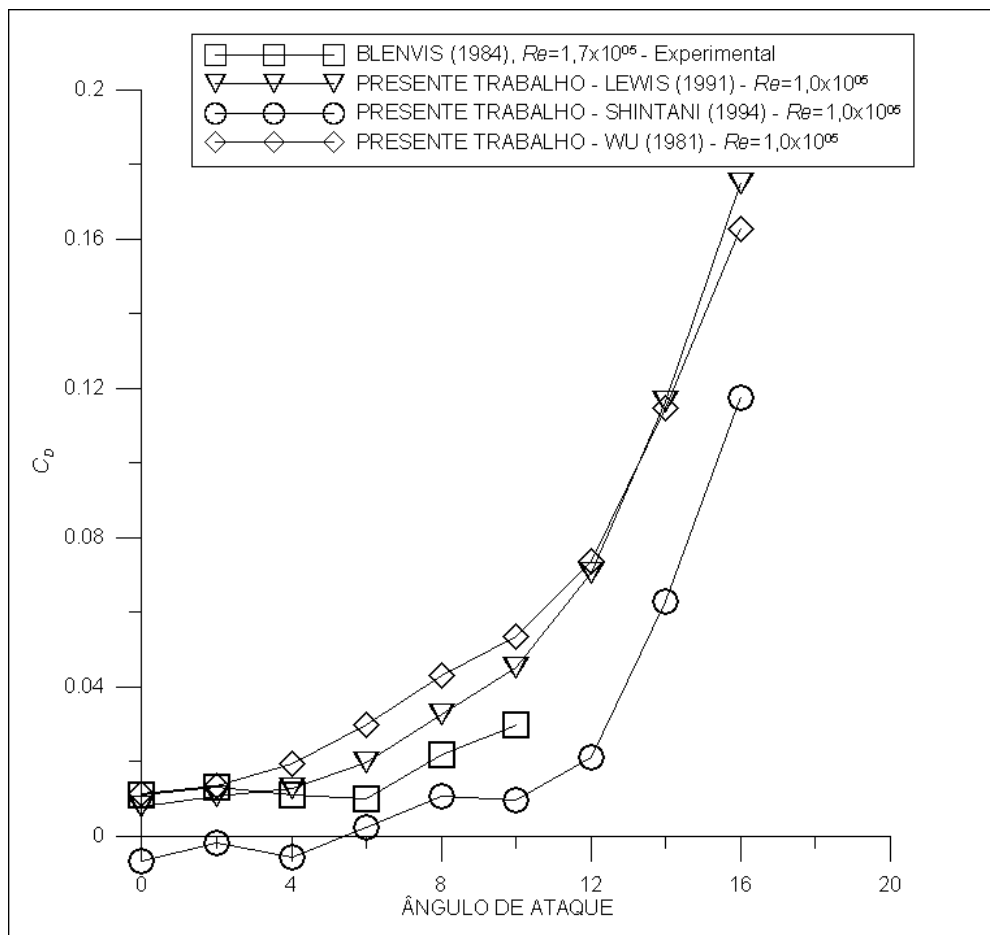


Figura 7.24 – Coeficiente de Arrasto (C_D)
Dados da Tab. 7.2 e $Re = 10^5$

Do mesmo modo que a Fig. 7.23, a Fig. 7.24 permite concluir que, para o caso da simulação em estudo, os resultados de C_D obtidos utilizando-se a metodologia de WU (1981) para cálculo das cargas apresentam melhor concordância com os resultados experimentais de BLENVIS (1984), quando comparados à LEWIS (1991) e a SHINTANI (1994).

A Fig. 7.25 apresenta o Coeficiente de Sustentação (C_L) obtido com os dados da Tab. 7.2 para $Re = 10^5$, através da aplicação da metodologia de WU (1981), e ainda fornece dados experimentais obtidos por BLENVIS (1984), e resultados de simulações numéricas de SILVA (2005) e SPALART (2000).

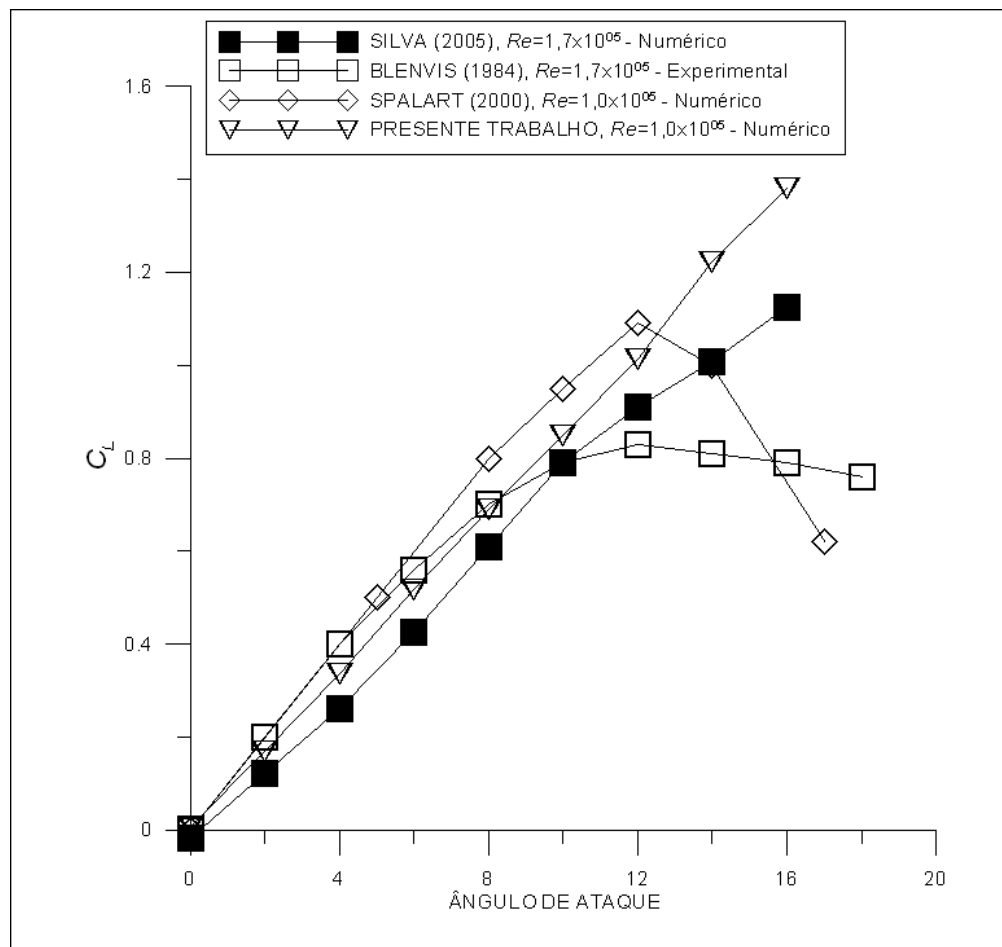


Figura 7.25 – Coeficiente de Sustentação (C_L)
Dados da Tab. 7.2 e $Re=10^5$

A Fig. 7.25 permite observar uma melhora do Coeficiente de Sustentação (C_L) obtido com a modelagem apresentada neste trabalho, com os dados da Tab. 7.2 para $Re=10^5$, através da aplicação da metodologia de WU (1981), em comparação à simulação de SILVA (2005), tendo como parâmetro os dados experimentais de BLENVIS (1984).

A Fig. 7.26 apresenta o Coeficiente de Arrasto (C_D) obtido com os dados da Tab. 7.2 para $Re=10^5$, através da aplicação da metodologia de WU (1981), e ainda fornece dados experimentais obtidos por BLENVIS (1984), e resultados de simulações numéricas de SILVA (2005) e SPALART (2000).

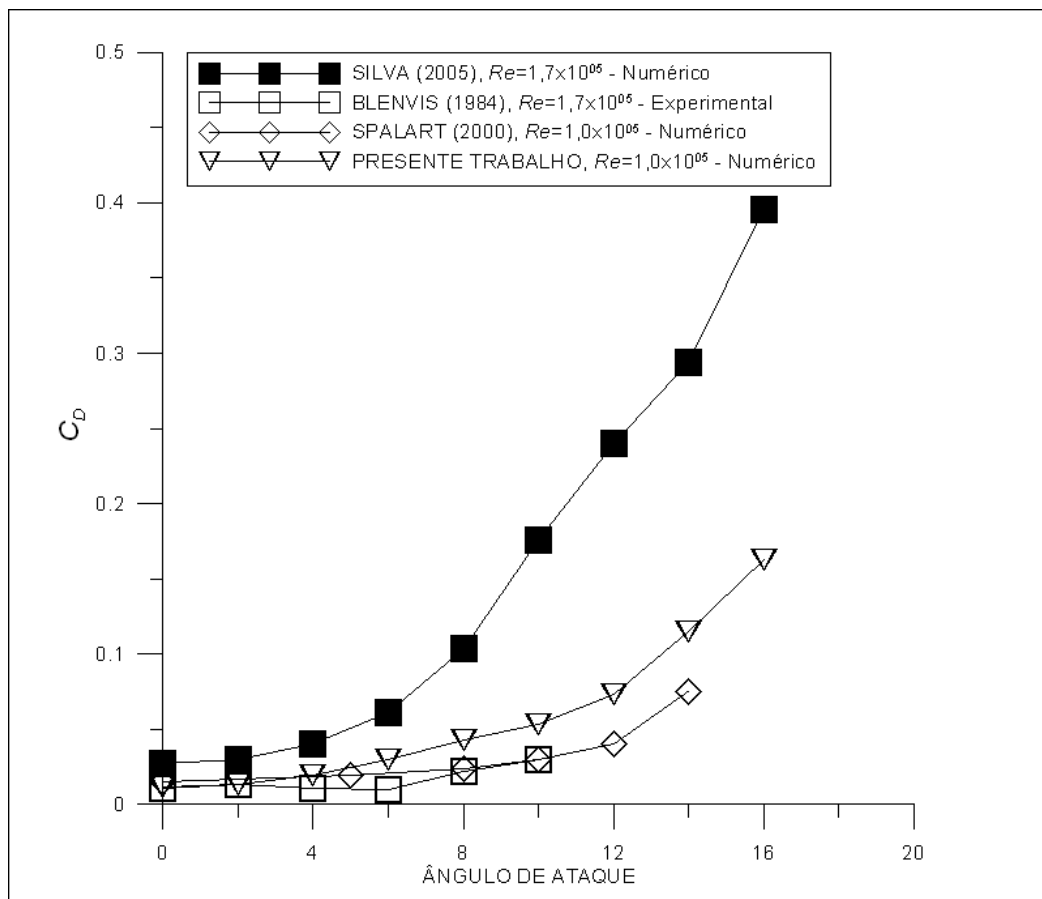


Figura 7.26 – Coeficiente de Arrasto (C_D)
Dados da Tab. 7.2 e $Re=10^5$

A Fig. 7.26 permite que se observe uma melhora do Coeficiente de Arrasto (C_D) obtido com a modelagem apresentada neste trabalho, com os dados da Tab. 7.2 para $Re=10^5$, através da aplicação da metodologia de WU (1981), em comparação à simulação de SILVA (2005), tendo como parâmetro os dados experimentais de BLENVIS (1984).

As Fig. 7.27a e Fig. 7.27b mostram respectivamente o custo computacional e o número de aglomerações da simulação obtida com os dados da Tab. 7.2 para $Re=10^5$ com ângulo de ataque= 4° .

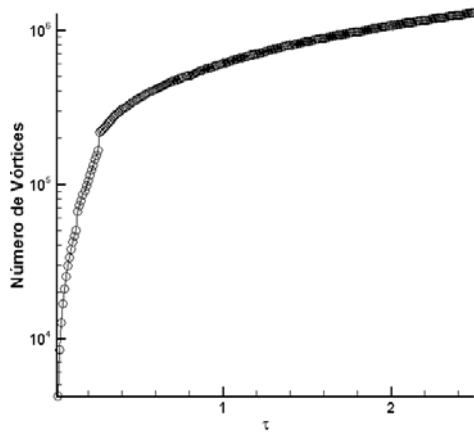


Figura 7.27a – Variação temporal do
Número de Vórtices
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$

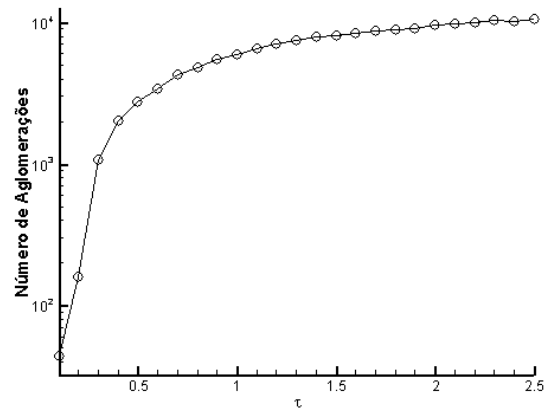


Figura 7.27b - Variação temporal do
Número de Aglomerações
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$

A Fig. 7.27a permite que se perceba o crescimento exponencial do número de vórtices causado pelo Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) nos instantes iniciais, seguido de um comportamento assintótico à medida que $t \rightarrow \infty$. O alto numero de vórtices eleva substancialmente o custo computacional do modelo numérico desenvolvido, mesmo considerando os avanços obtidos pela utilização do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA) na etapa convectiva, como foi visto na seção 4.4.1, e do algoritmo da aglomeração e corte, cujo resultado para a simulação em questão é mostrado na Fig. 7.27b.

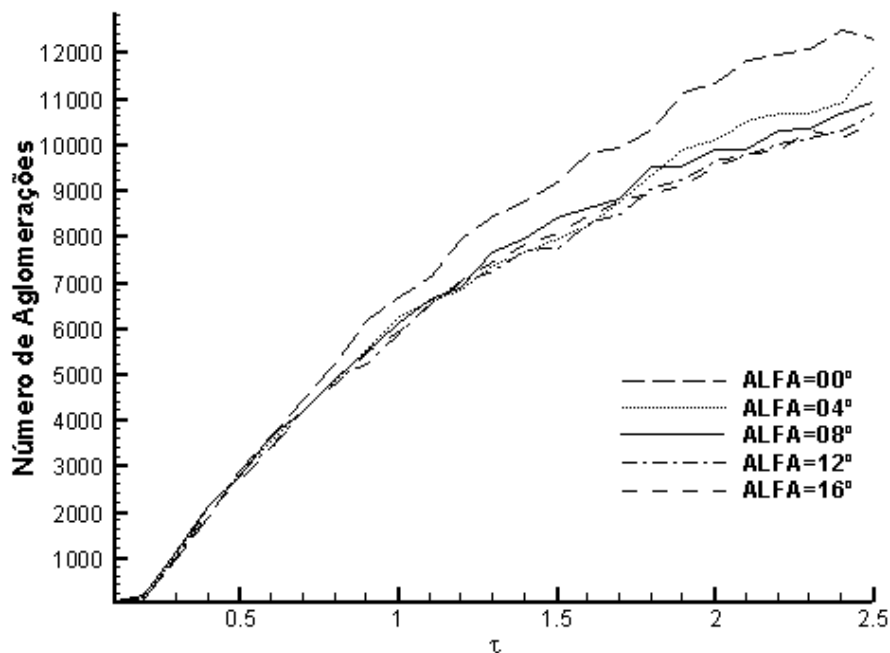


Figura 7.28 - Número de Aglomerações
 $Re = 10^5$

A Fig. 7.28 apresenta o número de aglomerações obtidas com os dados da Tab. 7.2 e $Re=10^5$, para ângulos de ataque variando de 0° a 16°

Da análise da Fig. 7.28 pode-se constatar que ângulos de ataque mais baixos têm maior número de vórtices aglomerados, quando comparados a ângulos de ataque mais elevados. Tal percepção encontra amparo no fato de que o grau de espalhamento dos vórtices é menor em ângulos de ataque baixos, o que implica em menor taxa de recobrimento entre os vórtices, com conseqüente prejuízo para o processo de aglomeração e aumento do custo computacional.

Outro fator que contribui para o aumento do custo computacional para ângulos de ataque elevados é a maior complexidade de formação da esteira viscosa. Nestes casos, para que a esteira oscilatória possa se desenvolver, é necessário alcançar tempos de simulação ainda mais longos do que os necessários para ângulos de ataque baixos, fato que impediu simular casos de tempo longo com ângulos de ataque acima de 16° .

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

A modelagem numérica apresentada neste trabalho objetiva simular escoamentos bidimensionais, incompressíveis e não permanentes ao redor de corpos aerodinâmicos, utilizando o Método de Vórtices, o qual lança mão de um referencial puramente lagrangeano e livre de malhas auxiliares de cálculo para simular a dinâmica do escoamento, através da evolução de uma nuvem de vórtices. A modelagem matemática do Método de Vórtices está baseada na equação de transporte da vorticidade.

O Método dos Painéis é utilizado neste trabalho em combinação com o Método de Vórtices para simular a presença do corpo no escoamento. O Método dos Painéis é uma particularização do Método dos Elementos de Contorno aplicado a escoamentos potenciais. Este trabalho apresentou um estudo referente à discretização da superfície sólida, utilizando uma distribuição de vorticidade linear ao longo dos painéis, a qual garante a continuidade da vorticidade nos nós, acoplada a uma modelagem para a curvatura do aerofólio, a qual, por sua vez, garante a continuidade da derivada da função que descreve a geometria dos painéis nos pontos nodais. Para representar a geometria é utilizada uma função polinomial de terceiro grau para.

A solução numérica do Método de Vórtices prevê a discretização do campo de vorticidade em vórtices que carregam funções de base representativas do escoamento. Neste trabalho são utilizados vórtices de Lamb para modelar o campo de vorticidade. Tal modelo desingulariza o campo de velocidade induzido por um vórtice pontual, através da inclusão de um núcleo de raio não nulo. A convergência do método é alcançada quando se garante um alto grau de recobrimento entre os núcleos dos vórtices presentes na simulação. A solução exata da Equação de Navier-Stokes é obtida fazendo-se o raio dos vórtices tenderem a zero e a distância média entre eles tenderem a zero ainda mais rapidamente (CLARKE & TUTTY, 1994).

Especificamente neste trabalho, estudos detalhados do modelo numérico proposto foram realizados nas seguintes etapas do algoritmo do Método de Vórtices: difusão, convecção, representação da superfície sólida e geração de vorticidade. Como citado no

capítulo 1, duas são as contribuições principais deste trabalho: a modelagem para o processo de geração de vorticidade na superfície de um corpo sólido; e a modelagem numérica completa, que une o novo modelo de geração proposto a uma combinação de modelos de difusão e convecção já disponíveis na literatura. Em outras palavras, a modelagem numérica completa, descrita no âmbito do Método de Vórtices, expressa um produto inédito para aplicações a escoamentos externos incompressíveis ao redor de corpos. Aplicações a escoamentos internos também são possíveis, do mesmo modo que extensões do Método de Vórtices a escoamentos compressíveis já se encontram reportadas na literatura. Adicionalmente, a aplicação ao problema de convecção-difusão, expresso pelo escoamento laminar ao redor de uma placa plana paralela ao escoamento, também é inédita do ponto de vista da qualidade dos resultados obtidos. Pode-se afirmar que a literatura não reporta simulações deste problema utilizando o Método de Vórtices com este nível de acurácia. Finalmente, a aplicação do Método de Vórtices a aerofólio também pode ser interpretada como uma grande contribuição deste trabalho, uma vez que a maioria absoluta das aplicações do Método de Vórtices encontradas na literatura contemplam problemas de escoamentos ao redor de corpos rombudos de seção circular.

A seguir são apresentadas individualmente as conclusões para cada etapa do Método de Vórtices desenvolvida neste trabalho, assim como para os resultados encontrados com as simulações que utilizam o modelo completo aplicado ao escoamento em torno de uma placa plana e ao redor de aerofólios.

8.1. Método de Painéis

O Método dos Painéis é utilizado para fornecer uma solução para o escoamento potencial externo ao redor de um corpo. Uma vez que no Método dos Vórtices o escoamento é considerado irrotacional em todo o domínio, com exceção da área definida pelos núcleos dos vórtices, a contribuição dos painéis para satisfação da condição de contorno na superfície sólida pode ser entendida como a contribuição do escoamento potencial ao redor do corpo.

8.1.1. Aplicação de curvatura na superfície sólida

Neste trabalho foi utilizado um modelo de distribuição de vorticidade linear ao longo dos painéis, o que garante a continuidade da função nos pontos nodais. Simultaneamente, foram utilizados painéis curvos para discretizar a geometria do corpo, o que, por sua vez, garante a continuidade da função e da derivada da função que descreve a forma do aerofólio nos pontos nodais. É utilizado um polinômio do terceiro grau para descrever a geometria. Esta é a modelagem proposta por PEREIRA (2005), o qual testou diversas combinações de representação da vorticidade e representação da geometria para ordens superiores.

A melhora na modelagem da discretização da superfície sólida, obtida pela utilização de painéis curvos, visa a aprimorar a contribuição do escoamento potencial na satisfação da condição de contorno nos pontos de controle do corpo, assim como a fornecer um campo de velocidade mais representativo nas imediações da superfície, fazendo com que se tenha continuidade no campo de velocidade induzido pelos painéis em regiões próximas aos pontos nodais.

O capítulo 5 apresenta uma comparação entre a utilização de painéis retos e curvos. Para o caso do escoamento potencial, a contribuição da curvatura nos painéis permite obter uma distribuição de pressão mais acurada no aerofólio. Adicionalmente, pode-se concluir que um número inferior de painéis curvos fornece resultados com a mesma qualidade dos obtidos com painéis retos. Naturalmente, o custo computacional por elemento aumenta, pois o custo computacional do cálculo das velocidades induzidas por painéis curvos é maior do que por painéis retos.

O capítulo 5 estuda ainda o campo de velocidade induzido por painéis retos e curvos, em simulações de escoamentos ao redor de cilindros e aerofólios. Conclui-se que estes campos passam a ser graficamente coincidentes, em regiões suficientemente afastadas da superfície. Esta constatação permite estabelecer uma regra de aplicabilidade para a utilização dos painéis curvos para determinação da velocidade induzida nos vórtices, uma vez que a avaliação das integrais numéricas envolvidas no cálculo das velocidades dos painéis curvos tem um custo computacional superior ao cálculo analítico da velocidade induzida pelos painéis retos. Deste modo, de acordo com a análise conduzida na seção 5.1,

dá-se preferência à utilização de painéis retos em detrimento à utilização de painéis curvos, para a avaliação da velocidade induzida em vórtices que distam mais que $\Delta l / 2$ do ponto de controle. Cabe ressaltar, porém, que a indução de velocidade dos painéis sobre os pontos de controle dos demais painéis é calculada utilizando-se somente painéis curvos, ou seja, são utilizados somente painéis curvos na formação da matriz de influência para cálculo da contribuição do escoamento potencial.

8.1.2. Utilização de sub-painéis

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho realiza uma discretização mais refinada para o cálculo da velocidade induzida por vórtices muito próximos do corpo, sobre os pontos de controle dos painéis. Neste caso, uma melhor representação da geometria é conseguida aplicando-se sub-painéis, conforme apresentado na seção 4.10, onde é realizado um estudo do campo de velocidade induzido por um vórtice sobre um número variável de sub-painéis, nas proximidades do ponto de controle. Os resultados deste estudo permitem que se conclua que existe uma excelente concordância gráfica em todas as situações, quando se utiliza um número superior a 4 sub-painéis. Deste modo, em todas as simulações apresentadas no capítulo 7 foram utilizados 5 sub-painéis quando a distância do vórtice considerado ao ponto de controle do painel é menor que a metade do painel, ou seja, menor que $\Delta l / 2$.

8.2. Condição de contorno na superfície – utilização simultânea de painéis e vórtices

Tradicionalmente, o método dos painéis permite a satisfação de apenas uma condição de contorno na superfície. A utilização de dipolos na superfície permite satisfazer a condição de contorno de impenetrabilidade, ao passo que a utilização de vorticidade permite apenas que se satisfaça a condição de não-deslizamento.

Este trabalho introduziu a utilização simultânea de vórtices e painéis para a representação do corpo, conforme visto na seção 4.3. Esta abordagem visa permitir a satisfação simultânea das condições de não-deslizamento e impenetrabilidade em cada ponto de controle, enriquecendo a simulação com a determinação de um fluxo de

vorticidade mais representativo da situação física em questão. A análise inédita do processo de geração de vorticidade na parede permite o desenvolvimento de um processo de geração de vórtices em paredes sólidas. O fluxo de vorticidade resultante da imposição simultânea das duas condições de contorno na parede é calculado com alto grau de acurácia e, através do novo processo de geração de vórtices, é repassado acuradamente para os vórtices nascentes. Os resultados para o cálculo do coeficiente de atrito na parede para o problema de Blasius expressam claramente a qualidade do modelo proposto.

8.3. Método de difusão.

A evolução dos modelos de difusão viscosa empregados no Método de Vórtices está intimamente relacionada à necessidade de uma representação satisfatória do campo de vorticidade, com a utilização de uma nuvem de vórtices cada vez mais densa. Tais modelos tendem a preencher o domínio com uma quantidade cada vez maior de vórtices, resultando em simulações cada vez melhores, porém, com um custo computacional também crescente. Diversos modelos de difusão viscosa foram testados e comparados entre si neste trabalho. A difusão de um vórtice pontual foi utilizada como padrão de comparação na seção 5.4 deste trabalho, tendo sido percebido a superioridade global do Método de Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) com relação ao Método do Avanço Randômico (MAR), ao Método da Redistribuição da Vorticidade (MRV) e com relação ao Método da Velocidade de Difusão (MVD). Esta análise foi realizada buscando-se comparar o desempenho dos métodos utilizando-se nuvens de vórtices de tamanhos semelhantes, uma vez que cada método possui um controle do número de vórtices distinto. Os resultados mostram que todos os métodos estudados simulam o processo de difusão viscosa corretamente, porém, a acurácia dos resultados numéricos depende fortemente do grau de recobrimento dos núcleos dos vórtices, o que por sua vez é função direta do número de vórtices presentes na simulação. Como o MCNC e o MRV são os únicos que realizam o refinamento espacial, aumentando o número de vórtices segundo critérios próprios bem definidos, pode-se concluir que estes dois são os métodos mais indicados para simulações acuradas do Método de Vórtices. No entanto, considerando-se o custo computacional e a simplicidade de implementação, pode-se concluir que o MCNC é o método de melhor custo/benefício

global. Deste modo, as simulações apresentadas nos Capítulos 6 e 7 passam a utilizar o MCNC para simular a etapa difusiva do algoritmo.

O MCNC realiza o processo de difusão da vorticidade promovendo um aumento do raio do vórtice. Este aumento é ditado pela equação $\partial\sigma^2/\partial t = \nu$, sendo controlado pelo parâmetro numérico α , que estabelece a relação entre a resolução mínima e máxima, adequados para o escoamento em questão, onde $\sigma_{MIN} = \alpha \cdot \sigma_{MAX}$. Os raios dos núcleos dos vórtices crescem até atingirem σ_{MAX} , quando, então, são divididos, mantendo-se os momentos de ordem zero e um. O momento de segunda ordem é mantido fazendo a distância para divisão ser igual a $r = 2\sigma\sqrt{1-\alpha^2}$.

O MCNC possui custo computacional elevado devido ao crescimento exponencial da nuvem de vórtices, promovido pelas sucessivas divisões, o que foi mostrado no estudo do tempo de CPU da seção 5.4. O aumento do custo computacional relacionado a este crescimento do número de vórtices é combatido pela aplicação do algoritmo de aglomeração de Rossi (1997), assim como pela aplicação de um parâmetro de corte (Γ_{corte}), o qual estabelece um valor mínimo para a intensidade dos vórtices, a partir do qual não ocorre mais a divisão do vórtice denominada refinamento espacial.

Os resultados obtidos para as simulações realizadas mostram que o MCNC, acoplado ao algoritmo de aglomeração de Rossi (1997), representa um método de difusão lagrangeano bastante efetivo para simulações de escoamentos externos, para qualquer faixa de número de Reynolds.

8.4. Convecção – Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA)

A etapa convectiva do Método de Vórtices inclui o cálculo da velocidade auto-induzida pela nuvem de vórtices, ou seja, o cálculo da velocidade induzida por cada vórtice sobre todos os outros. Tal procedimento de cálculo possui o custo computacional da ordem de M^2 , onde M é o número de vórtices presentes na simulação. Este trabalho estudou e implementou o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), proposto por Carrier *et al.* (1988). Este método reduz o custo computacional relacionado a esta etapa para ordem M , como mostrado na seção 4.4.1.

O MEMA realiza a expansão em multipolos agrupando vórtices em caixas de tamanhos diferentes, de acordo com a densidade local dos vórtices. Dentro da mesma caixa é realizado então o cálculo direto vórtice-vórtice, ao passo que as interações entre caixas diferentes são efetuadas pela expansão em multipolos.

Os resultados da utilização do MEMA são apresentados na seção 5.2, onde foi testado em distribuições uniforme, não-uniforme, não-uniforme em linha reta, não-uniforme em senóide e em uma esteira de um aerofólio com ângulo de ataque 90° . Em todas estas configurações o MEMA mostrou-se extremamente eficaz, reduzindo o custo computacional para a ordem M . A utilização de esteiras com alta densidade local de vórtices faz com que seja necessário limitar o tamanho das caixas, atuando no parâmetro numérico que controla o número máximo de vórtices por caixa. Deste modo, garante-se que o tamanho das caixas seja sempre maior que o raio dos vórtices, condição necessária para a aplicação da desingularização no interior das caixas. Em outras palavras, garante-se que vórtices que distam menos que seus raios não interajam por expansão em multipolos e sim pelo cálculo direto vórtice-vórtice com o modelo do vórtice de Lamb.

Os resultados apresentados da seção 5.2 mostram ainda que o aumento do número máximo de vórtices por caixa insere uma queda momentânea no rendimento do MEMA. Porém, mantendo-se constante este parâmetro, a inclinação da reta do tempo de CPU volta a indicar o custo computacional da ordem de M , e o método retoma o desempenho esperado.

Quanto à eficiência, os testes apresentados no capítulo 5 indicam uma fraca dependência com relação ao ângulo de ataque, ou seja, para ângulos de ataque baixos, onde existe uma concentração maior de vórtices, o rendimento do MEMA é levemente inferior, ao passo que, para ângulos de ataque mais elevados, o grau de espalhamento dos vórtices faz com que não seja necessário aumentar com frequência o número máximo de vórtices por caixa, implicando em um rendimento relativamente superior. Este resultado já era esperado, uma vez que os testes indicam uma leve dependência do desempenho do MEMA com relação à uniformidade das distribuições de vórtices estudadas.

No que diz respeito a acurácia, o erro quadrático médio foi inferior a $1,0 \times 10^{-11}$ em todos os testes realizados com o MEMA, tendo como referência o cálculo direto vórtice-vórtice.

Pode-se concluir que a utilização do MEMA só traz vantagens para a utilização do Método de Vórtices no estudo de escoamentos externos ao redor de corpos.

8.5. Aglomeração

A utilização do MCNC faz com que seja necessário estabelecer estratégias para o controle do número de vórtices presentes na simulação, comumente denominado de tamanho do problema. O algoritmo de aglomeração de Rossi (1997) se propõe a controlar o grau de recobrimento existente entre os raios dos vórtices, realizando a aglomeração dos núcleos em regiões onde a taxa de sobreposição é excessiva. Como consequência, o número de vórtices passa a ser controlado, o que faz cair o custo computacional da simulação como um todo. Entretanto, o custo computacional do algoritmo de aglomeração de Rossi (1997), que é da ordem de M^2 , passa a ser o fator limitante. Deste modo, o presente trabalho propõe como alternativa que o processo de aglomeração seja realizado por caixas, utilizando a divisão do domínio realizada por ocasião da etapa convectiva do MEMA. Assim, realiza-se a aglomeração em cada grupo de vórtices que está confinado nas caixas definidas no MEMA. Este procedimento pode ser considerado inédito, uma vez que não foi encontrada na literatura nenhuma referência ao mesmo.

O capítulo 5 apresenta os resultados para a aplicação do processo de aglomeração direta, ou seja, aquele em que a aglomeração é realizada em toda a nuvem, comparando com os resultados da aplicação do processo de aglomeração por caixas proposto neste trabalho. Conclui-se, então, que a utilização da aglomeração por caixas reduz para a ordem M o custo computacional envolvido na avaliação de esteiras com distribuição espacial uniforme. Para o caso de esteiras com distribuições não-uniformes, a redução do custo computacional é de uma ordem de grandeza, embora seu custo não seja necessariamente reduzido para a ordem M .

Conforme detalhado no capítulo 4, este procedimento não causa perda de acurácia na simulação, quando comparado ao processo de aglomeração direta, tendo em vista que o erro envolvido está limitado espacialmente em cada caixa onde ocorre a aglomeração. Deve-se ressaltar também que, do mesmo modo que não há perda de acurácia, não há perda

na eficiência da aglomeração, ou seja, ambos os procedimentos produzem o mesmo número de aglomerações, conforme atestam os resultados discutidos no capítulo 5.

8.6. Método de geração de vorticidade na parede

Pode-se considerar como uma das principais contribuições do modelo numérico apresentado neste trabalho o processo de geração da vorticidade na superfície, o qual é descrito em detalhes nas seções 3.8 e 4.4. Este modelo está intimamente ligado ao modelo proposto para a imposição simultânea das duas condições de contorno de parede, impenetrabilidade e não-eskorregamento, como discutido acima. O cálculo do raio do vórtice nascente baseia-se na Eq. 3.60, enquanto que a quantidade L de vórtices por painel, assim como a posição de nascimento, são determinados pela razão de recobrimento h/σ desejada.

Deste modo, a escolha do valor de h/σ deve levar em consideração a taxa de recobrimento desejada, a qual está ligada intimamente à convergência do método. Valores de h/σ menores implicam em um número de vórtices L maior, e, conseqüentemente, em um custo computacional mais elevado.

A qualidade dos resultados encontrados para os perfis de velocidade nas simulações de desenvolvimento de camada limite em placa plana, mostrados no capítulo 6, atesta a capacidade do modelo em questão para simular de maneira satisfatória e representativa o processo de geração de vorticidade em uma superfície sólida.

Deve-se salientar ainda o fato de que a intensidade da circulação dos vórtices nascentes leva em consideração a intensidade dos painéis e a circulação dos vórtices que compõem a matriz de influência. Deste modo, após o cálculo do campo de velocidade, os vórtices nascentes devem ter sua circulação determinada pela Eq. (4.103).

8.7. Carregamento sobre a superfície

Foram implementadas três metodologias distintas de cálculo dos esforços sobre a superfície, de acordo com o apresentado na seção 3.9: LEWIS (1991), WU (1981) e SHINTANI & AKAMATSU (1994). A primeira avalia a equação de Navier-Stokes na

parede, a segunda considera o campo de vorticidade na parede e na esteira do escoamento como todo, e a terceira parte da Equação de Poisson para pressão, escrita para a pressão total, expressando a distribuição de pressão na superfície em função da vorticidade na superfície e na esteira.

Os resultados encontrados mostram grande concordância entre as três maneiras de cálculo apresentadas, sobretudo entre LEWIS (1991) e WU (1981), conforme pode-se observar em todas as figuras relativas ao coeficiente de sustentação do APÊNDICE A.

8.8. Resultados para placa plana

O capítulo 6 apresenta e discute ainda os resultados para as simulações do escoamento ao redor de uma placa plana. Os estudos desenvolvidos permitem avaliar, primeiramente, as tendências de convergência da simulação com relação aos parâmetros numéricos α , h/σ e N . Para todos os casos mostrados no capítulo 6, verificou-se a convergência da solução quando se refinam esses parâmetros. Os resultados são obtidos para três posições na placa, $x/c = 0,25$, $x/c = 0,50$, $x/c = 0,75$ e para diversos instantes de tempo. Deste modo, valores de α mais próximos de 1 apresentam melhores resultados para o mesmo instante de tempo e para a mesma posição na placa, uma vez que o MCNC produz um maior refinamento espacial com α maiores, o que é resultado da maior quantidade de divisões dos vórtices. Do mesmo modo, valores de h/σ mais próximos de zero fornecem melhores resultados, para o mesmo instante de tempo e para a mesma posição na placa, tendo em vista que a simulação utiliza uma razão de recobrimento maior dos núcleos dos vórtices. Por último, obtém-se melhores resultados a medida que se aumenta o número de painéis N , para a mesma posição na placa e mesmo instante de tempo, o que representa uma melhoria na discretização da superfície sólida.

Observa-se também que a convergência ocorre primeiramente nas regiões mais próximas ao bordo de ataque da placa, uma vez que a espessura da camada limite é menor nesta região, podendo ser então representada por uma quantidade menor de vórtices.

Os perfis de velocidade encontrados para uma placa plana com 1% de espessura e $Re = 1000$, $\alpha = 0.6$, $h/\sigma = 0.85$, $N = 50$ e $\Gamma_{corte} = 1,0 \times 10^{-04}$ permitem validar o modelo desenvolvido neste trabalho, em comparação com o perfil de Blasius. Os resultados obtidos para as espessuras de quantidade de movimento e de deslocamento, assim como para o coeficiente de atrito, mostram muito boa concordância com as soluções teóricas disponíveis. Estes resultados devem ser realçados pelo fato de que não há outros resultados disponíveis na literatura de Método de Vórtices que apresentem tamanha coincidência com a solução de Blasius. Os resultados obtidos para placa plana de Blasius podem ser interpretados como resultados de validação da modelagem numérica proposta.

8.9. Resultados para aerofólios

A escolha dos parâmetros numéricos utilizados nas simulações com aerofólios teve como ponto de partida o estudo para placa plana conduzido no capítulo 6. Deste modo, o capítulo 7 verifica inicialmente a utilização e a aplicabilidade para aerofólios, dos valores de α , h/σ e N utilizados para placa plana, o que é feito comparando-se a convergência da distribuição de pressão com dados experimentais existentes na literatura. Os valores finais dos parâmetros escolhidos levam em consideração a necessidade de se adequá-los de maneira mais representativa à simulação do escoamento ao redor do aerofólio, conforme pode ser visto na Tabela 7.2.

Os resultados das simulações apresentados no capítulo 7 e no APÊNDICE A atestam a excelente capacidade do modelo desenvolvido neste trabalho de capturar, de maneira representativa, os fenômenos físicos associados ao escoamento incompressível ao redor de um aerofólio. As curvas de $C_L \times \alpha$ e $C_D \times \alpha$ apresentadas no capítulo 7, mostram, além de uma excelente concordância com os dados experimentais disponíveis, uma melhora significativa com relação aos modelos numéricos anteriormente desenvolvidos e disponíveis na literatura. Os resultados das simulações, quando analisados em detalhe, ilustram os mecanismos físicos principais do escoamento externo, a saber: separação, desenvolvimento das instabilidades de Kelvin-Helmholtz, recolamento, desprendimento de vorticidade, emissão alternada de vórtices e esteira oscilatória. A turbulência na esteira, característica de escoamentos de altos números de Reynolds é capturada nas suas maiores

escalas. Porém, nas menores escalas fica limitada à resolução especificada através dos valores de σ para a simulação. Basta, porém, refinar este parâmetro que o escoamento turbulento de esteira é automaticamente calculado por completo. Este caso é equivalente à Simulação Numérica Direta (DNS – “Direct Numerical Simulation”).

Nas simulações conduzidas para aerofólios, o Método de Vórtices aqui proposto tende a aumentar o custo computacional para ângulos de ataque mais elevados. Este fato ocorre por dois motivos. O primeiro é o aumento do número de vórtices necessários para cobrir uma região rotacional que se estende bastante lateralmente. O segundo é o aumento do tempo físico (adimensional) de simulação, necessário para capturar vários ciclos de oscilação da esteira, resultantes do mecanismo de emissão de vorticidade que forma uma esteira de Von Karman atrás do aerofólio.

8.10. Sugestões para trabalhos futuros

O presente trabalho desenvolveu uma modelagem numérica que buscou aprimorar todas as etapas do Método de Vórtices, desde a representação do corpo, passando pela geração da vorticidade, pelos processos de difusão e convecção dos vórtices, até o cálculo dos carregamentos sobre a superfície. Apesar dos avanços apresentados por esta modelagem, o custo computacional envolvido mostrou-se um fator limitante, mesmo com a utilização do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), sobretudo devido à alta densidade de vórtices necessária para garantir um grau de recobrimento satisfatório.

Deste modo, diversos pontos devem ser levantados como sugestões para o prosseguimento da pesquisa nesta área:

- implementação e utilização de programação paralela, que pode ser realizada através do “Message Passing Interface (MPI)”, tendo em vista a necessidade de cálculo direto vórtice-vórtice no interior das caixas do MEMA. e do cálculo direto da interação entre estas caixas, o que, para as altas densidades de vórtices necessárias para garantir um satisfatório grau de recobrimento de seus núcleos, reduz a eficiência do MEMA, aumentando o custo computacional do modelo numérico;

- melhorar a representação do campo de vorticidade, através da utilização de funções de base de ordem espacial superior, que se deformem por ação do campo de vorticidade local, conforme sugerido por Rossi (2005);
- melhorar a representação do campo de vorticidade, através de uma adaptação espacial para os vórtices, o que pode ser conseguido pela aplicação da técnica de interpolação das funções de base radiais, sugerida por Barba et al. (2005a, b), ou através de técnicas que empregam malhas auxiliares temporárias para o reposicionamento dos vórtices no espaço (“remeshing”).

Pode-se afirmar que a primeira sugestão citada é de capital importância para a realização de simulações de tempo longo para escoamentos externos sobre corpos. As duas últimas sugestões representam mudanças significativas no modelo aqui proposto e inserem um salto qualitativo em toda a metodologia lagrangiana incorporada no método de vórtices. No momento, encontram-se ainda em fase de desenvolvimento e teste.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT, I. H. & VON DOENHOFF, A., 1959, *Theory of wing sections*, Dover Publications, New York.

AKIBARI, M. H., & PRICE, S. J., 2000, "Simulation of the flow over elliptic airfoils oscillating at large angles of attack", *Journal of Fluids and Structures*, 14, pp.757-777.

AKIBARI, M. H., & PRICE, S. J., 2003, "Simulation of dynamic stall for a NACA 0012 airfoil using a vortex method", *Journal of Fluids and Structures*, 17, pp. 855-874.

ANDERSON, J. D., 1991, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, 2nd edition.

AREF, H., 1983, *Integrable*, "Chaotic and Turbulent Vortex Motion in two-dimensional Flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 15, pp. 345-389.

AREF, H. & KAMBE, T., 1988, "Report on the IUTAM symposium: Fundamental Aspects of Vortex Motion", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 190, pp. 571-595.

BARBA, L. A., LEOANARD, A. & ALLEN, C. B., 2005a, "Vortex method with fully mesh-less implementation for high Reynolds number flow computation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47, pp. 841-848.

BARBA, L. A., LEOANARD, A. & ALLEN, C. B., 2005b, "Advances in viscous vortex models-meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47, pp. 387-421.

BARNES, J. E. & HUT, P., 1986, "A Hierarchical $O(N \log N)$ Force-Calculation Algorithm", *Nature*, vol. 324, pp. 446-449.

BATCHELOR, F. R. S., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, 1st Edition, Cambridge University Press, 1970.

BERTAGNOLIO, F., SORENSEN, N., JOHANSEN, J., FUGLSANG, P., 2001, *Wind Turbine Airfoil Catalog*, Risoe National Laboratory, Risoe - R - 1280 (EN), Roskilde, Dinamarca.

BERTIN, J. J. & SMITH, M. L., 1998, *Aerodynamics for Engineers*, Prentice Hall, 3rd edition.

BHASKARAN, R. & ROTHMAYER, A. P., 1998, "Separation and instabilities in the viscous flow over airfoil leading edges", *Computers & Fluids*, vol. 27, n° 8, pp. 903-921.

BIRCH, D. & LEE, T., *Measurement of the boundary layer development on a oscillating airfoil*, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Quebec, Canadá.

BLEVINS, R. D., 1984, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold, Co.

BOUFERROUK, A. & CHERNYSHENKO, S. I., 2005, "Tykhonov regularization in discrete vortex methods", *Computers & Fluids*, 34, pp. 275-281.

BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

CARRIER, J., GREENGARD, L. & ROKHLIN, V., 1988, "A Fast Adaptive Multipole Algorithm for Particle Simulation", *SIAM Journal of Scientific Statistics and Computation*, v. 9, n. 4, pp. 669-686.

CHATTOT, J. J., 2007, "Tower shadow modelization with helicoidal vortex method", *Computer & Fluids*.

COCLE, R., WINCKLEMANS, D. & DAENINCK., GOÉRIC, 2007, "Combining vortex-in-cell and parallel fast multipole method for efficient domain decomposition simulation", *Journal of Computational Physics*, ref. YJCPH 1867.

COTTET, G., KOUMUTSAKOS, P. & SALIHI, M. L. O., 2000, "Vortex Method with spatially varying cores", *Journal of Computational Physics*, 162, pp. 164-185.

CHORIN, A. J., 1973, "Numerical Study of Slightly Viscous Flows", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 57, pp. 785-796.

CHORIN, A. J. & BERNARD, P. S., 1973, "Discretization of a Vortex Sheet with an Example of Roll up", *Journal of Computational Physics*, vol. 13, pp.423-429.

CLARKE, N. R. & TUTTY, 1994, O. R., "Construction and Validation of a Discrete Vortex Method for the Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations", *Computers Fluids*, vol. 23, n° 6, pp. 751-783.

CRITZOS, C. C., HEYSON, H. H. & BOSWINCLE, R. W., 1955, *Aerodynamics characteristics of NACA 0012 airfoil section at angles of attack from 0° to 180°*, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical note 3361.

DEVINANT, P., LAVERNE, T. & HUREAU, J., 2002, "Experimental study of wind-turbine airfoil aerodynamics in high turbulence", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 90, pp. 689-707.

ELDREDGE, J. D., 2007, "Numerical simulation of fluid dynamics of 2D rigid body motion with the vortex particle method", *Journal of Computational Physics*, 221, pp. 626-648.

FERREIRA, S. B. & FICO, N. G. C. R., *Análise de escoamento sobre aerofólios usando a técnica de volumes finitos*, Trabalho de iniciação científica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

GEISLER, W., DIETZ, G. & MAI, H., 2005, "Dynamic stall on a supercritical airfoil", *Aerospace science and technology*, vol. 9, pp. 390-399.

GUO, T., CHEW, Y. T., LUO, S. C. & SU, M. D., 1998, "A new numerical simulation method of high Reynolds number flow around a cylinder", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158, pp. 357-366.

GREENGARD, C., 1985, "The core spreading vortex method approximate the wrong equation", *J. Comp. Phys.*, 61, pp. 345-348.

GREENGARD, L. & ROKHLIN, V., 1987, "A Fast Algorithm for Particle Simulations", *Journal of Computational Physics*, vol. 73, pp. 325-348.

GREGORY, N. & O'REILLY, C. L., 1973, *Low-speed aerodynamics characteristics of NACA 0012 aerofoil section, including the effects of upper-surface roughness simulating hoar frost*, Reports and memoranda n° 3726, Aeronautical Research Council, London, England.

HE, F. & SU, T., 1998, "A numerical study of bluff body aerodynamics in high Reynolds number flow by viscous vortex element method", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 77 & 78, pp 393-407.

HESS, J. L., 1990, *Panel Methods in Computational Fluid Dynamics*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 22, pp. 255-274.

HESS, J. L. & SMITH, A. M. O., 1966, **Calculation of Potencial Flow About Arbitrary Bodies**, **Progress in Aeronautical Sciences**, vol. 3, Pergamon Press, New York, 138p.

HOERNER, S. F. & BORST, H. V., 1985, *Fluid-Dynamic Lift: Practical Information on Aerodynamic and Hydrodynamic Lift*, Hoerner Fluid Dynamics.

IHLER, A. T., 2004, *An overview of fast multipole method*, 2004.

JONCHERAY, P., 1997, “Aerodynamics of helicopter rotor in hover: the lifting vortex applied to dihedral tip blades”, ***Aerospace Science and Technology***, n° 1, pp. 17-25.

JUNG, Y. W. & PARK, S. O., 2005, “Vortex-shedding characteristics in the wake of oscillating airfoil at low Reynolds number”, ***Journal of Fluid and Structures***, 20, pp. 451-464.

KAMEMOTO, K., 1994, *Development of Vortex Methods for Grid-Free Lagrangian Direct Numerical Simulation*, Proceedings of the 3th. JSME-KSME Fluids Engineering Conference, July 25-27, Sendai, Japan.

KAMEMOTO, K., 2004, *On Contribution of Advanced Vortex Element Methods Toward Virtual Reality of Unsteady Vortical Flows in the New Generation of CFD*, Invited Lecture - Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

KAMOUN, B., AFUNGCHUI, D & CHAUVIN, A., 2005, “A wind turbine blade profile analysis code based on the singularities method”, ***Renewable Energy***, 30, pp. 339-352.

KARAMCHETTI, K., 1980, *Principles of Ideal-Fluid Dynamics*, R. E. Krieger Publishing Co.

KATZ, J. & PLOTKIN, A., 2001, *Low - Speed Aerodynamics*, 2nd edition, Cambridge University Press.

KEMPKA, S. N. & STRICKLAND, J. H., 1993, *A method to simulate viscous diffusion of vorticity by convective transport of vortices at non-solenoidal velocity*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, SAND 93-1763.

KOUMOUTSAKOS, P. & LEONARD, A., 1995, “High Resolution Simulations of the Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 296, pp. 1-38.

KUWAHARA, K. & TAKAMI, H., 1973, “Numerical Studies of two-dimensional Vortex Motion by a System of Point Vortices”, *Journal of Physics Society of Japan*, vol. 34, pp. 247-253.

KUO, C. & HSIEH, J. K., 2001, “Unsteady flow structure and vorticity convection over the airfoil oscillating at high reduced frequency”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 24, pp. 117-129.

KIDA, T & NAKAJIMA, T., 1998, “Core spreading vortex methods in two-dimensional viscous flow”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160, pp. 273-298.

LAN, L., FENG, J., JIAN-REN, F. & KE-FA, S., 2005, “Recent development of vortex method in incompressible viscous bluff body flows”, *Journal of Zhejiang University Science*, 6(A)4, pp. 283-288.

LEWIS, R. I., 1981, “Surface Vorticity Modeling of Separated Flows for Two-Dimensional Bluff Bodies of Arbitrary Shape”, *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, I. Mech. E., vol. 23, No. 1.

LEWIS, R. I., 1991, ***Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems***, Cambridge, Cambridge University Press.

LEWIS, R. I., 1999, *Vortex Element Methods, the Most Natural Approach to Flow Simulation – A Review of Methodology with Applications*, Proceedings of 1st International Conference on Vortex Methods, Kobe, Japão, pp. 1–15.

LEE, S. H. & JIN, D. S., 2002, “Comparisons of two viscous modes for vortex methods in parallel computation”, ***JSME International Journal***, vol. 45, nº 2, pp. 231-239.

MANSUR, W., PRADANOFF & AZEVEDO, *Método dos Elementos de Contorno em Recursos Hídricos*.

McCROSKEY, W. J., 1982, *Unsteady Airfoils*, ***Annual Review of Fluid Mechanics***, vol. 14, pp. 285-311.

MARTENSEN, E., 1959, *The Calculation of the Pressure Distribution on a Cascade of thick Airfoils by means of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, Aerodynamics Experimental Station, Göttingen.

MILNE-THOMSON, L. M., 1955, ***Theoretical Hydrodynamics***, MacMillan & Co, NY.

MILNE-THOMSON, L. M., 1958, ***Theoretical Aerodynamics***, Dover Publications, NY.

MORAN, J., 1984, ***An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics***, John Wiley & Sons, New York.

MUSTTO, A. A., 2004, *Simulação Numérica do Escoamento Turbulento em Torno de um Cilindro Circular via Método de Vórtices*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

NIKONOV, V.V. & SHAKHOV, V.G., 2008, *Vorticity Splitting Method for Direct Numerical Simulation of the Laminar Boundary Layer*, 4th International Conference on vortex flows and models (ICVFM 2008), 21 a 23 de Abril, Daejeon, Coréia.

OGAMI, Y. & AKAMATSU, T., 1991, “Viscous flow simulation using the discrete vortex model – The diffusion velocity method”, ***Computers & Fluids***, vol. 19, n° 3 / 4, pp. 433-441.

OGAMI, Y. & AYANO, Y., 1995, “Flows around a Circular Cylinder Simulated by the Viscous Vortex Model: the Diffusion Velocity Method”, ***Computational Fluid Dynamics Journal***, vol. 4, n. 3, (Oct), pp. 383-399.

OJIMA, A. & KAMEMOTO, K., 1999, *Numerical Simulation of Unsteady Flow Around a Sphere by a Vortex Method for Re Number from 300 to 1000*, Proceedings of 1st International Conference on Vortex Methods, Kobe, Japão.

OJIMA, A. & KAMEMOTO, K., 2001, *Numerical Simulation of Unsteady Flow Through a Horizontal Axis Wind Turbine*, Proceedings of the 2nd International Conference on Vortex Methods, ITU Maçka Campus, Istanbul, Turquia, pp. 173-180.

PEREIRA, L. A. A., HIRATA, M. H. & MANZANARES FILHO, N., 2004, “Wake and aerodynamics in multiple bodies – application to turbomachinery blade rows”, ***Journal of wind engineering and industrial aerodynamics***, 92, pp. 477-491.

PEREIRA, L. A., 1999, *Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtice Discretos*, Tese de M.Sc., EFEI, Itajubá, MG, Brasil.

PEREIRA, L. A., 2002, *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Perfis Aerodinâmicos Montados em Grades Lineares de Turbomáquinas Utilizando o Método de*

Vórtices Discretos com Modelagem Sub-Malha de Turbulência, Tese de D.Sc., EFEL, Itajubá, MG, Brasil.

PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. & MAZANARES, N., 2004, “Wake and Aerodynamics Loads in Multiple Bodies—Application to Turbomachinery Blade Rows”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 92, pp. 477–491.

PEREIRA, L. A., RICCI, J. E. R., HIRATA, M. H. & SILVEIRA NETO, A., 2002, “Simulation of Vortex-Shedding Flow About a Circular Cylinder with Turbulence Modelling”, *Computational Fluid Dynamics*, vol. 11, pp. 315-322.

PEREIRA, L. H., 2005, *Análise do desempenho do Método dos Painéis de ordem superior para o cálculo do escoamento em torno de um aerofólio*, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PEREIRA, L. H. G. & BODSTEIN, G. C. R., 2004, *Método dos Painéis com Distribuições de Singularidade Quadráticas Aplicados a Escoamentos Bidimensionais sobre Aerofólios*, ENCIT – 10º Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PEREIRA, L. H. G., SILVA, D. F. C. & BODSTEIN, G. C. R., 2004, *Estudo Numérico do Escoamento Potencial em Torno de um Aerofólio Utilizando o Método dos Painéis*, ENCIT – 10º Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PORTHOUSE, D. T. C. & LEWIS, R. I., 1981, “Simulation of Viscous Diffusion for Extension of the Surface Vorticity Method to Boundary and Separated Flows”, *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, I. Mech. E., vol. 23, No. 3, pp. 157-167.

PLOUMHANS, P. & WINCKELMANS, G. S., 2000, “Vortex method for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry”, *Journal of Computational Physics*, 165, pp. 354-406.

PLOUHAMS, P., WICKELMANS, G. S., SALMON, J. K., LEONARD, A. & WARREN, M. S., 2002, "Vortex Methods for Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Bluff Body Flows: Application to the Sphere at $Re = 300, 500$, and 1000 ", *Journal of Computational Physics*, vol. 178, pp. 427-463.

ROSENHEAD, L., 1931, *The Formation of Vortices from a surface of Discontinuity*, Proceedings of Royal Society A, vol. 134, pp. 170-192.

ROSENHEAD, L., 1963, *Laminar Boundary Layers*, Dover Publications, New York.

ROSSI, L. F., 1996, "Resurrecting core spreading vortex methods: A new scheme that is both deterministic and convergent", *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 17, n° 2, pp. 370-397.

ROSSI, L. F., 1997, "Merging computational elements in vortex simulations", *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 18, n° 4, pp. 1014-1027.

ROSSI, L. F., 2005, "Achieving a high-order convergence rates with deforming basis functions", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 26, n° 3, pp. 885-906.

ROSSI, L. F., 2006a, "A comparative study of lagrangian methods using a axisymmetric and deforming blobs", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 27, n° 4, pp. 1168-1180.

ROSSI, L. F., 2006b, "Evaluation of the Biot-Savart integral for deformable Elliptical gaussian vortex elements", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 28, n° 4, pp. 1509-1532.

ROUVREAU, S. & PERAULT, L., 2001, "Two-dimensional viscous vortex flow around a circular cylinder", *Aerospace Science Technology*, 5, pp. 85-94.

ROZHDESTVENSKY, K. V. & RYZHOV, V. A., 2003, *Aerodynamics of flapping-wings propulsors*, Progress in aerospace sciences, 39, pp. 585-633.

SAFFMAN, P. G., BAKER, G. R., 1979, *Vortex Interactions*, Annual Review on Fluid Mechanics, vol. 11, pp. 95-112.

SANTIAGO, V. S. & BODSTEIN, G. C. R., 2006, “Estudo Comparativo de Quatro Diferentes Métodos de Difusão Viscosa para Aplicação no Método de Vórtices”, Paper CIT06-0429, Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas - ENCIT (em CD-ROM), Curitiba, PR, 05 a 08 de dezembro, 2006, pp. 1-12.

SANTIAGO, V. S. & BODSTEIN, G. C. R., 2007, *Flat plate boundary layer simulation using the Vortex Method*, paper 1682, 19th International congress of Mechanical Engineering, Brasília, DF.

SANTIAGO, V. S., SILVA, D. F. C & BODSTEIN, G. C. R., 2006, *Análise de Desempenho do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo Aplicado a Simulações Numéricas Via Método de Vórtices*, Paper CIT06-0248, Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas - ENCIT (em CD-ROM), Curitiba, PR, 05 a 08 de dezembro, 2006, pp. 1-10.

BODSTEIN, G. C. R. & SANTIAGO, V. S., 2008, *Performance of a vortex merging algorithm using the computational box of the adaptive fast multipole method*, Paper 1-5174, Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas - ENCIT, Belo Horizonte, BH, 10 a 14 de Novembro, 2008.

SARKAR, S. & VENKATRAMAN, K., 2005, “Numerical simulation of thrust generating flow past a pitching airfoil”, ***Computers & Fluids***.

SARPKAYA, T., 1989, “Computational Methods with Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture”, ***Journal of Fluids Engineering***, vol.111, pp.5-52.

SARPKAYA, T., 1994, "Vortex Element Methods for Flow Simulation", *Advances in Applied Mechanics*, vol. 31, pp. 113-247.

SCHLINTING, H. & GERSTEN, K., 2000, *Boundary Layer Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

SHAN, H., JIANG, L. & LIU, C., 2005, "Direct Numerical Simulation of flow separation around NACA 0012 airfoil", *Computer & Fluids*, 34, pp. 1096-1114.

SHANKAR, S. & VAN DOMMELEN, L., 1996, "A new diffusion procedure for vortex methods", *Journal of Computational Physics*, 127, pp. 88-109.

SHELD AHL, R. E. & KLIMAS, P. C., 1981, *Aerodynamic Characteristics of Seven Airfoil Sections Through 180 Degrees Angle of Attack for Use in Aerodynamic Analysis of Vertical Axis Wind Turbines*, SAND80-2114, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico.

SHINTANI, M. & AKAMATSU, Y., 1994, "Investigation of Two-Dimensional Discrete Vortex Method with Viscous Diffusion Model", *Computational Fluid Dynamics Journal*, vol. 3, no. 2, pp. 237-254.

SHIRATO, H. & MATSUMOTO, M., 1997, "Unsteady pressure evaluation on oscillating bluff body by vortex method", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 67 & 68, pp. 349-359.

SILVA, D. F. C., 2005, *Simulação numérica do escoamento ao redor de aerofólios via método de vórtices associado ao método de painéis*, Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SILVA, D. F. C. & BODSTEIN, G. C. R., 2005, *Numerical Simulation of Unsteady Two-Dimensional Incompressible Flows Around Airfoils Using the Vortex Method*,

Proceedings of the 3rd International Conference on Vortex Flows and Vortex Models (ICVFM2005), Yokohama, JAPAN, November 21 - 23, pp. 173-178.

SPALART, P. R., 2000, “Strategies for turbulence modelling and simulation”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 21, pp.252-263.

SPREITER, J. R. & SACKS, A. H., 1951, “The Rolling up of the Trailing Vortex and its Effect on the Downwash behind Wings”, *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 18, pp. 21-32.

SRNIVASAN, G. R., EKATERINARIS, J. A. & MACCROSKEY, W. J., 1995, “Evaluating of turbulence models for unsteady flows of an oscillating airfoil”, *Computers & Fluids*, vol. 24, n° 7, pp. 833-861.

STRICKLAND, J. H., GRITZO, L. A., BATY, R. S., HOMICZ, G. F. & BURNS, S. P., 1999, *Fast multipole solvers for three-dimension radiation and fluid flow problems*, Third international workshop on vortex flows and related numerical methods, vol. 7, pp. 408-417.

SUN, M. & SHEIKH, S. R., 1999, “Dynamic stall suppression on a oscillating airfoil by steady and unsteady tangential blowing”, *Aerospace Science and Technology*, 6, pp. 355-366.

TAKEDA, K. & TUTTY, O. R., 1997, A Comparison of Four Viscous Models for the Discrete Vortex Method, 13rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Snowmass, CO, 29th June – 2nd July 1997, section N° CFD-16, Paper N°. 97-1977.

TANG, L., 2008, “Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulation of Low-Reynolds-Number Airfoil Aerodynamics”, *Journal of Aircraft*, Vol. 45, n° 3, Maio-Junho de 2008.

TEIXEIRA, I. R., SANTIAGO, V.S. & BODSTEIN, G. C. R., 2006 , Modelagem Numérica do Escoamento Incompressível Não-Permanente ao Redor de um Aerofólio com

Ponto de Separação Fixo, Anais do IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM, 22 a 25 de Agosto 2006, Recife, PE, Paper 17-545, pp. 1-10, 2006.

THWAITES, B., 1960, *Incompressible Aerodynamics*, Dover Publications, NY.

VAN DYKE, M., 1975, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford.

VEZZA, M. & GALBRAITH, R. A. McD., 1985, "A Inviscid Model of Unsteady Aerofoil Flow with Fixed Upper Surface Separation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 5, pp. 577-592.

WALTHER, J. H. & LARSEN A., 1997, "Two dimensional discrete vortex method for application to bluff body aerodynamics", *Journal of Wind and Industrial Aerodynamics*, 67 & 68, pp. 183-193.

WEE, D., GHONIEM, A. F., 2006, "Modified interpolation kernels for treating diffusion and remeshing in vortex methods", *Journal of Computational Physics*, 213, pp. 239-263.

WU, J. C., 1981, "Theory for aerodynamic force and moment in viscous flow", *AIAA Journal*, vol. 19, n° 4, pp.432-441.

YANG, R. J., JENG, C. J. & WU, C. H., 2003, "Computational of high Reynolds numbers flow by a deterministic vortex method", *Journal of Chinese Society of Mechanical Engineers*, vol. 24, n° 4, pp. 407-416.

YANG, Z., & HU, H., 2008, "Laminar Flow Separation Transition on Low-Reynolds-Number Airfoil", *Journal of Aircraft*, Vol.45, N° 3.

YING, L., BIROS, G & ZORIN, D., 2003, *A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York.

XU, C., 1998, *Surface Vorticity Modeling of Flow Around Airfoils*, *Computational Mechanics*, vol. 21, pp.526-532.

XU, C., 1999, "A Vortex Method for Separated Flow Around an Airfoil with a Detached Spoiler", *Computational Mechanics*, vol. 23, pp.271-278.

ZHAO, L., TSUKAMOTO, H., 2007, "Hybrid vortex method for high Reynolds number flow around three-dimensional complex boundary", *Computer & Fluids*, 36, pp. 1113-1223.

ZHU, B. & KAMEMOTO, K., 2003, "A lagrangian vortex method for flows over a moving bluff bodie", *Computational Fluid Dynamics Journal*, vol. 11, n° 4, pp. 363-370.

ZHAO, J., CHEW, Y. T., LUO, S. C., PAN, L. S. & WU, J.K., 2007, "Generalized Transport Vortex Method", *Computer & Fluids*, 36, pp. 1081-1091.

ZHAO, L., TSUKAMOTO, H., 2007, "Hybrid vortex method for high Reynolds number flows around three-dimensional complex boundary", *Computer & Fluids*, 36, pp. 1213-1223.

APÊNDICE A

RESULTADOS PARA O AEROFÓLIO NACA 0012
 $REYNOLDS = 1,0 \times 10^5$ e demais parâmetros da Tab. 7.2

NACA 0012, $REYNOLDS = 1,0 \times 10^5$ e $ALFA=0^\circ$

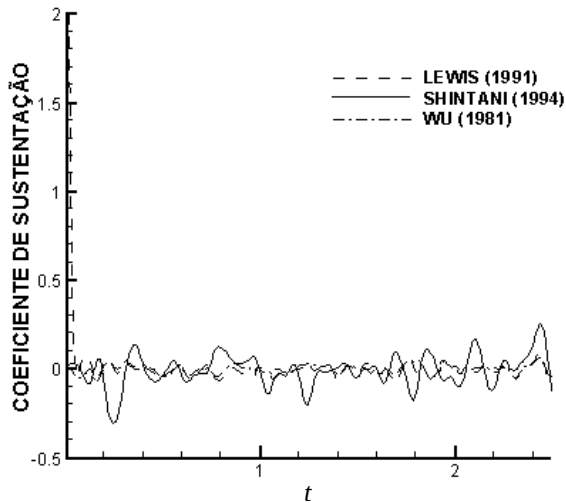


Figura A.1 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$

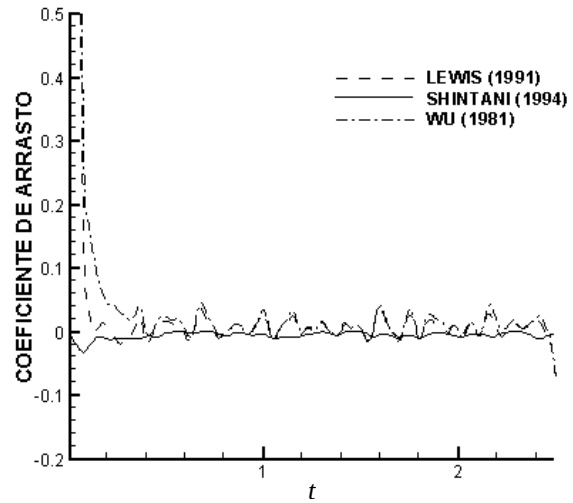


Figura A.2 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$

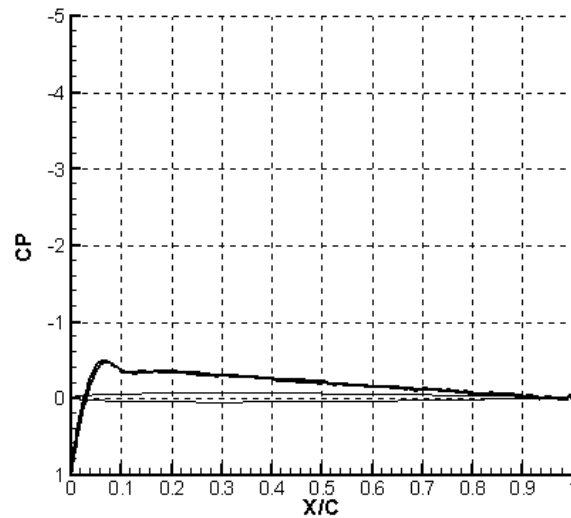


Figura A3 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.4 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

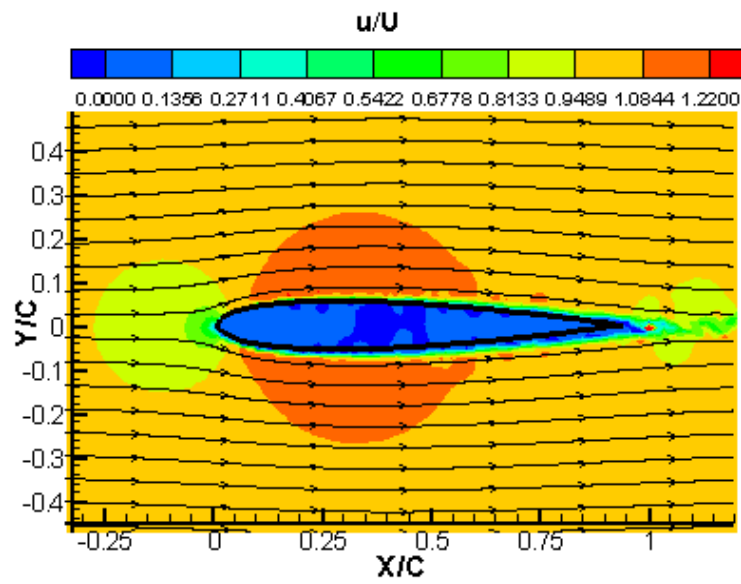


Figura A.5 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

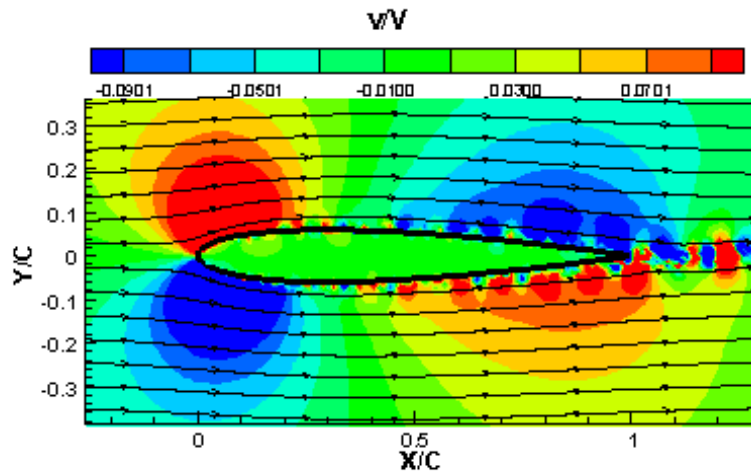


Figura A.6 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

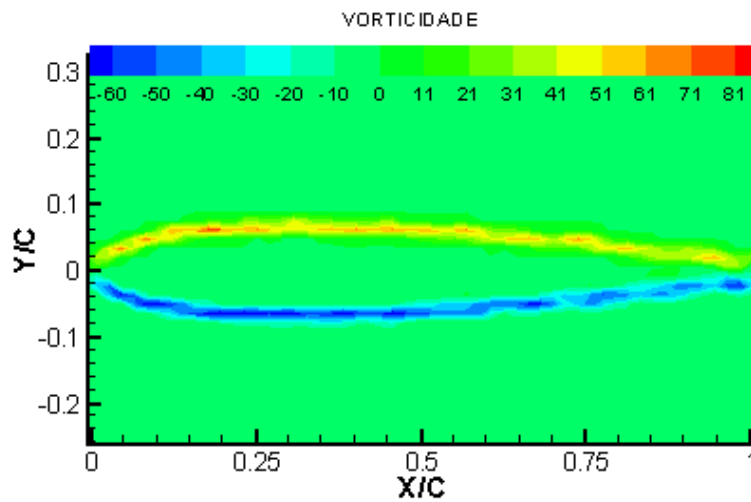


Figura A.7 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA=2°

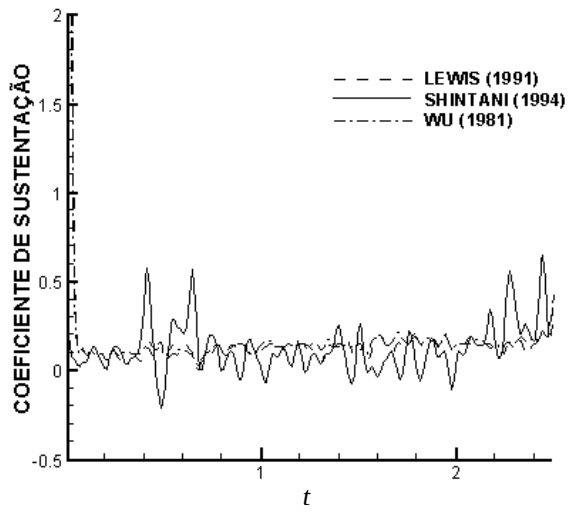


Figura A.8 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$

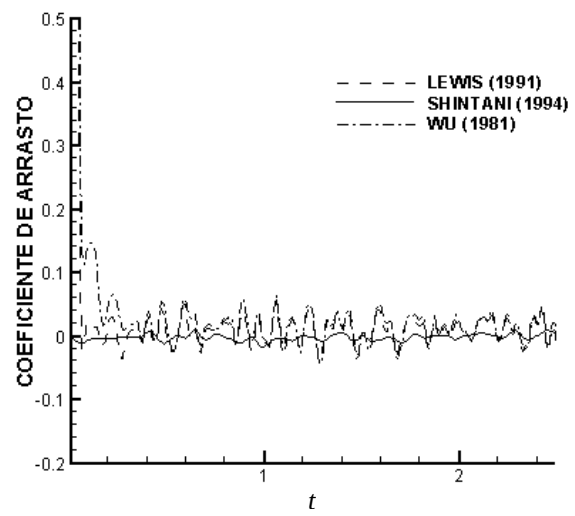


Figura A.9 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$

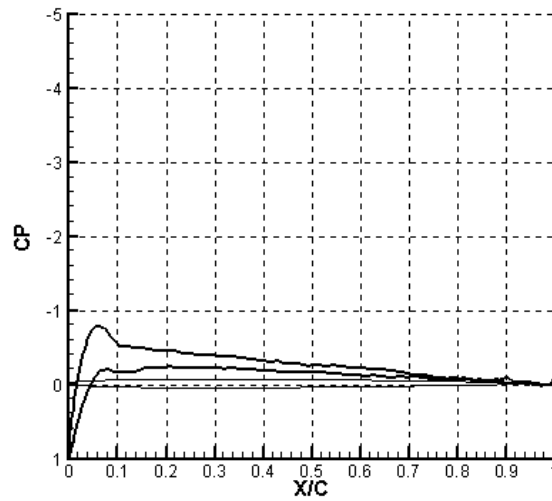


Figura A.10 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.11 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

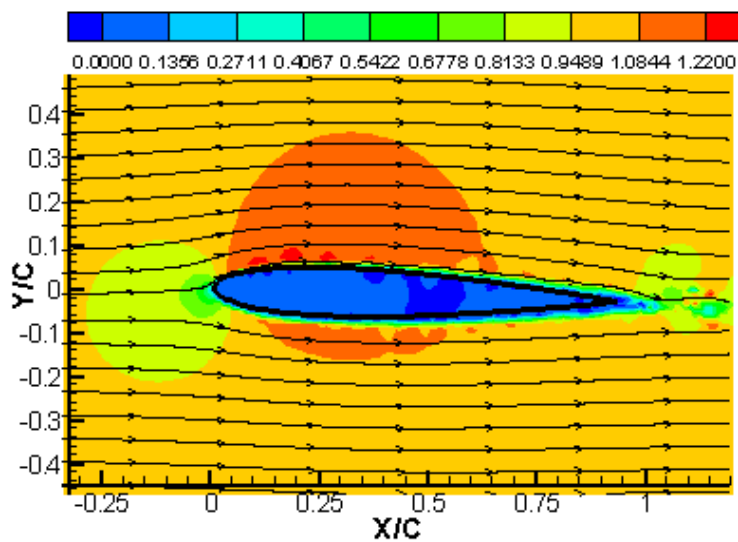


Figura A12– Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

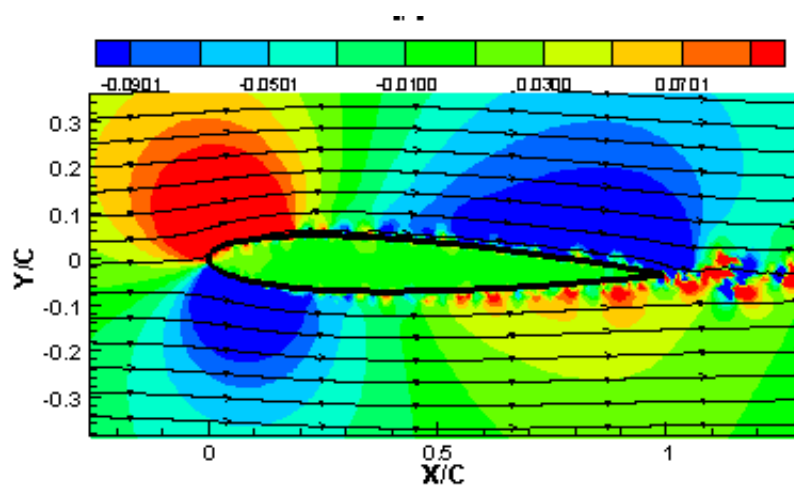


Figura A.13 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

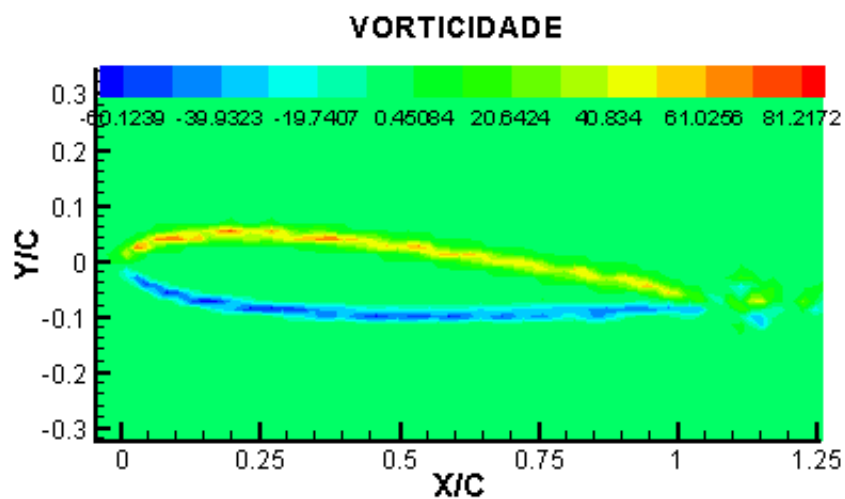


Figura A.14 –Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA = 4°

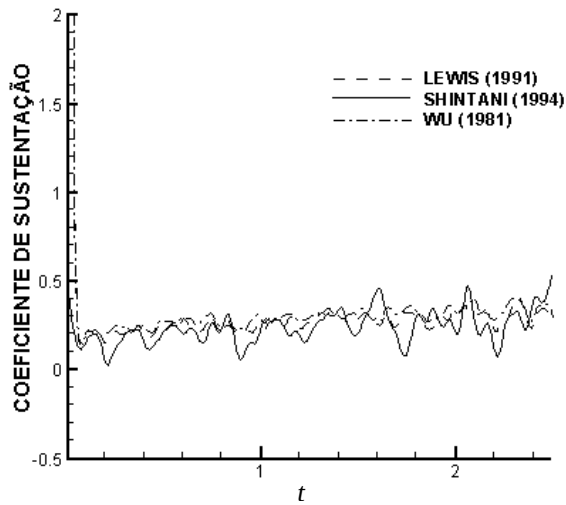


Figura A.15 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$

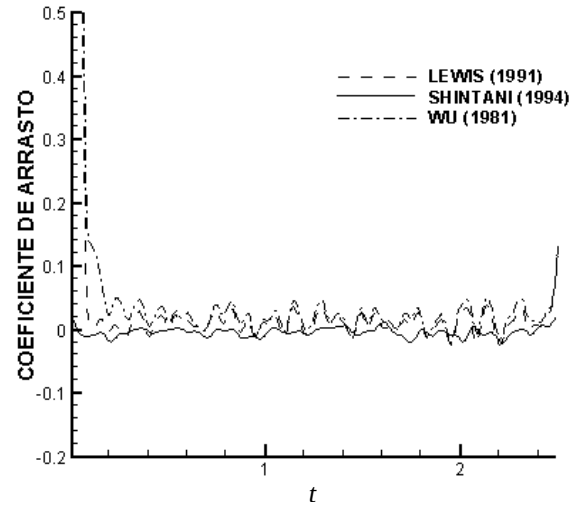


Figura A.16 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$

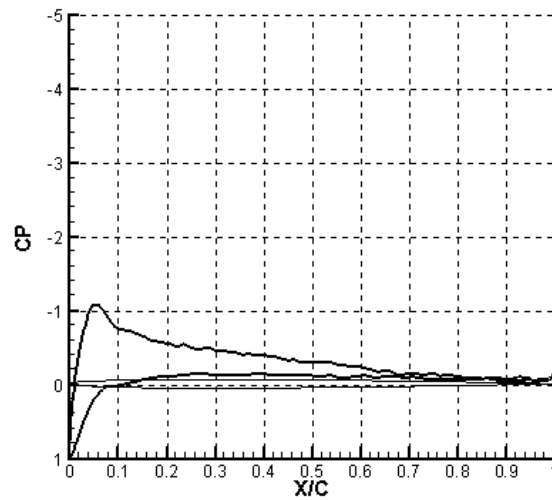


Figura A.17 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.18 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

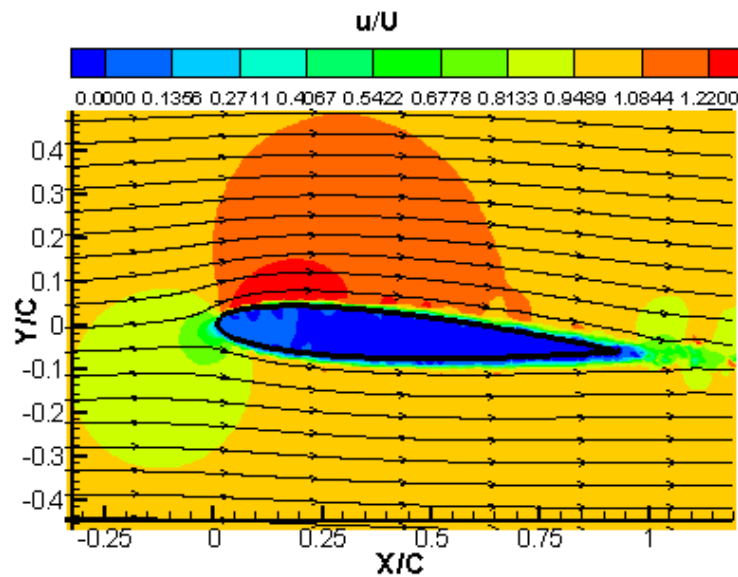


Figura A.19 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

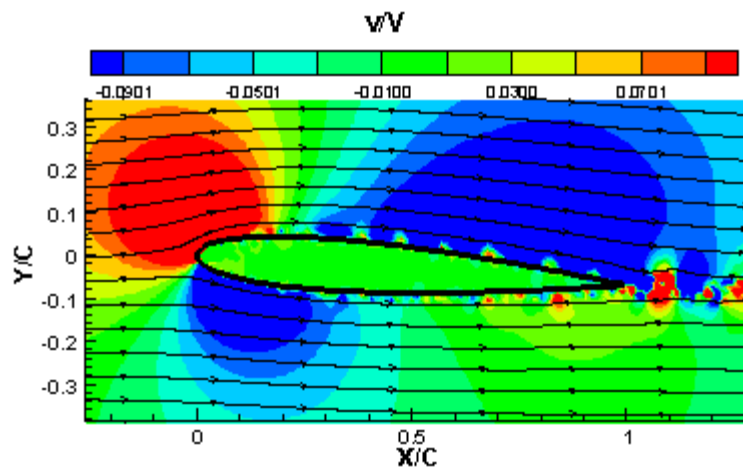


Figura A.20 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

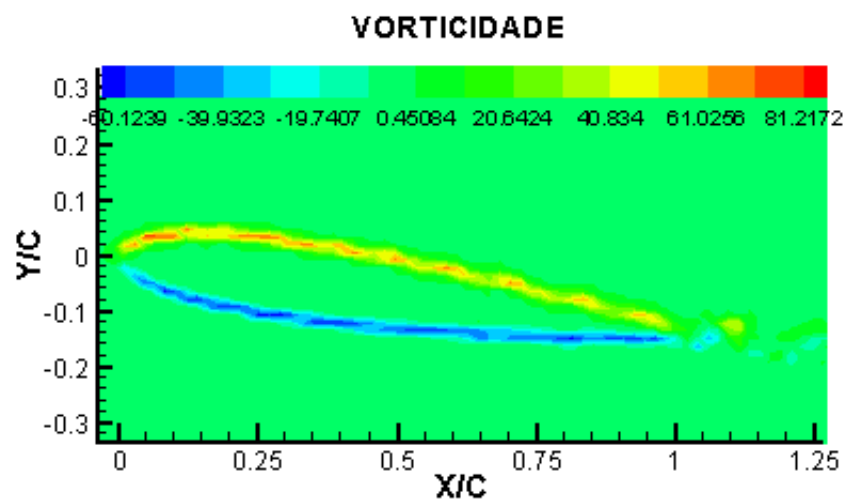


Figura A.21 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA=6°

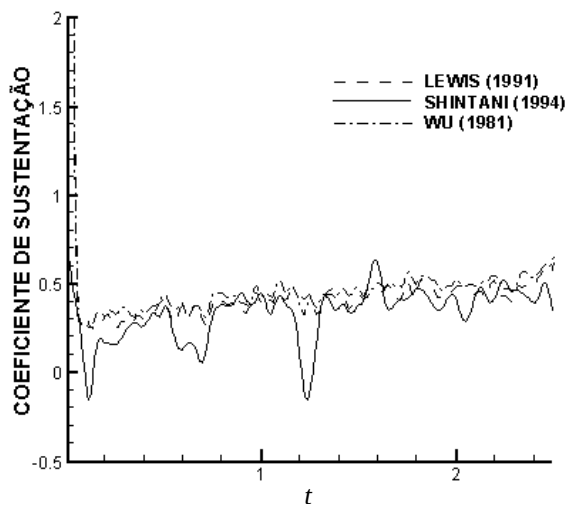


Figura A.22 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$

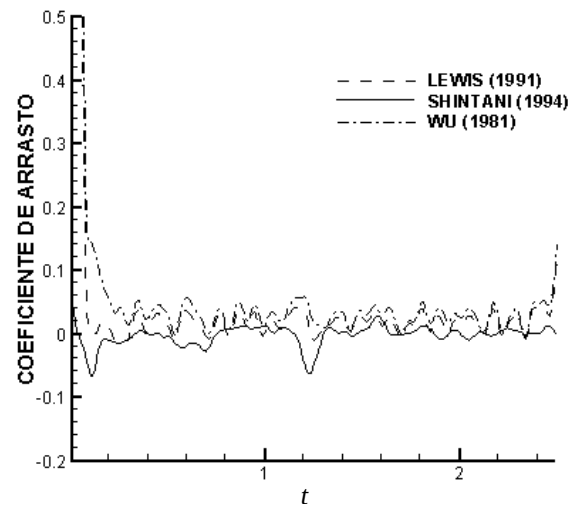


Figura A.23 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$

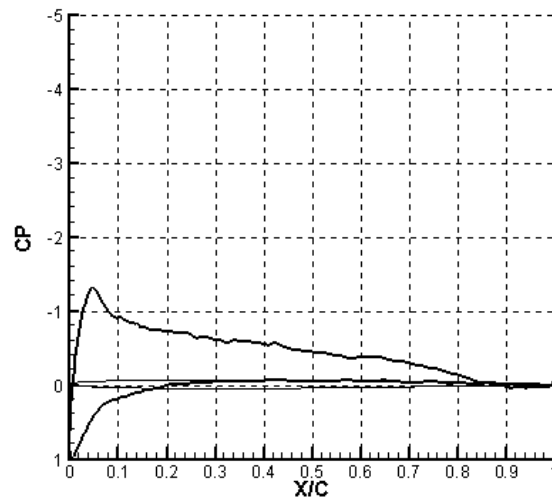


Figura A.24 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.25 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

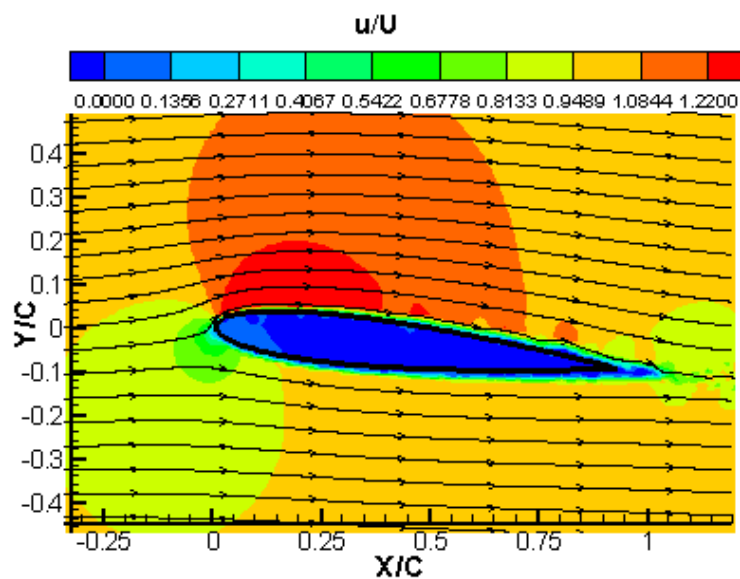


Figura A.26 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

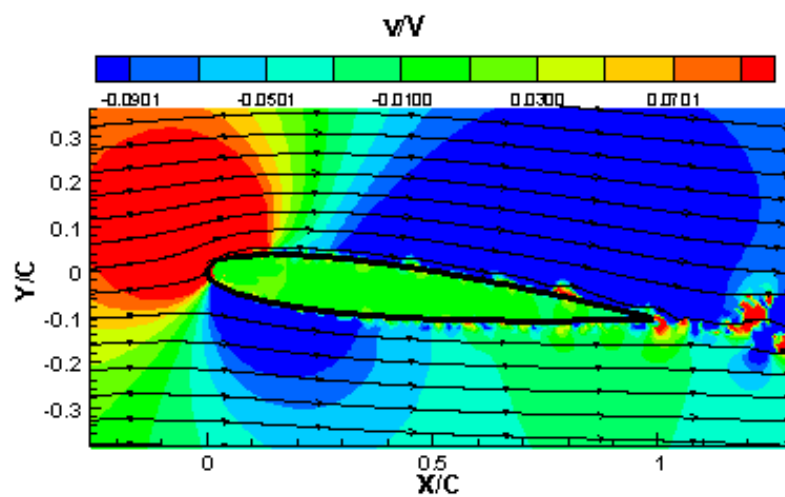


Figura A.27 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

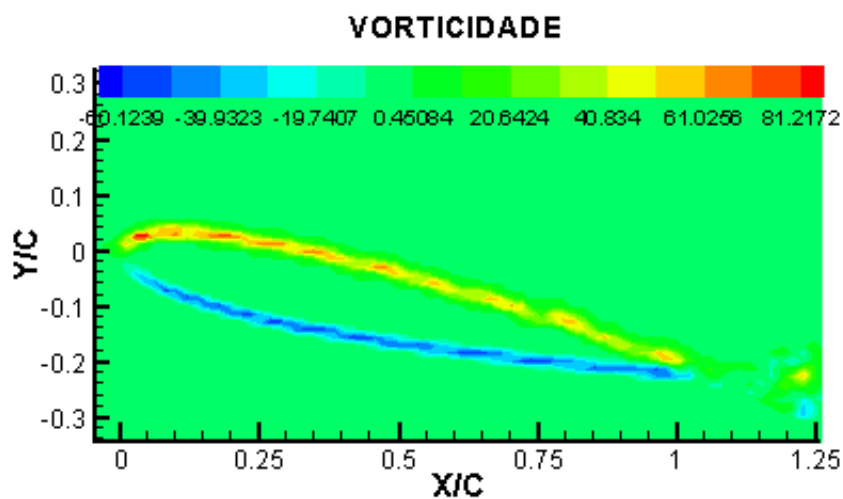


Figura A.28 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA = 8°

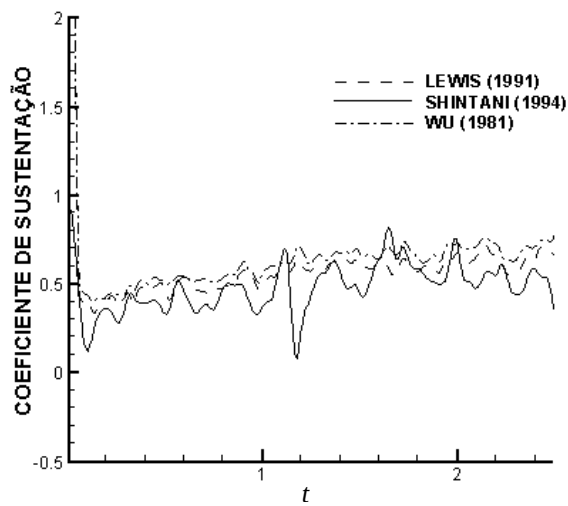


Figura A.29 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$

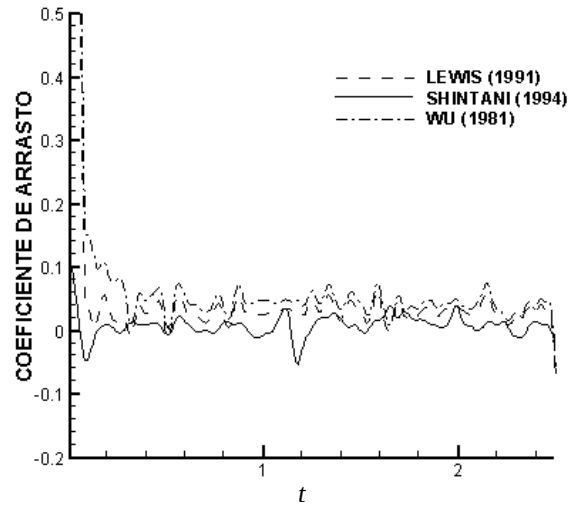


Figura A.30 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$

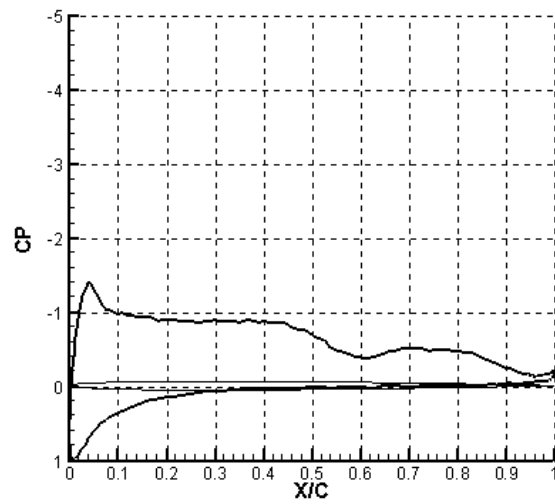


Figura A.31 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.32 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

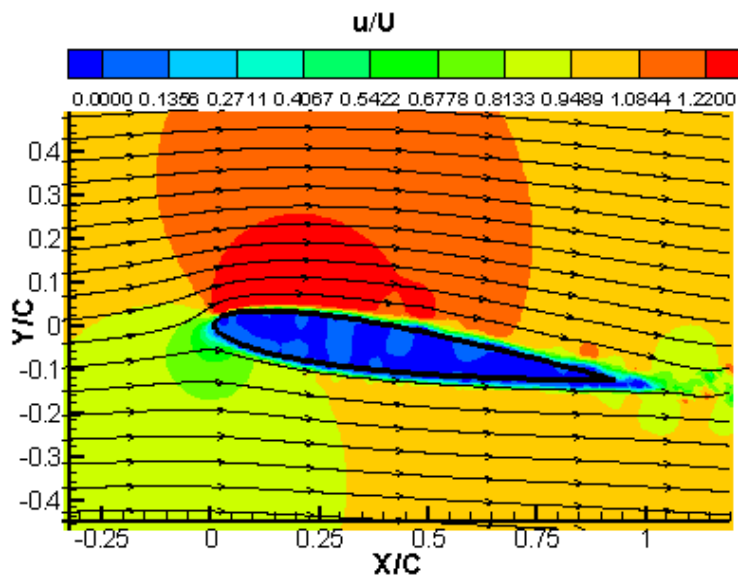


Figura A.33 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

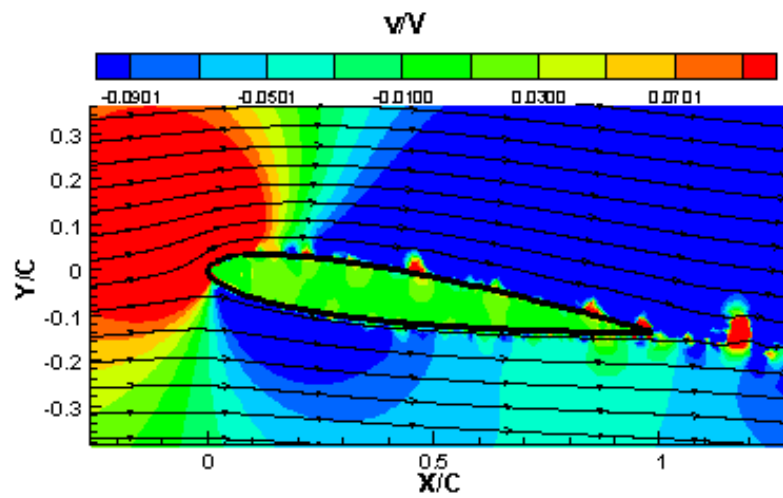


Figura A.34 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

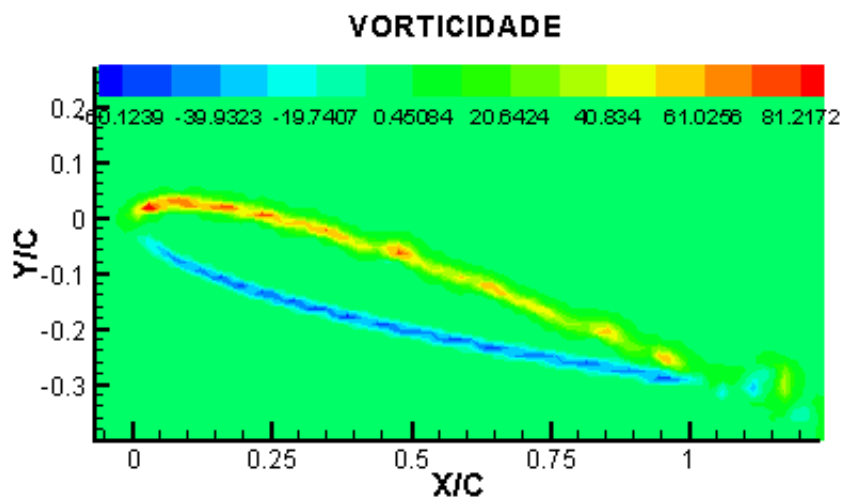


Figura A.35 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA= 10°

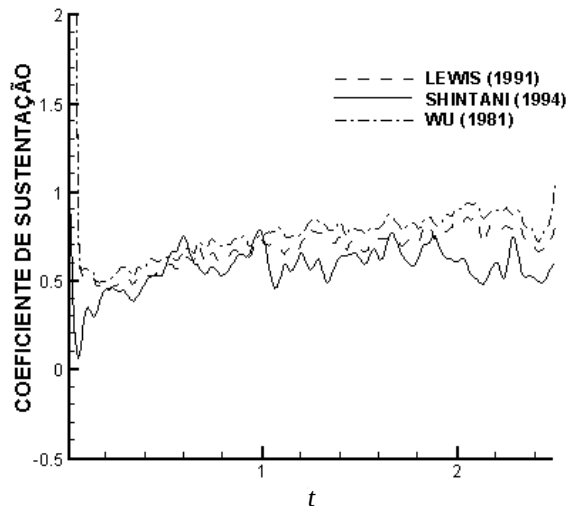


Figura A.36 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$

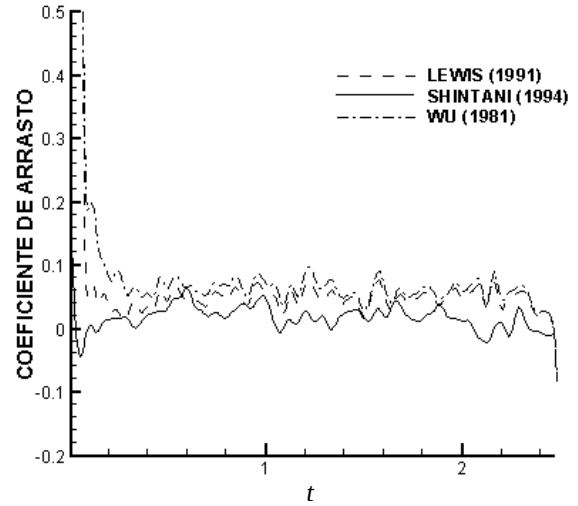


Figura A.37 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$

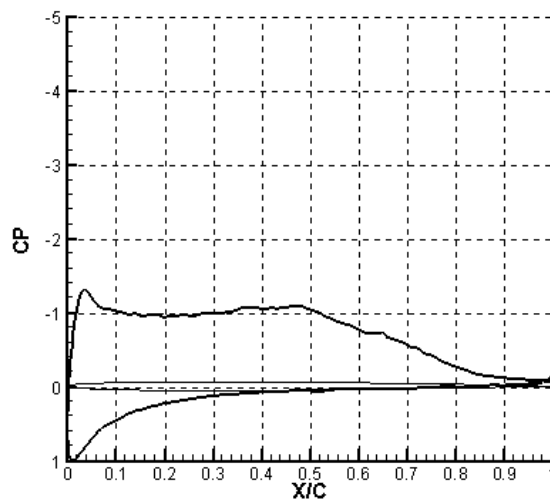


Figura A.38 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.39 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

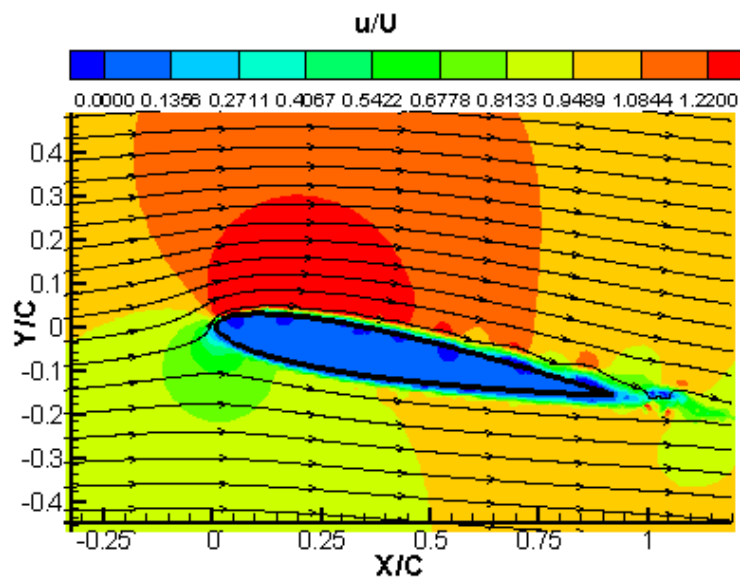


Figura A.40 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

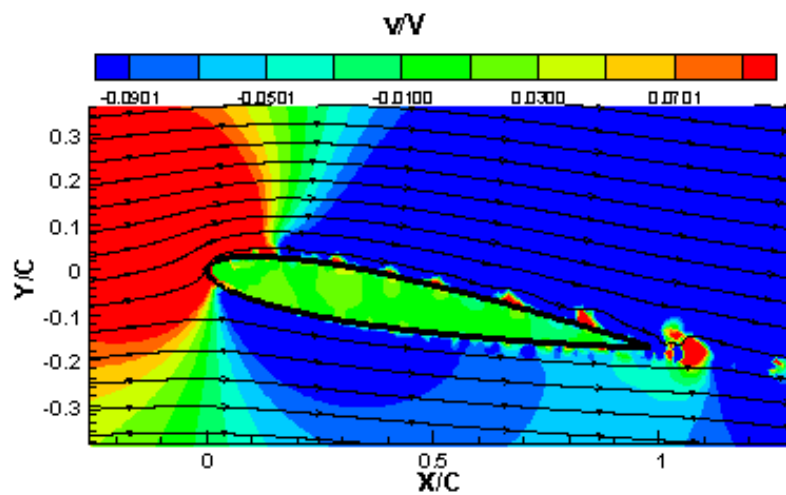


Figura A.41 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

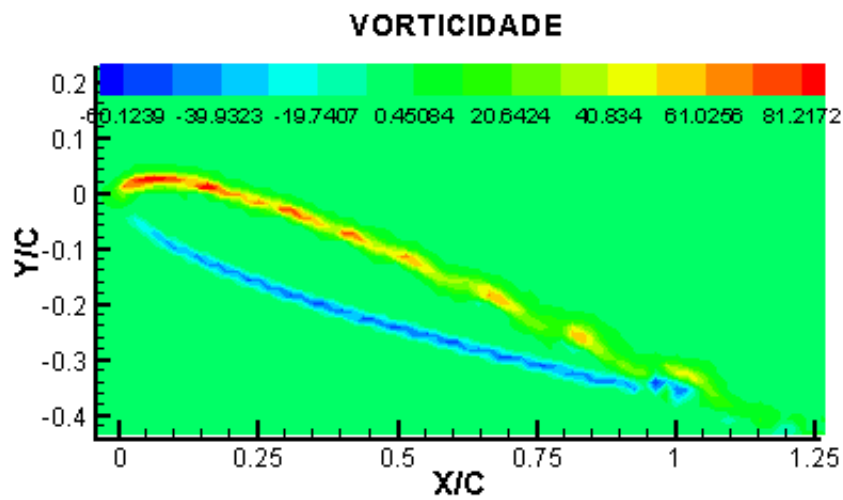


Figura A.42 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA=12°

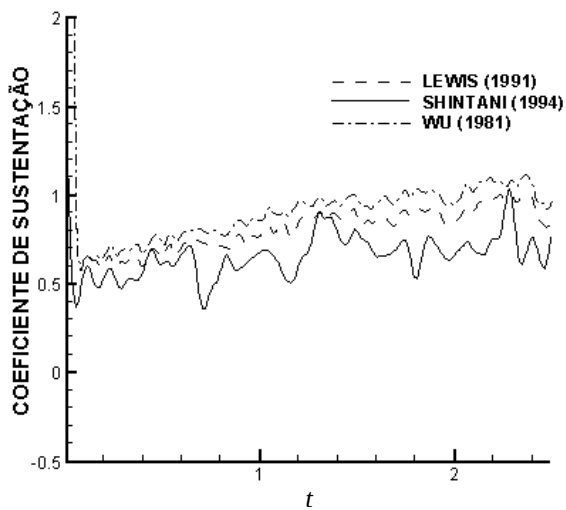


Figura A.43 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$

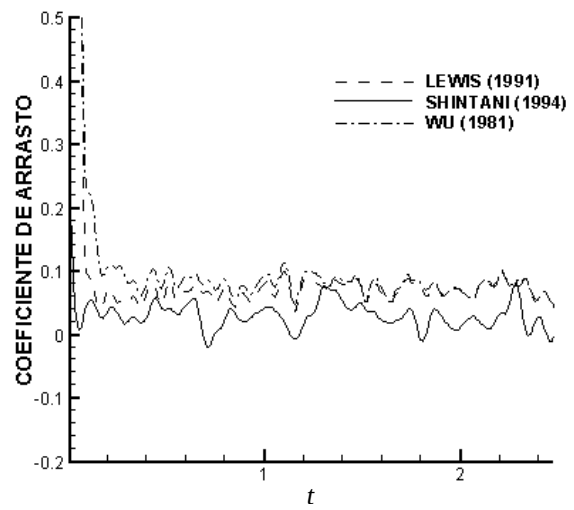


Figura A.44 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$

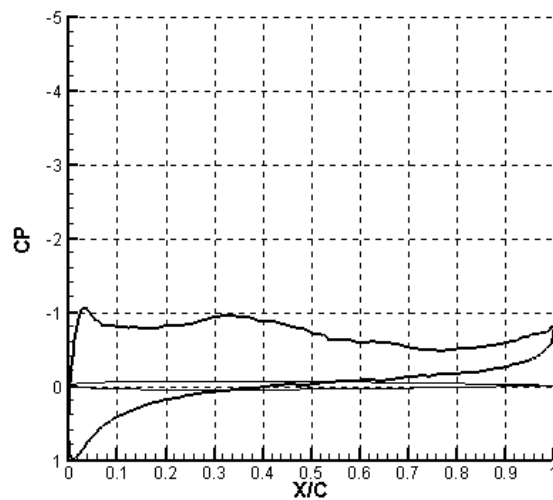


Figura A.45 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.46 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

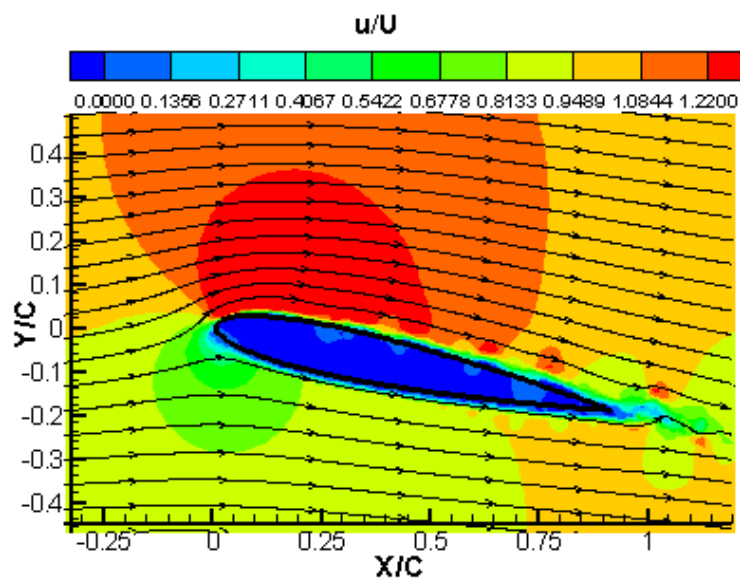


Figura A.47 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

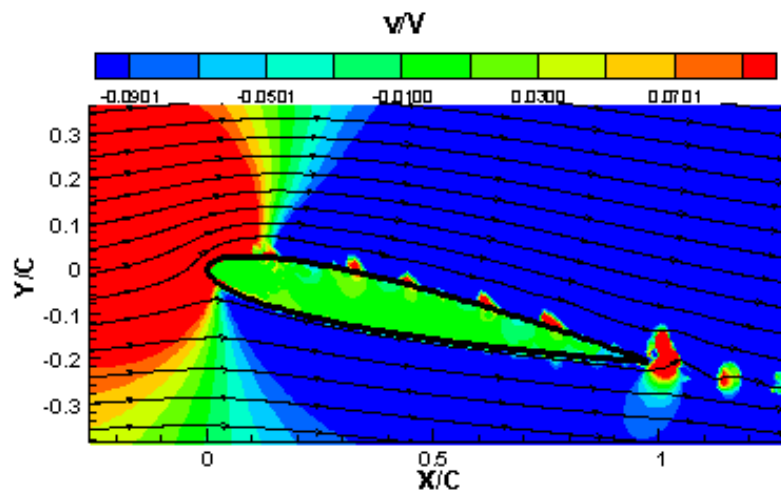


Figura A.48 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

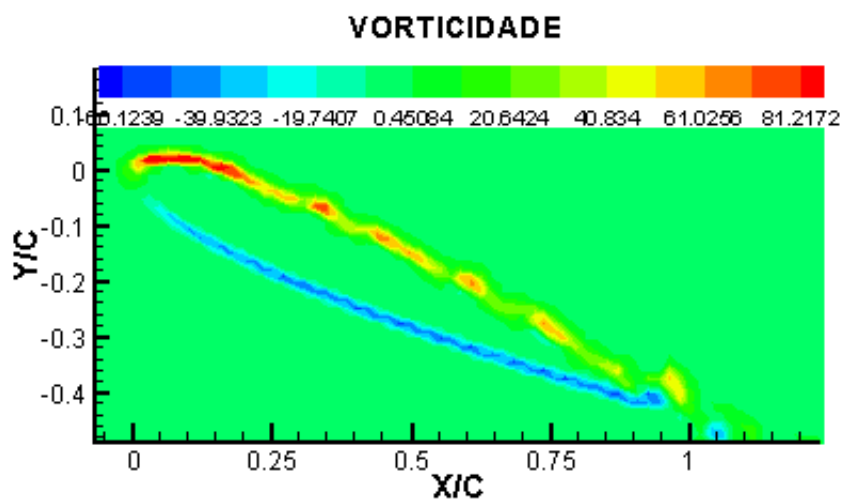


Figura A.49 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

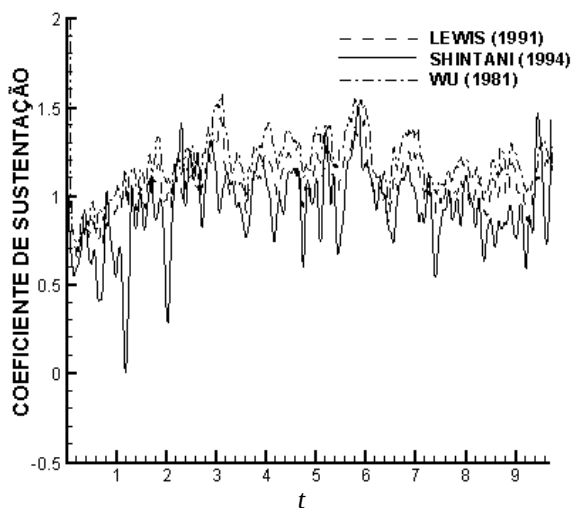


Figura A.50 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$

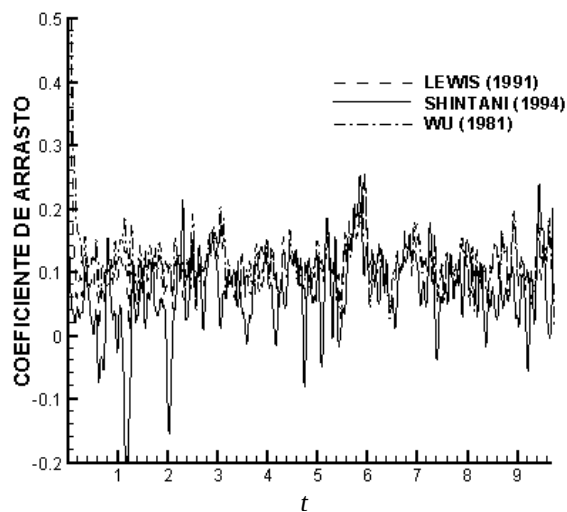


Figura A.51 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$

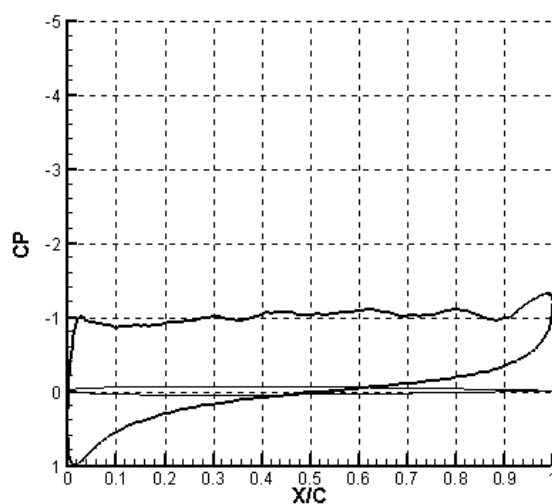


Figura A.53 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.52 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

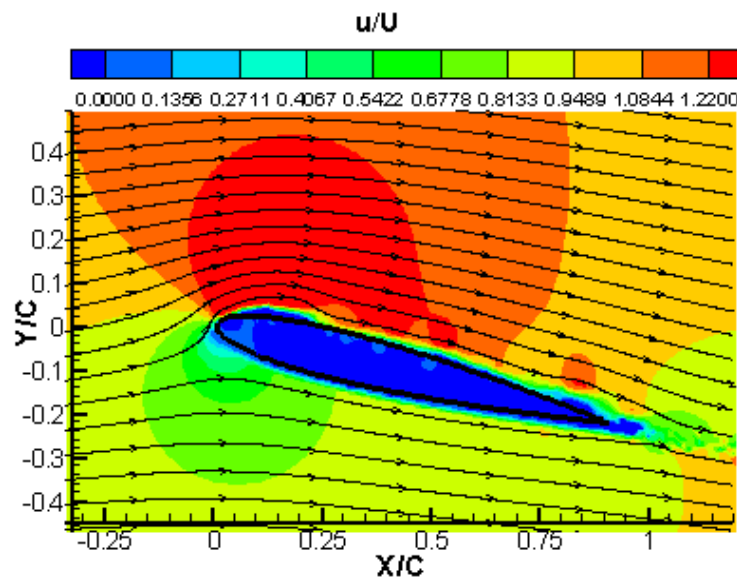


Figura A.54 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

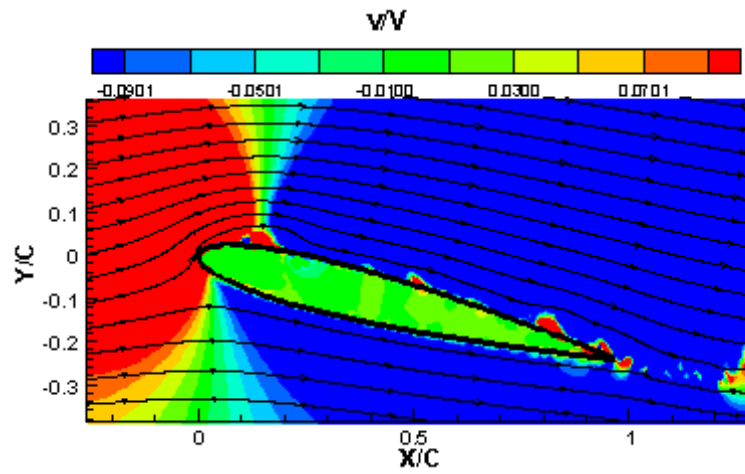


Figura A.55 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

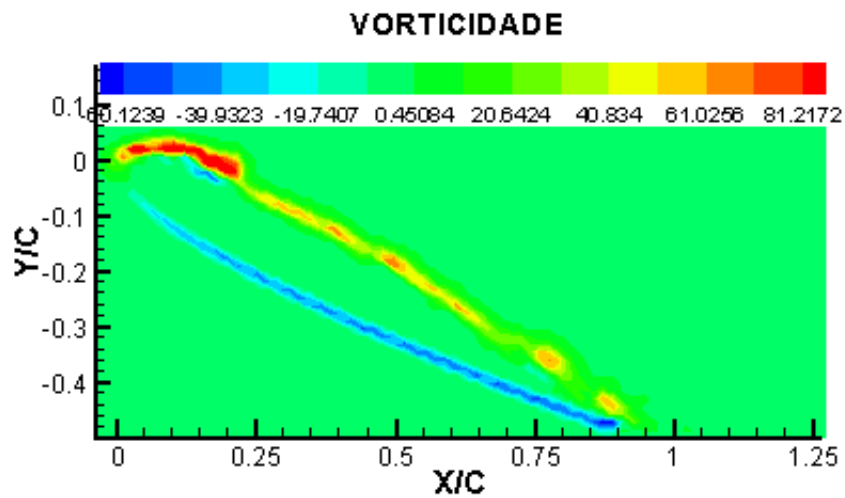


Figura A.56 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^5$ e ALFA = 16°

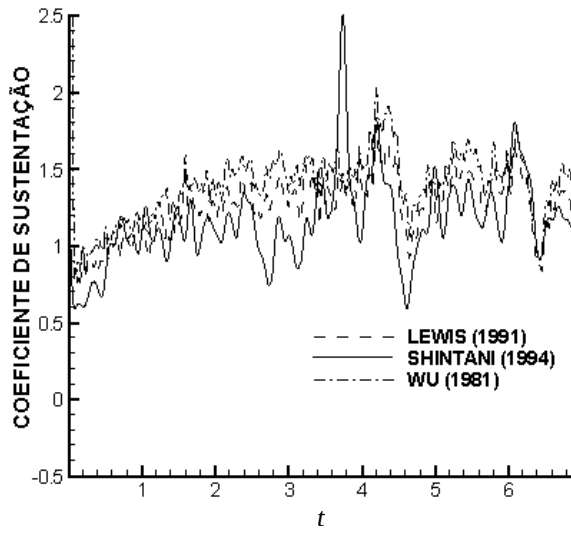


Figura A.57 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$

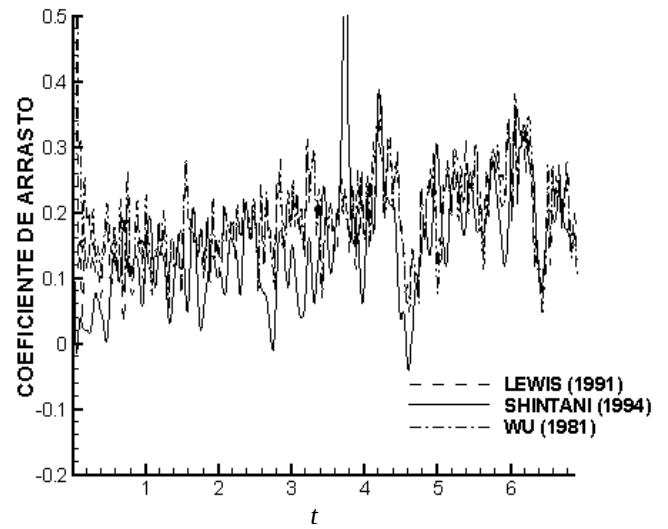


Figura A.58 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$

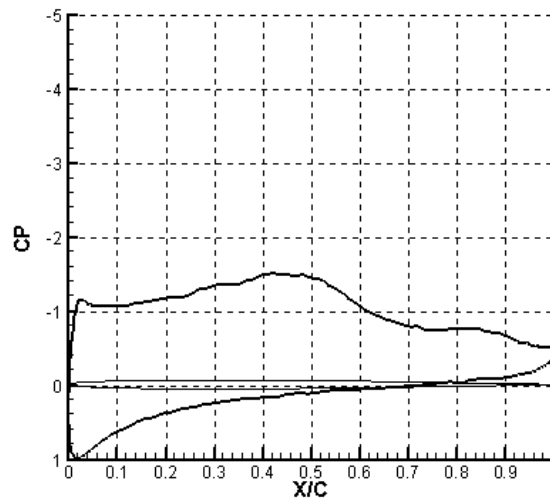


Figura A.60 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$



Figura A.59 – Esteira
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

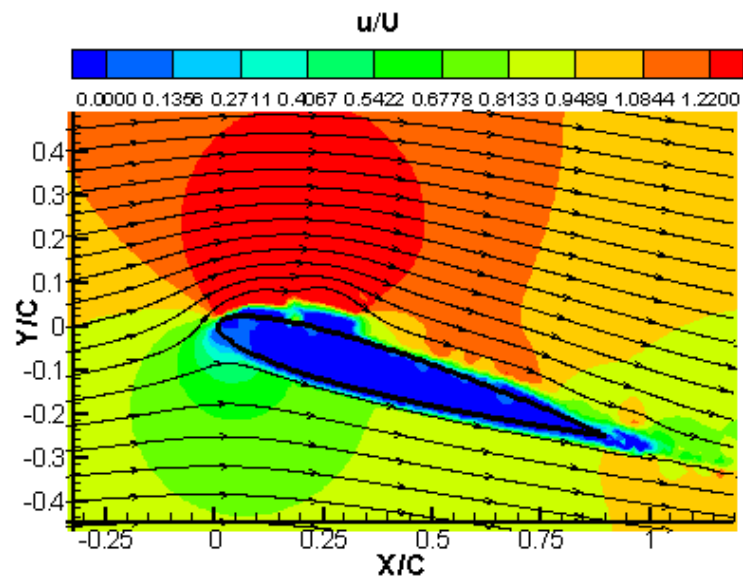


Figura A.61 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

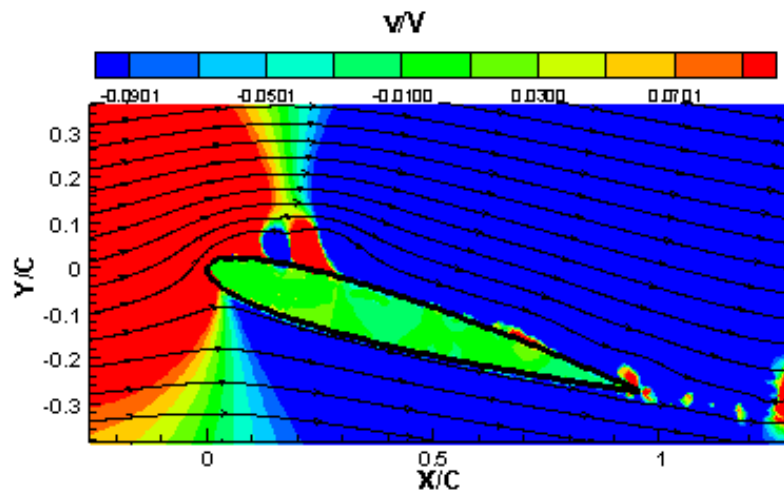


Figura A.62 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

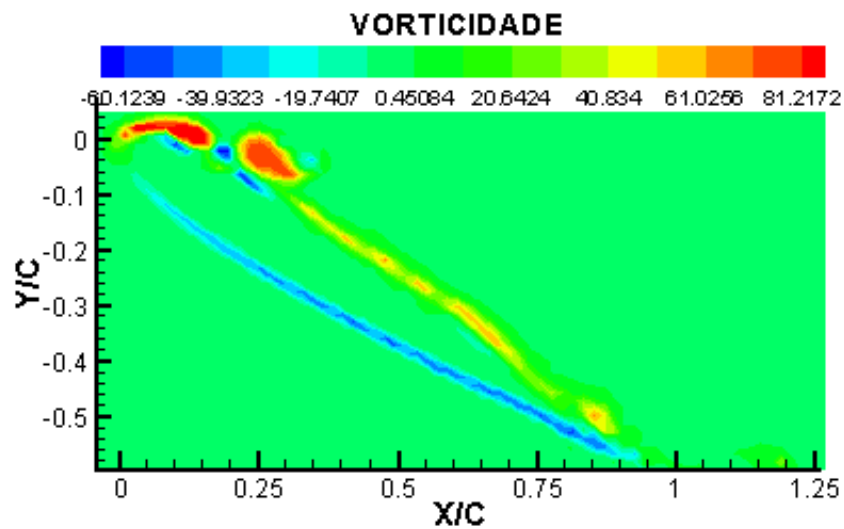


Figura A.63 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^5$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

APÊNDICE B

RESULTADOS PARA O AEROFÓLIO NACA 0012
 $REYNOLDS = 1,0 \times 10^4$ e demais parâmetros da Tab. 7.2

NACA 0012, $REYNOLDS = 1,0 \times 10^4$ e $ALFA=0^\circ$

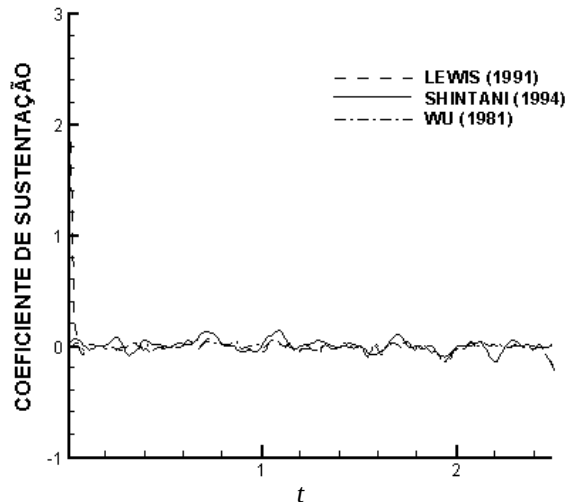


Figura B.1 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $alfa = 0^\circ$

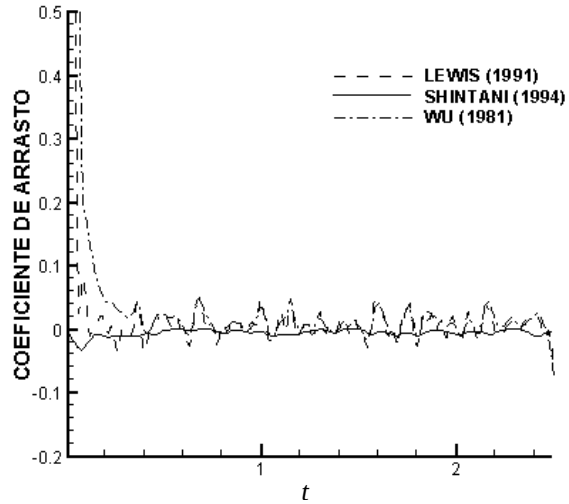


Figura B.2 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $alfa = 0^\circ$

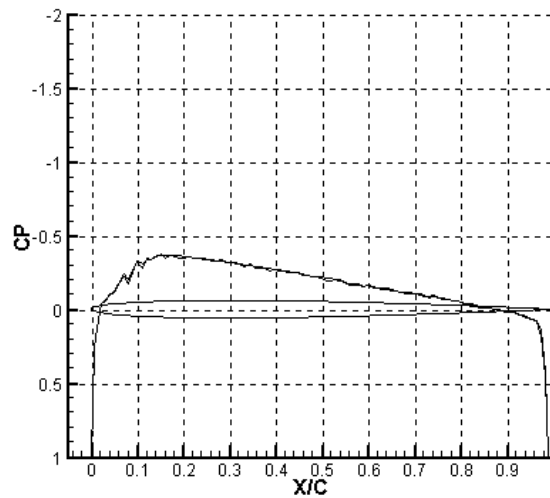


Figura B.3 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $alfa = 0^\circ$, $t = 2,5$



Figura B.4 – Esteira
 $Re = 10^4$, $alfa = 0^\circ$, $t = 2,5$

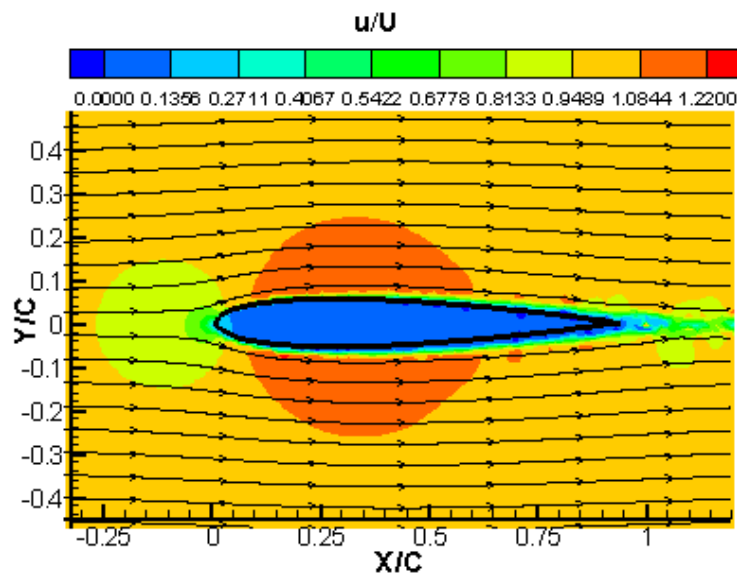


Figura B.5 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

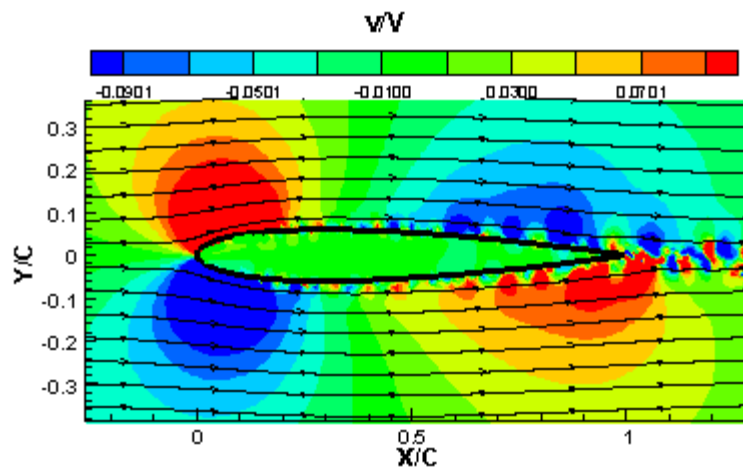


Figura B.6 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

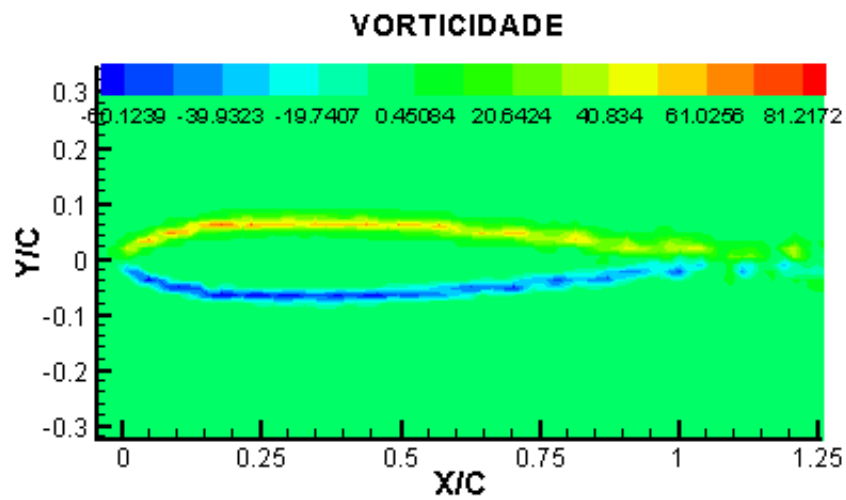


Figura B.7 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA=2°

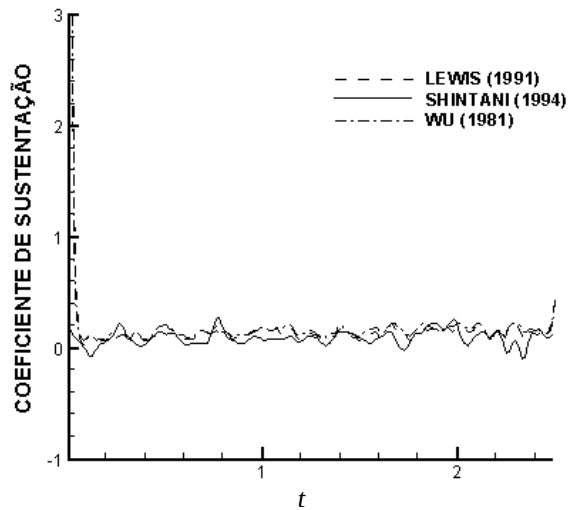


Figura B.8 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$

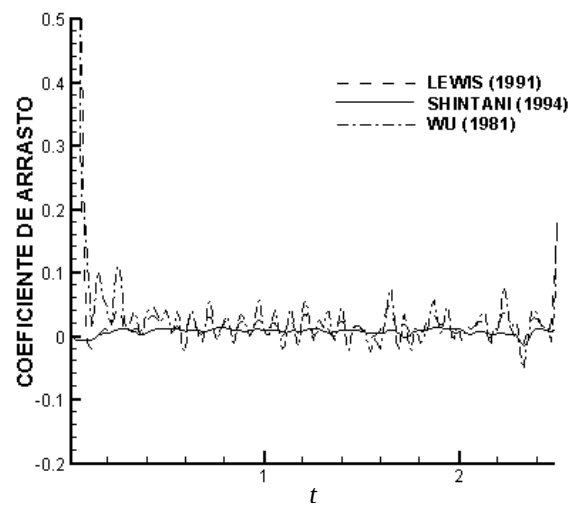


Figura B.9 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$

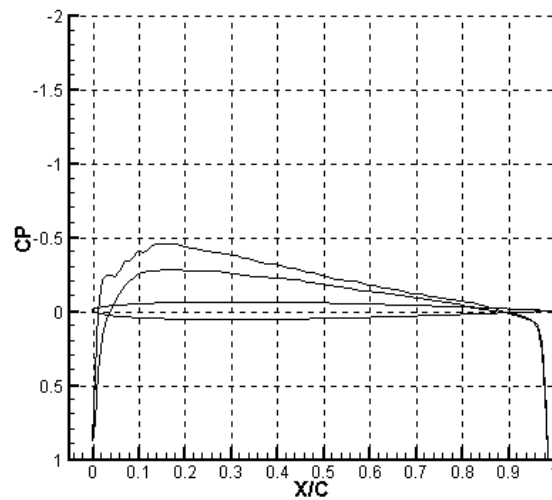


Figura B.10 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$



Figura B.11 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

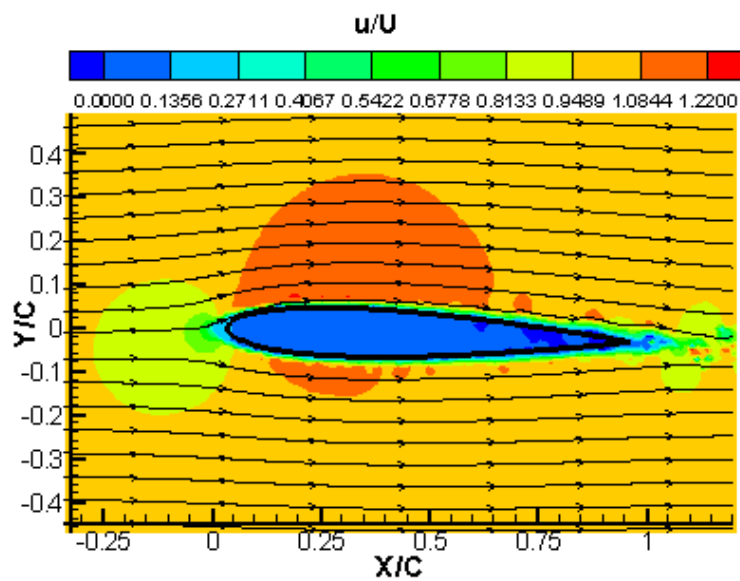


Figura B.12 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

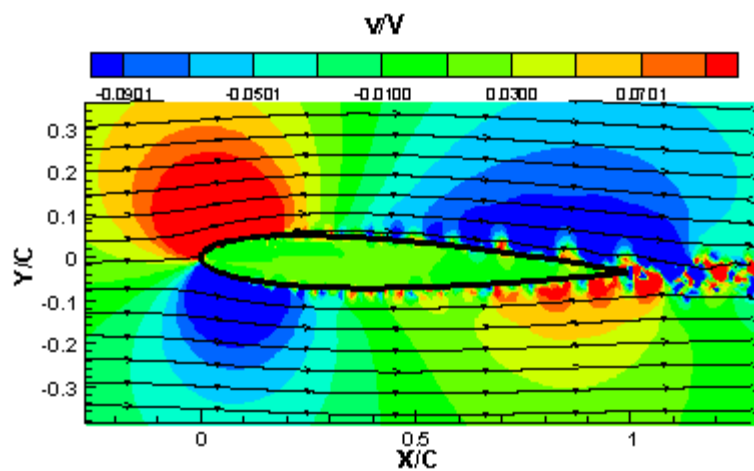


Figura B.13 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

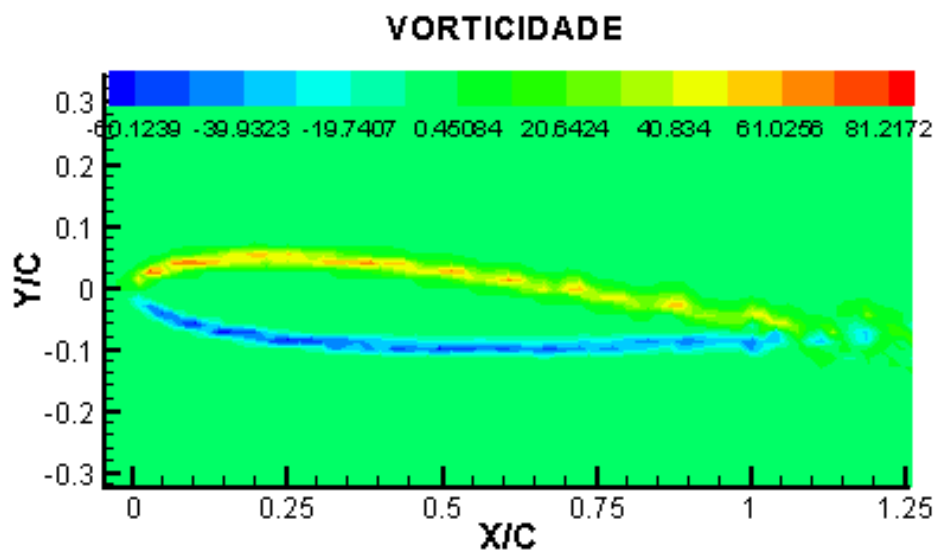


Figura B.14 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 2^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA = 4°

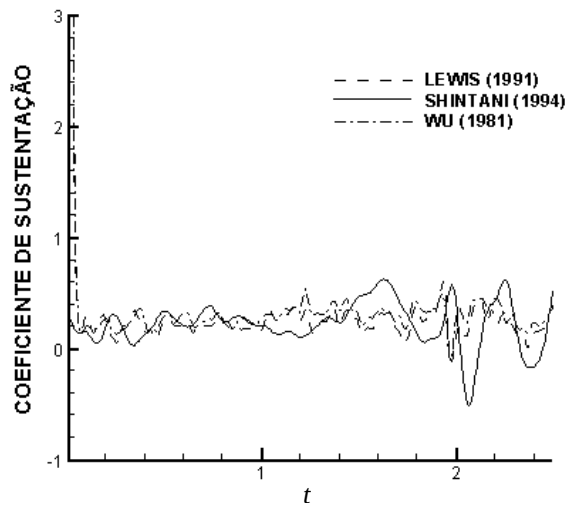


Figura B.15 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$

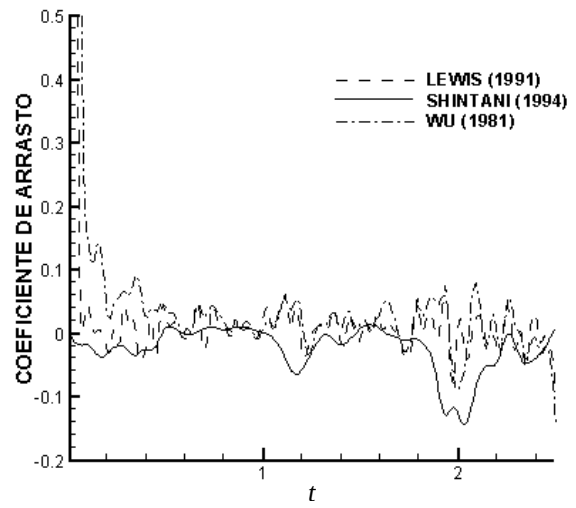


Figura B.16 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$

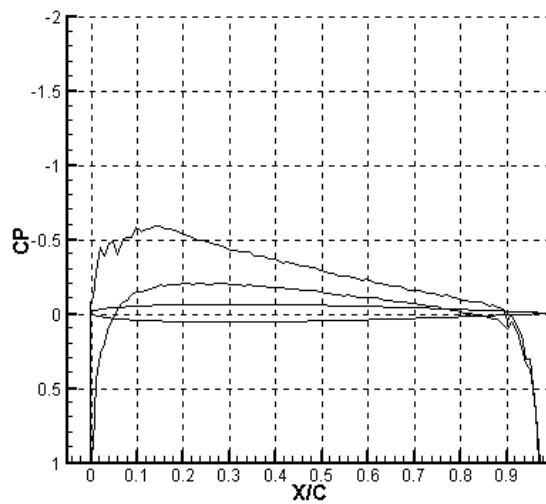


Figura B.17 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

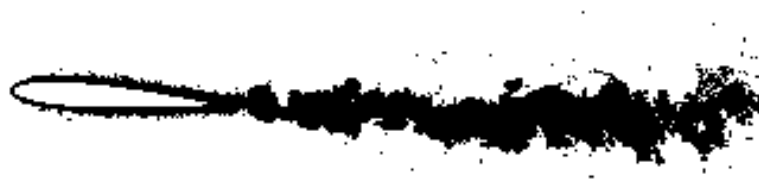


Figura B.18 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

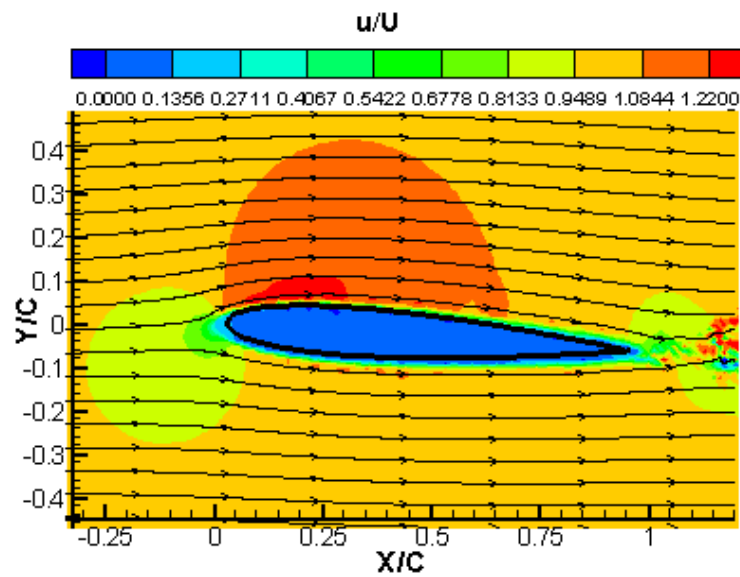


Figura B.19 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

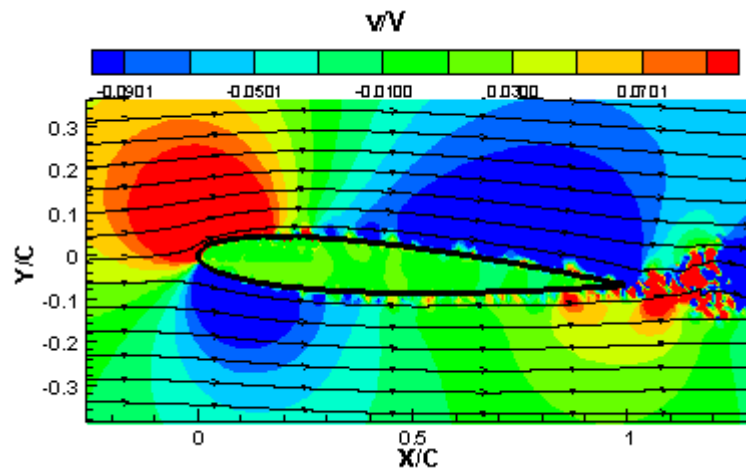


Figura B.20 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

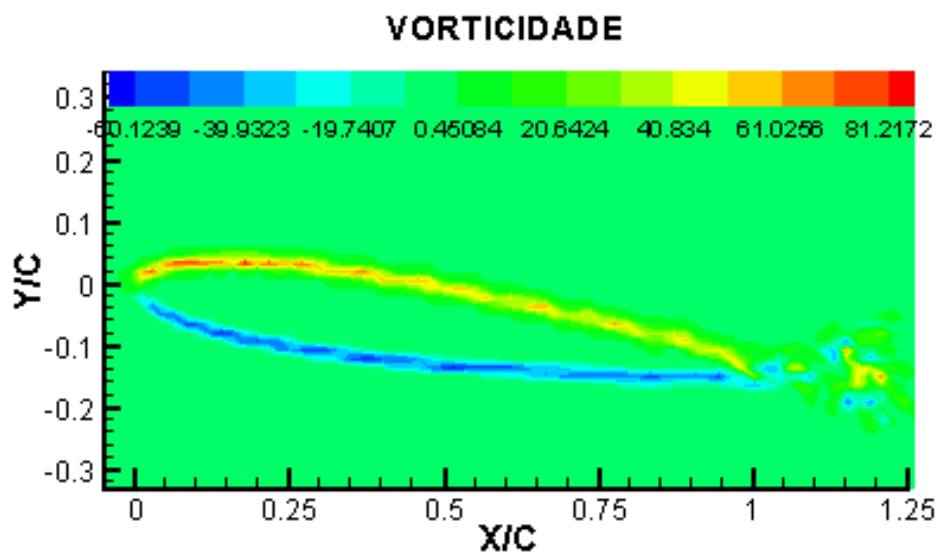


Figura B.21 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 4^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA = 6°

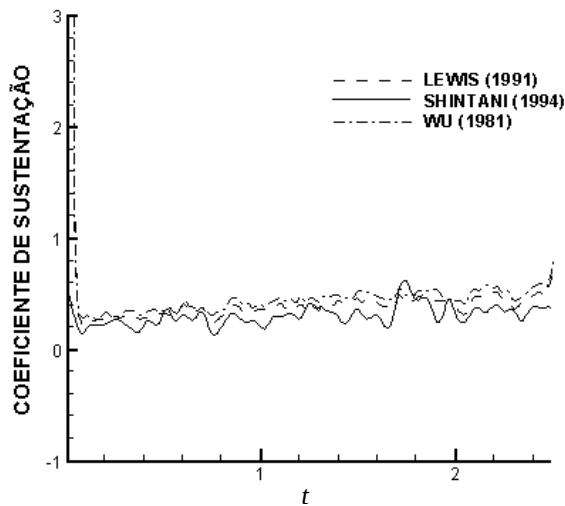


Figura B.22 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 6^\circ$

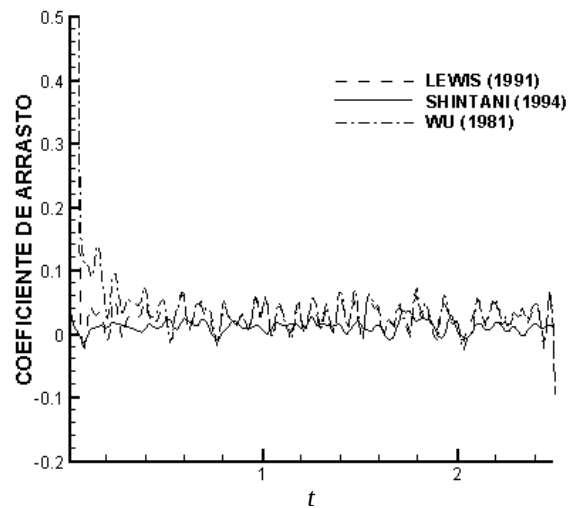


Figura B 23 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 6^\circ$

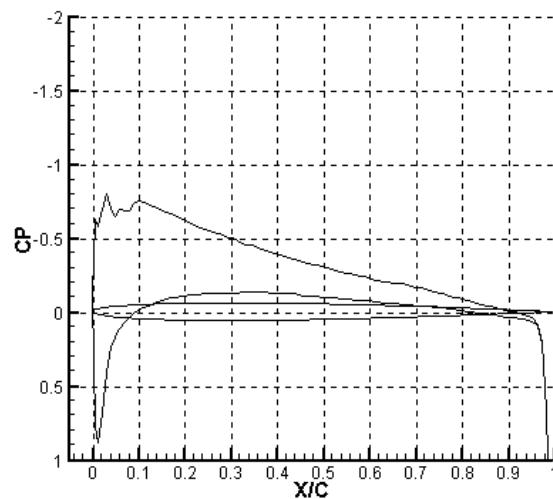


Figura B 24 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 2,5$



Figura B 25 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

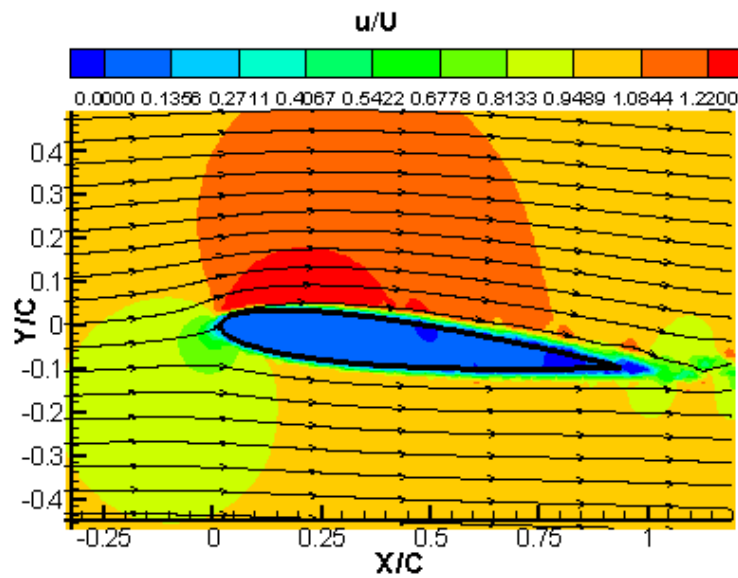


Figura B 26 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

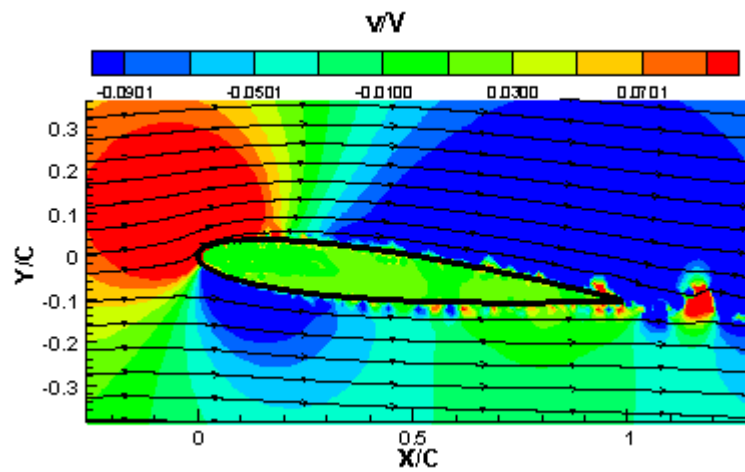


Figura B 27 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

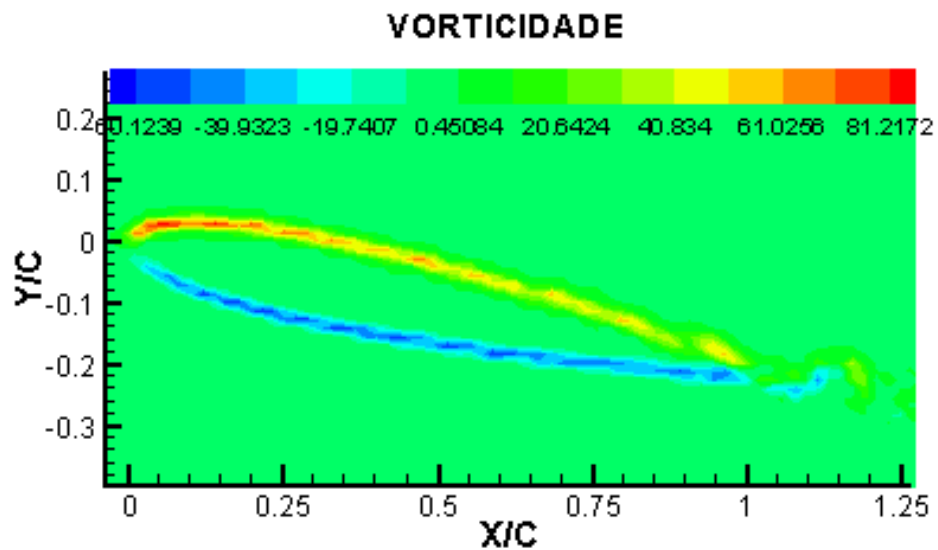


Figura B 28 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 6^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA = 8°

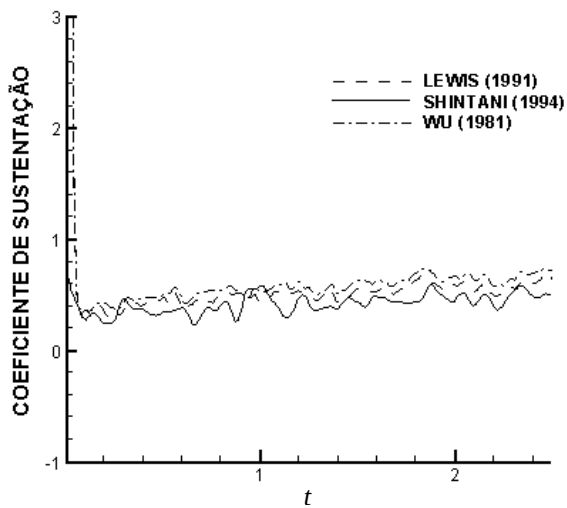


Figura B 29 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$

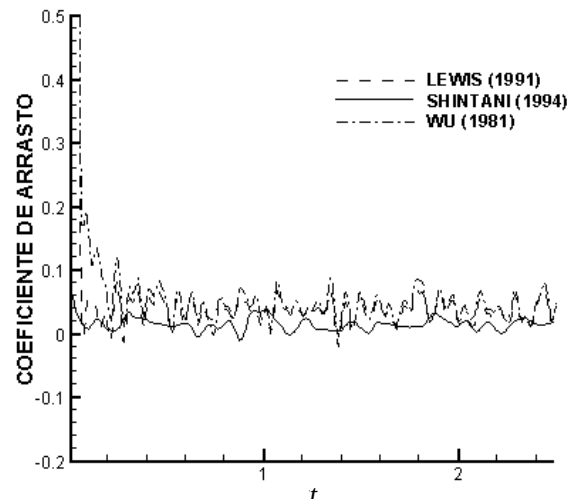


Figura B 30 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$

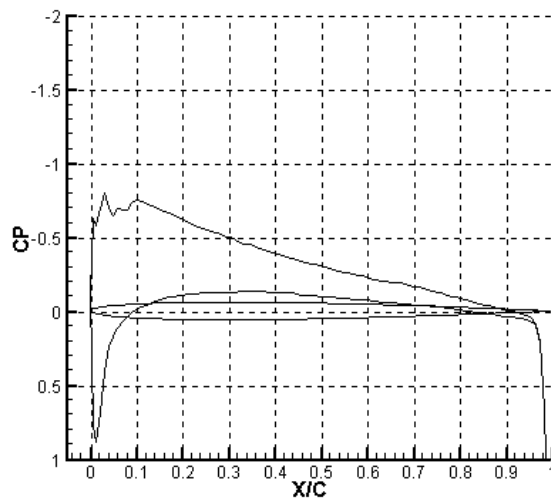


Figura B 31 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$



Figura B 32 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

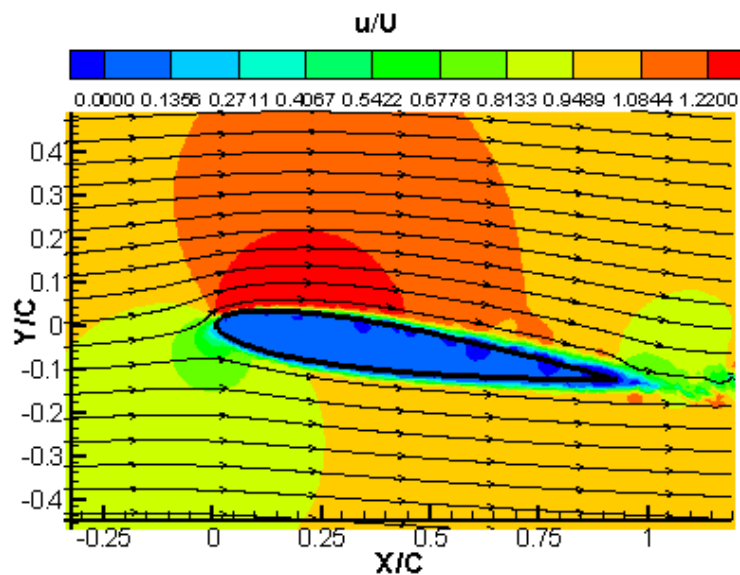


Figura B 33 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

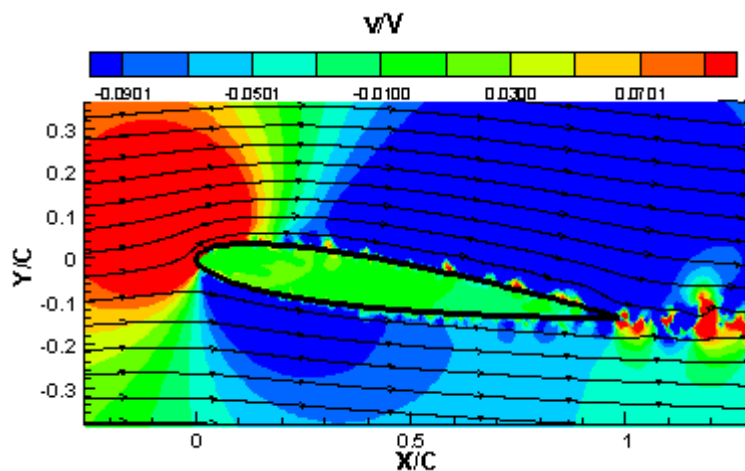


Figura B 34 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

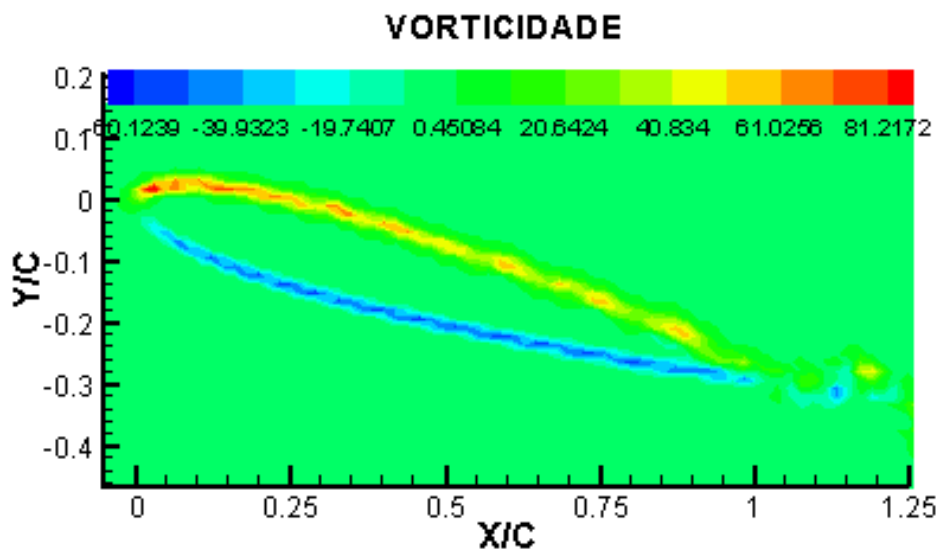


Figura N 35 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 8^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA= 10°

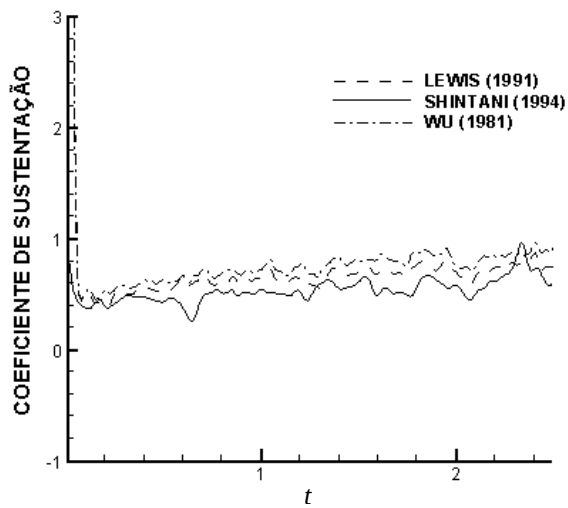


Figura B 36 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$

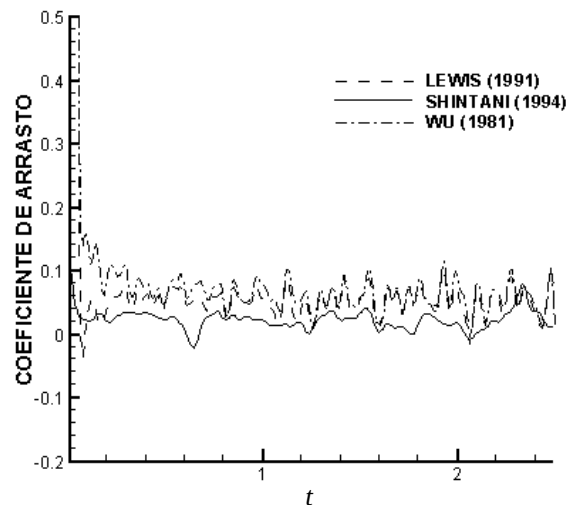


Figura B 37 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$

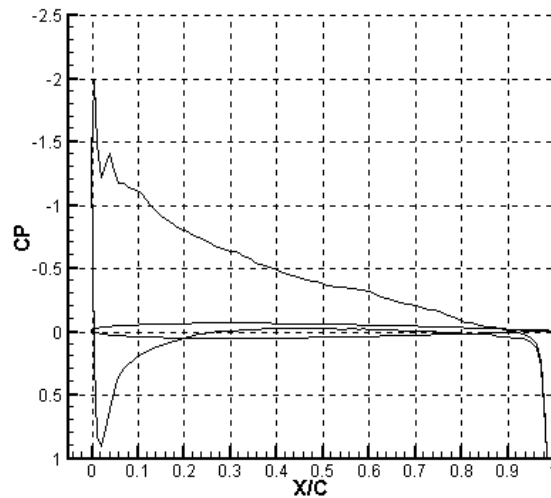


Figura B 38 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

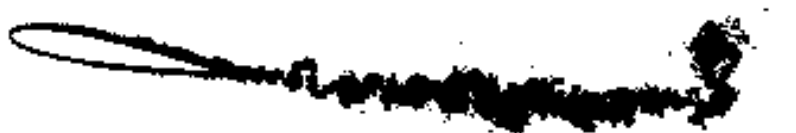


Figura B 39– Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

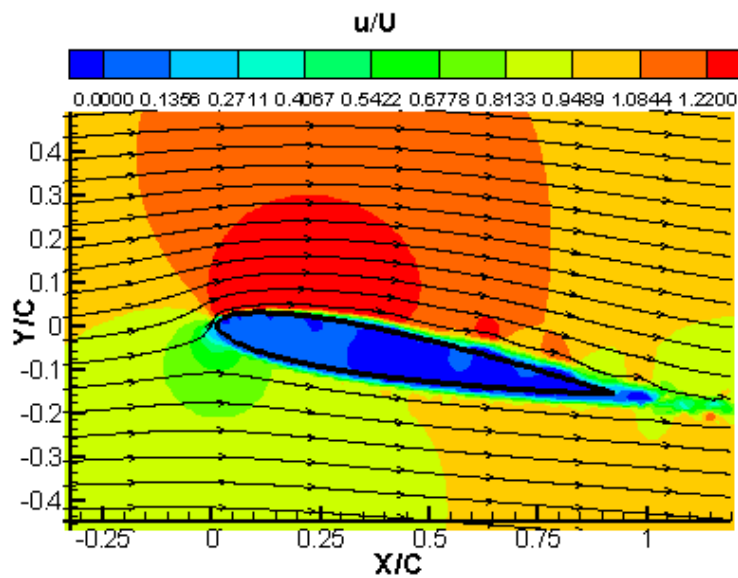


Figura B 40 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

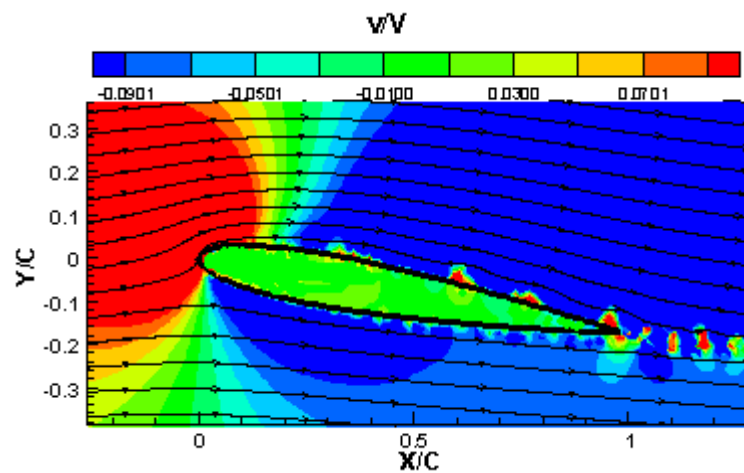


Figura B 41 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

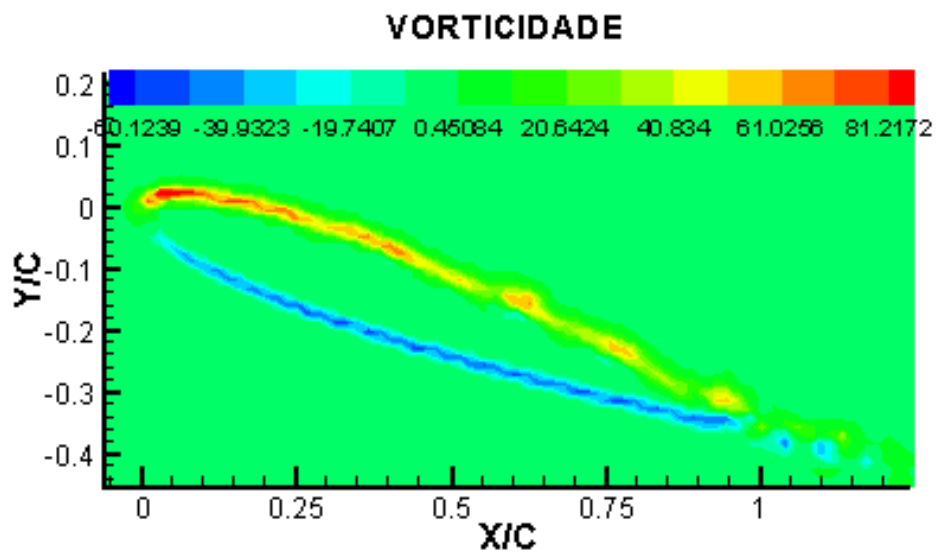


Figura B 42 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 10^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA = 12°

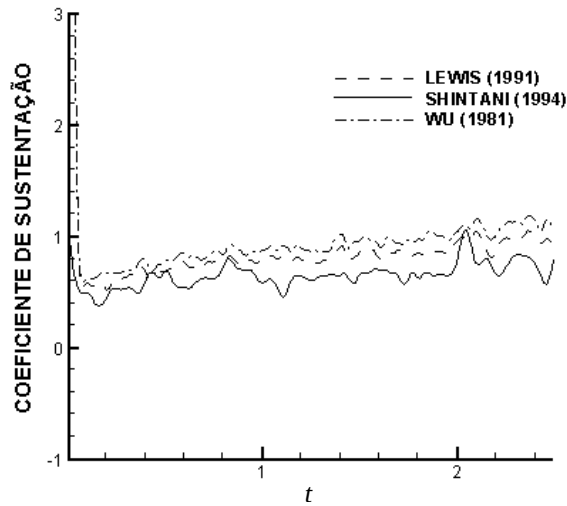


Figura B 43 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$

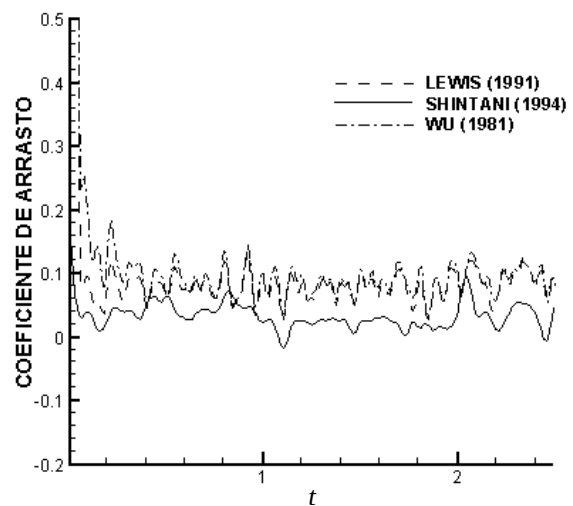


Figura B 44 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$

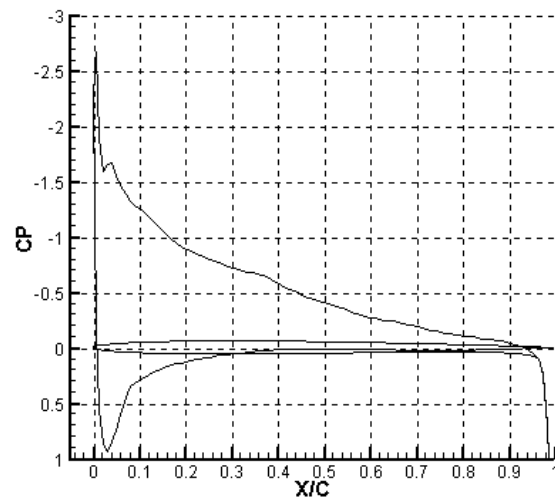


Figura B 45 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$



Figura B 46 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

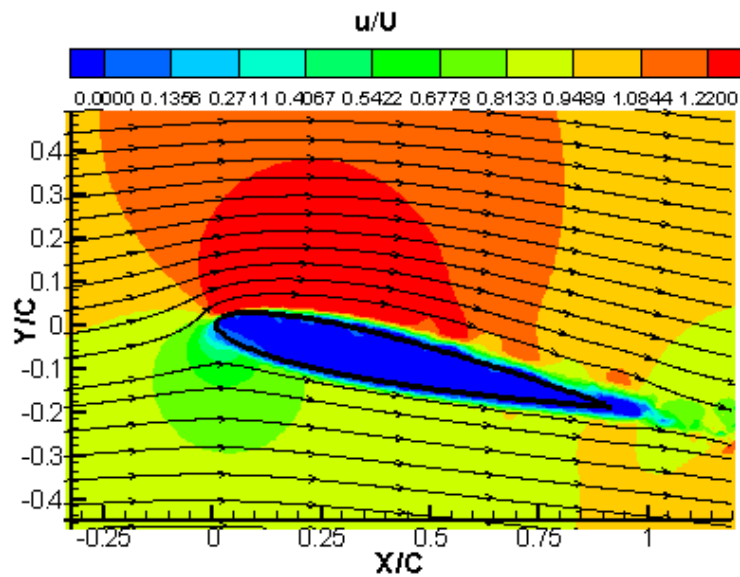


Figura B 47 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

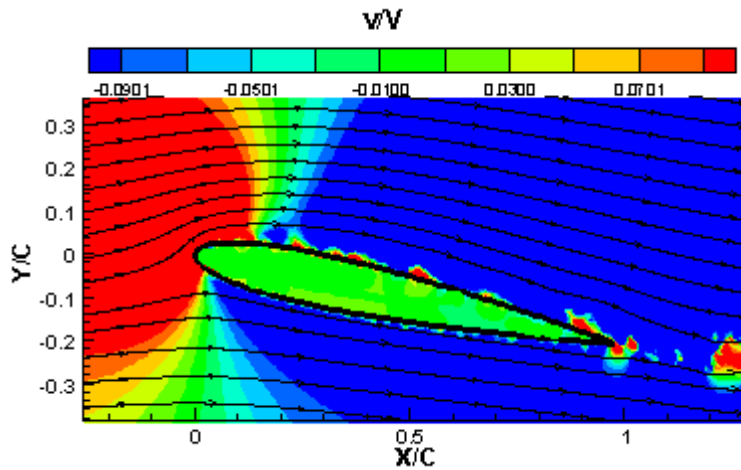


Figura B 48 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

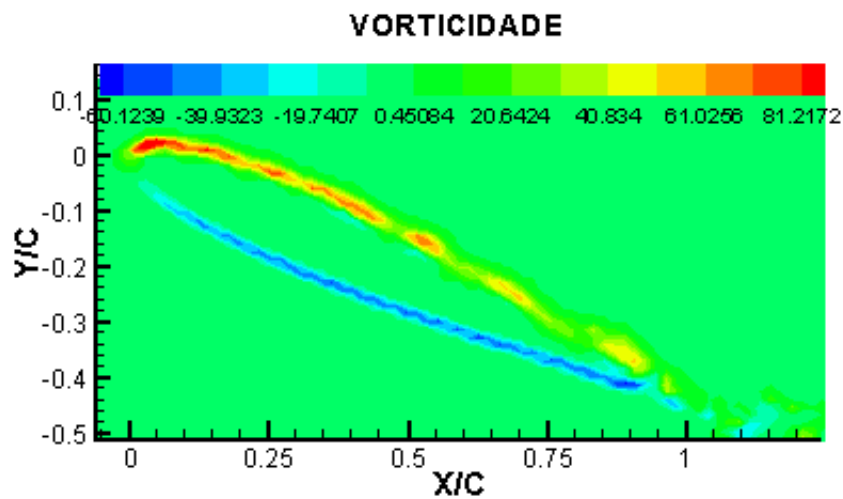


Figura B 49 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 12^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA = 14°

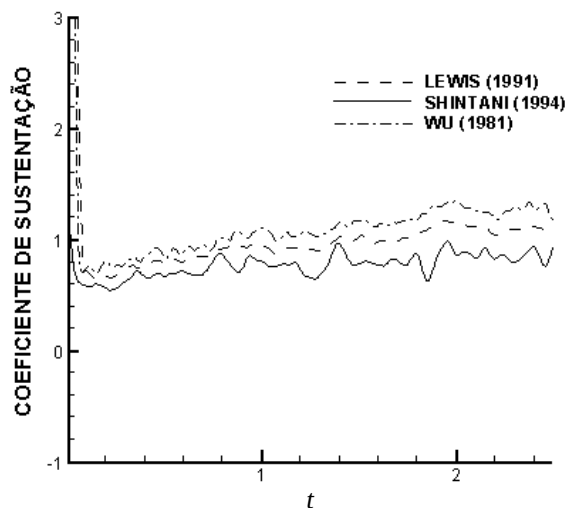


Figura B 50 – Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$

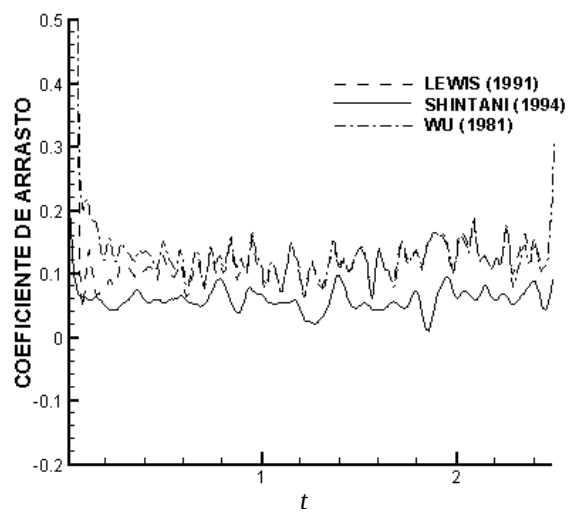


Figura B 51 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$

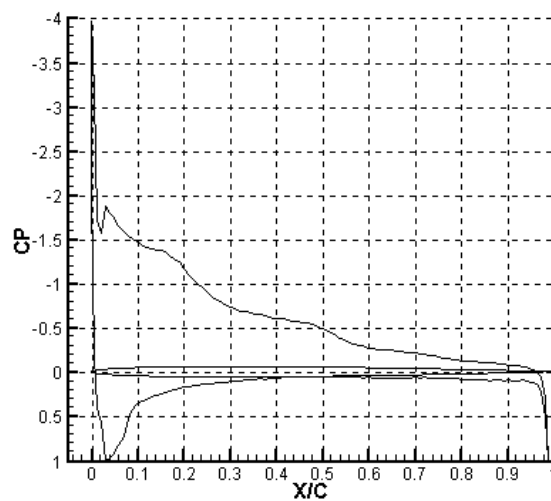


Figura B 52 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

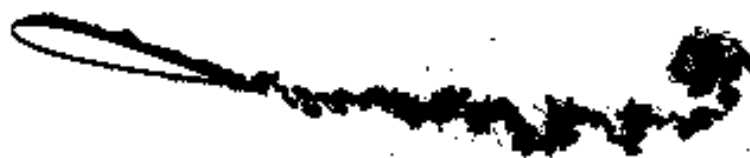


Figura B 53 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

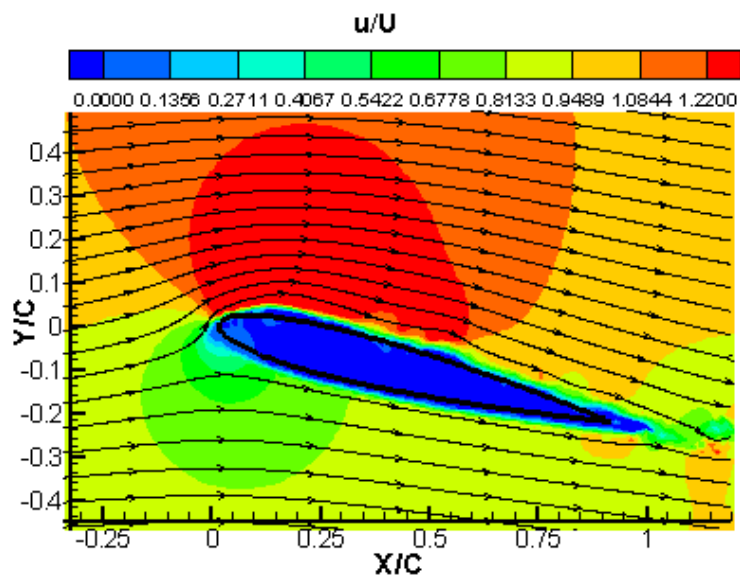


Figura B 54 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

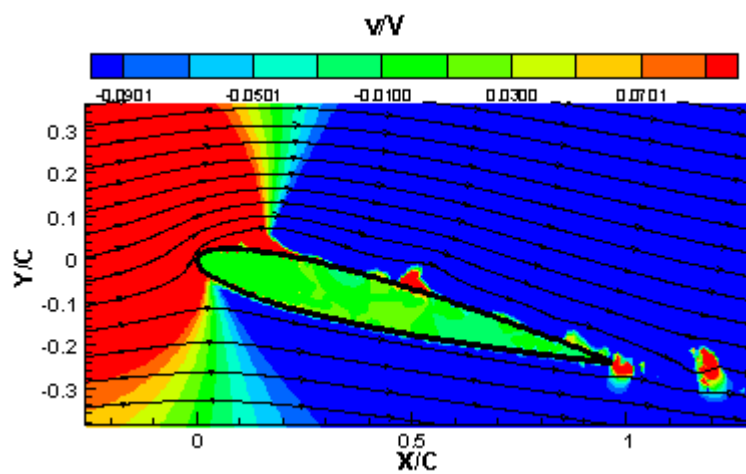


Figura B 55 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

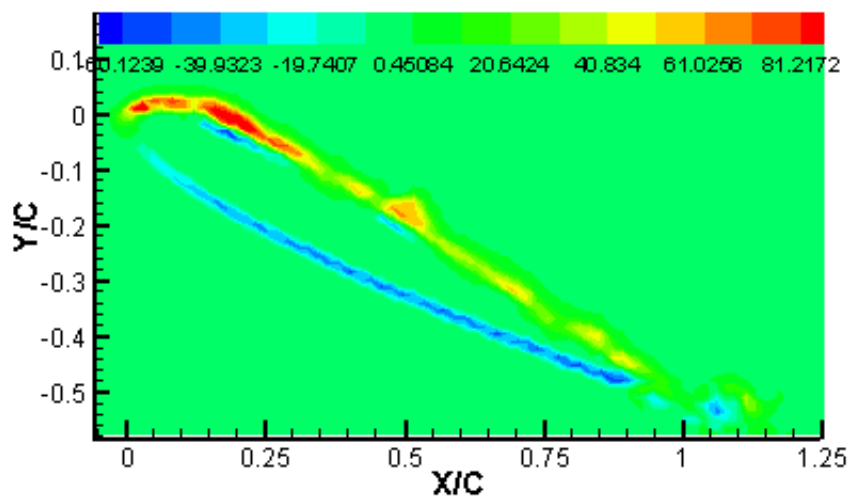


Figura B 56 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 14^\circ$, $t = 2,5$

NACA 0012, REYNOLDS = $1,0 \times 10^4$ e ALFA = 16°

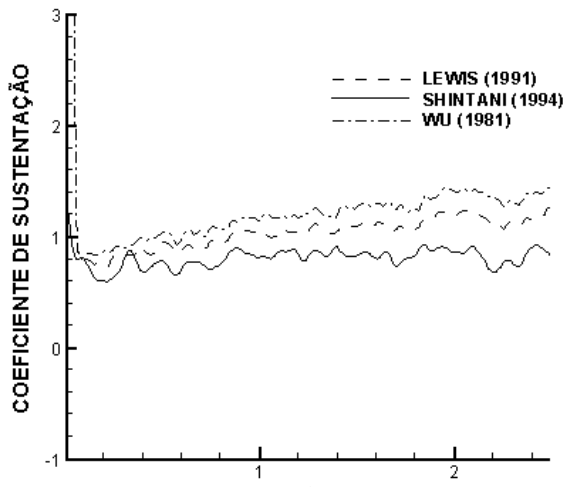


Figura B 57– Coeficiente de Sustentação
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$

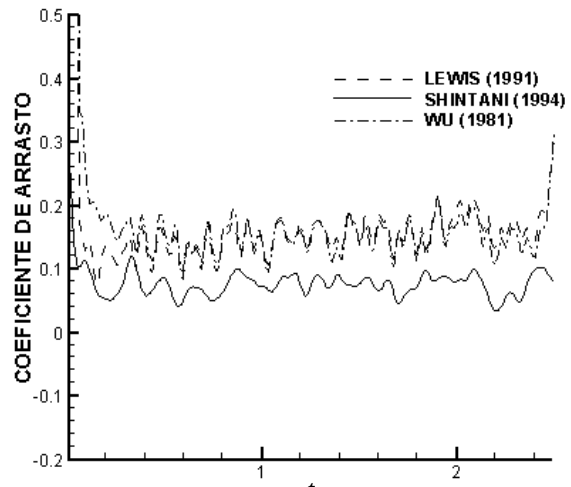


Figura B 58 – Coeficiente de Arrasto
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$

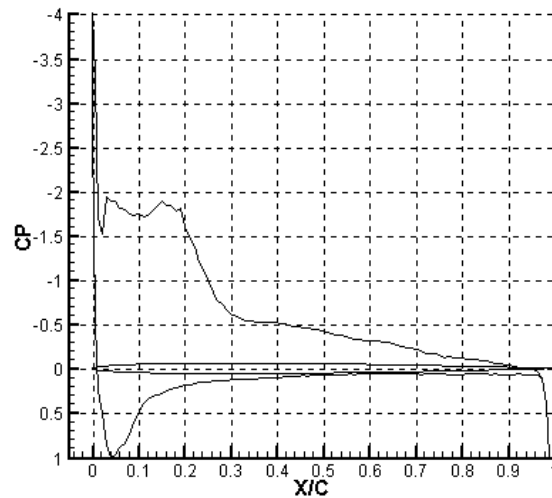


Figura B 59 – Coeficiente de Pressão
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$



Figura B 60 – Esteira
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

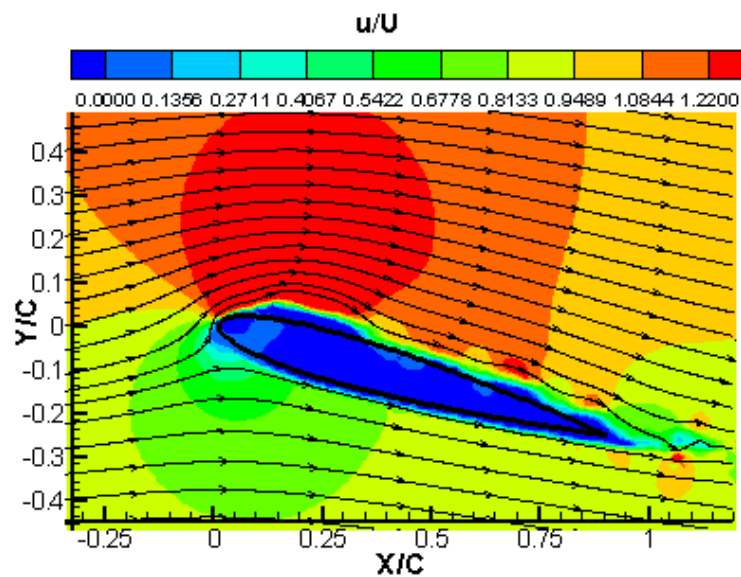


Figura B 61 – Linhas de Corrente e u/U
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

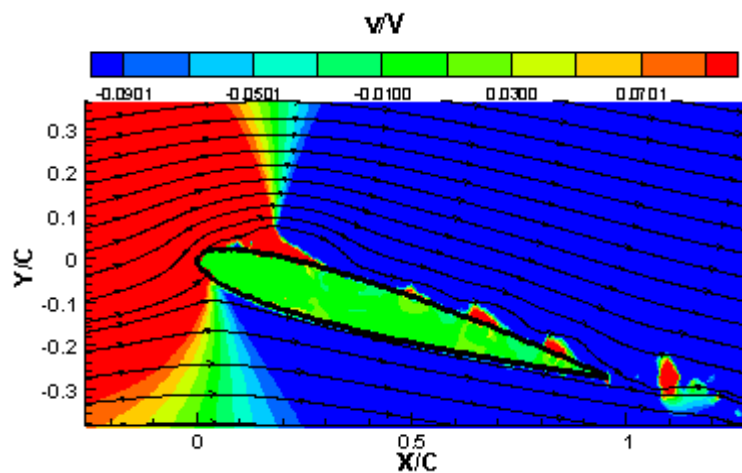


Figura B 62 – Linhas de Corrente e v/V
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

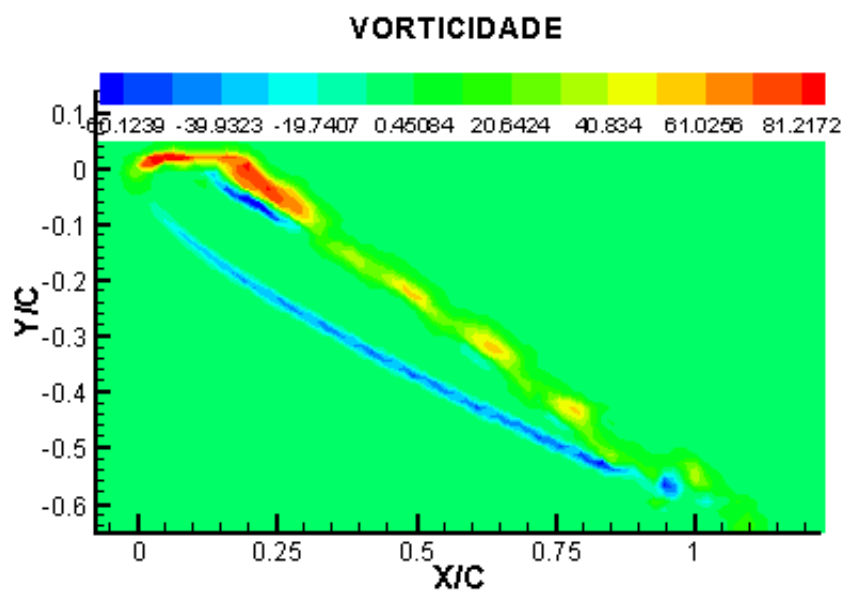


Figura B 63 – Campo de Vorticidade
 $Re = 10^4$, $\alpha = 16^\circ$, $t = 2,5$

APÊNDICE C

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS NUMÉRICOS

A escala convectiva do movimento dos vórtices (Δs^*) deve ter como referência a escala geométrica do comprimento dos painéis $\Delta \ell^*$. Assim, é fisicamente razoável supor que $\Delta s^* \sim U \Delta t^*$ seja da ordem de $\Delta \ell$. Logo, $\Delta \ell^* \sim \Delta s^* \sim U \Delta t^*$, o que permite escrever

$$k \frac{\Delta \ell^*}{c} = \frac{U \Delta t^*}{c} \quad (\text{C.1})$$

onde U e c são respectivamente o escoamento incidente e o comprimento característico do corpo. Assim, adimensionalmente,

$$\Delta t = k \Delta \ell \quad (\text{C.2})$$

onde $k \leq 1$ garante que o deslocamento máximo do vórtice seja igual ou menor que o tamanho do painel $\Delta \ell$.

A escolha do número de vórtices na geração L em função da distância entre os vórtices h e do raio do vórtice σ , conforme seção 4.4, controla o grau de recobrimento no nascimento, porém, ao longo da simulação, o processo de avanço convectivo pode prejudicar a interseção inicial dos núcleos dos vórtices e prejudicar a convergência dos resultados. Por esta razão deve-se impor $h = \Delta t$, o que juntamente com a Eq. (C.2) leva a

$$h = k \Delta \ell, \quad (\text{C.3})$$

no entanto, o processo de geração define $h = \Delta \ell / L$. Logo a Eq. (C.3) permite escrever

$$k = \frac{1}{L} \quad (\text{C.4})$$

Para um corpo com comprimento característico c , pode-se supor que seu perímetro seja da ordem de $2c$. Assim, o número de painéis do corpo pode ser estimado por $N = 2c/\Delta\ell^*$, o que permite escrever

$$N = \frac{2}{\Delta\ell} \tag{C.5}$$