

ANÁLISE DO DESEMPENHO DO MÉTODO DOS PAINÉIS DE ORDEM SUPERIOR
PARA O CÁLCULO DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM AEROFÓLIO.

Luiz Henrique Gomes Pereira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
MECÂNICA.

Aprovada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Hércio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Nelson Manzanares Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2005

PEREIRA, LUIZ HENRIQUE GOMES

Análise do Desempenho do Método dos
Painéis de Ordem Superior para o Cálculo do
Escoamento em Torno de um Aerofólio [Rio
de Janeiro] 2005

XI, 116 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Mecânica, 2005)

Dissertação - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, COPPE

1. Método dos Painéis
2. Escoamento Potencial
3. Aerofólios
4. Aerodinâmica

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DO DESEMPENHO DO MÉTODO DOS PAINÉIS DE ORDEM SUPERIOR
PARA O CÁLCULO DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM AEROFÓLIO.

Luiz Henrique Gomes Pereira

Dezembro/2005

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho analisa o desempenho do Método dos Painéis de acordo com os diversos tipos de singularidades, tais como fontes, dipolos e vórtices, e suas distribuições, tais como constante, linear e quadrática, utilizadas sobre os painéis de um aerofólio. O método consiste na distribuição dessas singularidades sobre a superfície fechada do aerofólio de modo a satisfazer à equação da conservação da massa, que, no caso do escoamento potencial e incompressível, se reduz à equação de Laplace e à condição de contorno de impenetrabilidade da fronteira sólida, que pode ser descrita tanto pela condição de Dirichlet quanto de Neumann.

A metodologia é aplicada a aerofólios da família Van de Vooren, utilizando-se uma discretização cossenoidal e não uniforme da superfície do aerofólio, a fim de concentrar uma maior quantidade de painéis na região em torno dos pontos de estagnação dos bordos de ataque e de fuga. Os resultados obtidos com diferentes tipos de singularidades são comparados entre si e à solução analítica do aerofólio Van de Vooren, apresentando boa concordância. A inclusão de equações de conservação globais no sistema de equações também é testada. A análise do erro encontrado em cada um dos casos estudados permite mostrar quais são as distribuições de singularidade mais adequadas para cada caso. Além disso, mostra-se que os esquemas de ordem superior apresentam uma precisão maior do que os de ordem inferior, o mesmo ocorrendo ao se incluir a curvatura do painel. O efeito da curvatura dos painéis sobre o desempenho do método é analisado em detalhe.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

PERFORMANCE ANALYSIS OF THE SUPERIOR ORDER PANELS METHOD FOR
THE CALCULATION OF THE FLOW AROUND AN AIRFOIL.

Luiz Henrique Gomes Pereira

December/2005

Advisor: Gustavo César Rachid Bodstein

Department: Mechanical Engineering

This work analyses the performance of the Panel Method for various types of singularities, such as sources, dipoles and vortices, and for various types of distributions, such as constant, linear and quadratic, used on the airfoil panels. The method consists in distributing these singularities on the closed surface of an airfoil so as to satisfy the mass conservation equation, which, in the case of potential and incompressible flow, reduces to the Laplace equation, and to the no-penetration condition on the solid boundary, which can be described by either the Dirichlet or the Neumann condition.

The methodology is applied to the Van de Vooren airfoil family, using a non-uniform cosine function to discretize the airfoil, so as to concentrate a greater number of panels in the region around the stagnation points of the leading and trailing edges. The results obtained with different types of singularity are compared among themselves and to the analytical solution of the Van de Vooren airfoil, displaying good agreement. The inclusion of a global conservation equation in the system of equations is also tested. Analysis of the error found for each of the tests performed allows us to show which singularity distributions are the most adequate for each case. In addition, it is shown that the higher-order schemes present a better accuracy than those of lower order, the same occurring when the curvature of the panel is included in the method. The effect of the panel curvature on the method performance is analysed in detail.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante o primeiro ano de mestrado, assim como a COPPE pela oportunidade de realizar um curso de pos-graduação de excelente qualidade.

Agradeço ainda ao professor e amigo, Gustavo Bodstein, por seus conselhos e por suas palavras de incentivo no decorrer deste trabalho.

Gostaria também de agradecer a meus amigos e familiares, em especial a Melissa, pela paciência nos momentos difíceis e pela confiança que sempre depositaram em mim.

Finalmente, agradeço à concessionária de serviço público de energia elétrica Furnas Centrais Elétricas S.A. pelo apoio durante parte da execução desta tese de Mestrado através de um projeto de P&D ANEEL, aprovado no Ciclo 2002/2003. Especificamente, agradeço aos Engenheiros de Furnas Daniel Mesquita, Edson Teixeira e Maria do Carmo Reis Cavalcanti.

ÍNDICE

Capítulo 1 – Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Descrição Física do Escoamento ao Redor de Corpos	4
1.3 Proposta de Trabalho	6
 Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica	 10
2.1 Trabalhos Experimentais	10
2.2 Trabalhos Analíticos	11
2.3 Trabalhos Numéricos	11
 Capítulo 3 – Modelo Matemático	 14
3.1 Escoamento Potencial e Formulação do Problema	14
3.2 Solução Geral da Equação de Laplace Bidimensional	16
3.3 Método dos Painéis	19
3.4 Condição de Kutta	21
3.5 Escolha de Singularidades	22
3.5.1 Fontes	24
3.5.1.1 Fonte Constante	25
3.5.1.2 Fonte Linear	26
3.5.1.3 Fonte Quadrática	27
3.5.2 Dipolos	28
3.5.2.1 Dipolo Constante	29
3.5.2.2 Dipolo Linear	30
3.5.2.3 Dipolo Quadrático	31
3.5.3 Vórtices	32
3.5.3.1 Vórtice Constante	32
3.5.3.2 Vórtice Linear	33

3.5.3.3 Vórtice Quadrático	34
3.6 Inclusão da Curvatura no Método dos Painéis	36
3.6.1 Fontes	40
3.6.1.1 Fonte Constante	40
3.6.1.2 Fonte Linear	41
3.6.1.3 Fonte Quadrática	42
3.6.2 Dipolos	43
3.6.2.1 Dipolo Constante	43
3.6.2.2 Dipolo Linear	44
3.6.2.3 Dipolo Quadrático	45
3.6.3 Vórtices	46
3.6.3.1 Vórtice Constante	46
3.6.3.2 Vórtice Linear	47
3.6.3.3 Vórtice Quadrático	48
Capítulo 4 – Implementação Computacional	50
4.1 Implementação Computacional de Singularidades Constantes	51
4.2 Implementação Computacional de Singularidades Lineares	52
4.3 Implementação Computacional de Singularidades Quadráticas	55
4.3.1 Fontes e Dipolos	55
4.3.2 Vórtices	58
4.4 Cálculo das Forças Aerodinâmicas	61
Capítulo 5 – Resultados e Discussões	64
5.1 Painéis sem Curvatura	64
5.2 Painéis com Curvatura	78
Capítulo 6 – Conclusões	88
Referências	91
Apêndice A – Cálculo dos Coeficientes de Influência	95

Apêndice B – Lei de Formação para Distribuição Linear de Singularidades dos Coeficientes A_{ij}	97
Apêndice C – Lei de Formação para Distribuição Quadrática de Singularidades dos Coeficientes A_{ij}	99
Apêndice D – Lei de Formação para Distribuição Quadrática de Vórtices dos Coeficientes A_{ij}	109
Apêndice E – Integração Numérica	115

LISTA DE SÍMBOLOS

A_{ij} - coeficientes do sistema de equações

a_{ij} - coeficiente de influência referente à parte constante da distribuição de singularidades

b_{ij} - coeficiente de influência referente à parte linear da distribuição de singularidades

c - corda do aerofólio

c_{ij} - coeficiente de influência referente à parte quadrática da distribuição de singularidades

C_l - coeficiente de sustentação

C_p - coeficiente de pressão

$d\mathbf{l}$ - vetor diferencial ao longo de um perímetro

E_s - erro da integração numérica

f - função

h - intervalo de integração

I - valor da integral da função f

L - força de sustentação

$\mathbf{n}$ - vetor normal

N - número de painéis

n - número de intervalos de integração

p - pressão

$\mathbf{Q}_\infty$ - vetor velocidade incidente

Q_∞ - módulo da velocidade incidente

$\mathbf{r}$ - vetor posição

r - módulo do vetor posição

$R1(i, j)$ - variável auxiliar

$R2(i)$ - variável auxiliar

$R3(i, j)$ - variável auxiliar

RHS_i - vetor independente

S - área, superfície

$\mathbf{t}$ - vetor tangencial

$\mathbf{u}$ - velocidade vetorial

u - componente da velocidade na direção x

V - volume

v - componente da velocidade na direção y

$\mathbf{x}$ - vetor posição

X - coordenada horizontal global de um sistema cartesiano

x - coordenada horizontal local de um sistema cartesiano

w - componente da velocidade na direção z

Z - coordenada vertical global de um sistema cartesiano

z - coordenada vertical local de um sistema cartesiano

α - ângulo de ataque

β - ângulo de inclinação dos painéis

δ - variável auxiliar

Δc_i - comprimento do painel i

ϕ - potencial de velocidade

ϕ_∞ - potencial de velocidade do escoamento incidente

φ - ângulo definido pela Fig.(4.1)

Γ - intensidade de circulação

γ - intensidade do vórtice

η - função que descreve a curvatura do painel

λ - intensidade de uma singularidade qualquer

μ - intensidade do dipolo

θ - ângulo definido pela Eq. (3.22.b)

ρ - massa específica

σ - intensidade da fonte

ω - vorticidade

ξ - variável auxiliar definida pela Eq.(3.50)

Subscritos

0, 1, 2 – quando associado a uma singularidade, representa a parcela constante, linear e quadrática, respectivamente.

B – corpo

i, j, k, N – índices

w - esteira

∞ - relativo ao escoamento incidente ou a uma superfície exterior

Sobrescritos

* -mudança de definição da função

Operadores

∇ - gradiente

$\nabla \cdot$ - divergente

$\nabla \times$ - rotacional

$\frac{\partial}{\partial x}$ - derivada parcial

$\frac{d}{dx}$ - derivada ordinária

$| \quad |$ - módulo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O escoamento ao redor de corpos imersos num fluido sempre despertou o interesse de diversos pesquisadores e engenheiros, tanto pelo caráter teórico como prático.

O engenheiro ao projetar uma ponte deve considerar os esforços causados pelo vento e pela correnteza de um rio ou lago, por exemplo, se a mesma estiver cruzando-o. Neste exemplo, têm-se duas aplicações práticas de uma situação onde o escoamento externo sobre corpos deve ser considerado. No primeiro, o fluido é o ar, enquanto no segundo, o fluido é a água, sendo tratados pelo ramo da aerodinâmica e da hidrodinâmica, respectivamente.

No escoamento do ar sobre um avião em vôo de cruzeiro ou o planar do vôo de pássaros, o princípio de funcionamento da geração de força de sustentação se baseia exatamente na interação vento-asa. O ar, ao escoar sobre a asa, gera zonas de maior e menor pressão sobre a mesma, e essa distribuição de pressão gera a força de sustentação que é diretamente proporcional à velocidade ao quadrado, ao ângulo de ataque da asa, à massa específica do fluido e à área da asa. A Fig. 1.1 mostra exatamente as forças geradas acima e abaixo de uma asa de perfil assimétrico com ângulo de ataque nulo.

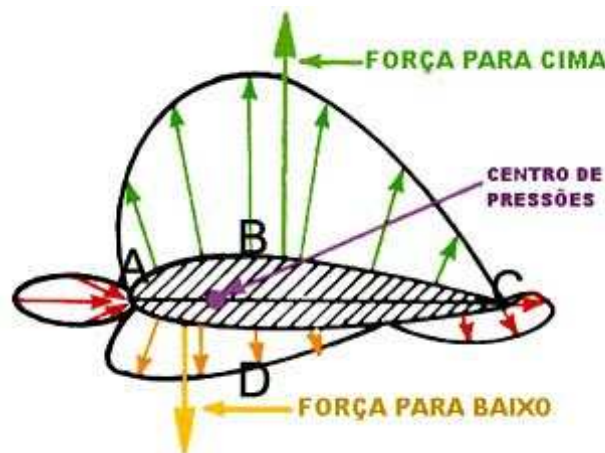


Figura 1.1 - Força na parte superior e inferior de um aerofólio assimétrico com ângulo de ataque nulo.

Efeito inverso é o projeto de aerofólios para um carro de corrida, onde o objetivo principal é diminuir a derrapagem nas curvas, através de sustentação compensada ou até mesmo revertida, mas esse processo tende a piorar o coeficiente de arrasto aerodinâmico, C_d .

O compromisso entre os coeficientes de arrasto e de sustentação, portanto, depende da finalidade e do perfil escolhido. Um carro de corrida, tipo Fórmula 1, precisa de muita sustentação negativa, ou seja, precisa ser empurrado para baixo pelo ar para contornar curvas com grande velocidade: seu C_d é bastante elevado mas, em contrapartida, ele poderia rodar de cabeça para baixo, no teto de um túnel, enquanto se mantivesse em alta velocidade. Entretanto, um carro de passeio deve ter um coeficiente de arrasto baixo acarretando assim numa maior economia de combustível. Este ponto de estudo foi alvo, principalmente, após a crise do petróleo em meados da década de 70, que fizeram com que os fabricantes de automóveis repensassem a trajetória que haviam inicialmente traçado quanto à aerodinâmica dos automóveis. O coeficiente de arrasto que depende da viscosidade do fluido, não é considerado neste trabalho, devido à hipótese de fluido não viscoso. A Fig. 1.2 mostra a força de sustentação negativa e de arrasto que agem num típico carro de Fórmula-1.



Figura 1.2 - Forças atuantes num típico carro de Fórmula 1.

Para se ter à noção exata da importância da aerodinâmica num carro de F-1, projeções por computador mostram que uma melhora de 10% no coeficiente de arrasto pode fazer com que ele seja mais rápido cerca de um segundo numa pista típica. Para conseguir o mesmo resultado melhorando o motor, seriam necessários cerca de 80 cavalos a mais, algo que os fabricantes demoram dois ou três anos para conseguir. Nos estudos de aerodinâmica, porém, os avanços tendem a ser mais rápidos.

Em projetos de equipamentos, como em bombas, compressores e/ou turbinas, a aerodinâmica também desempenha papel fundamental. O mau projeto pode acarretar em mau funcionamento, como ocorre durante o “surge” de compressores, levando à falhas prematuras do equipamento.

A energia eólica vem se destacando no cenário atual, pois além de ser uma alternativa energética com grande potencial é igualmente renovável assim como a hidrelétrica. Sendo, portanto, o estudo do escoamento sobre as pás das turbinas eólicas de grande interesse técnico e econômico. As turbinas eólicas são responsáveis pela conversão da energia dos ventos (eólica) em energia elétrica ou mecânica. O ar, ao passar pela turbina, transfere parte da sua energia cinética para o rotor, que, por sua vez, converte o movimento de translação do vento em movimento de rotação do eixo ao qual encontra-se conectado.

Por ser o meio de captação da energia dos ventos, a turbina é o elemento central do sistema eólico, e o seu estudo é essencial para o contínuo melhoramento da eficiência na captação da energia dos ventos. O aprimoramento e a otimização das turbinas eólicas requerem conhecimento detalhado do escoamento do ar em torno das pás do rotor. A Figura 1.3 mostra uma turbina comercial típica do tipo HAWT (*Horizontal Axis Wind Turbine*).



Figura 1.3 – Escoamento ao redor de uma turbina eólica do tipo HAWT.

Desta forma, fica clara a importância de se estudar, de um ponto de vista fundamental, a aerodinâmica de uma pá de uma turbina eólica, de um aerofólio de um carro de F-1, a asa de um avião, entre outros. A determinação de perfis aerodinâmicos adequados para o escoamento e o desenvolvimento de metodologias que permitam a

análise teórica desses perfis são assunto de pesquisa básica e de primordial importância para o desenvolvimento de projetos aerodinâmicos mais eficientes.

1.2 Descrição Física do Escoamento ao Redor de Corpos

Corpos simétricos não são capazes de gerar assimetria no escoamento incidente. Assim, em corpos simétricos, tais como cilindros ou esferas, não há força perpendicular ao escoamento (sustentação) atuando sobre o corpo. Como, por hipótese, o escoamento é não-viscoso não há também nenhuma força na direção do escoamento (arrasto). Sendo assim, o escoamento não-viscoso ao redor de um cilindro também é simétrico. A Figura 1.4 mostra a simetria do escoamento ao redor de um cilindro.

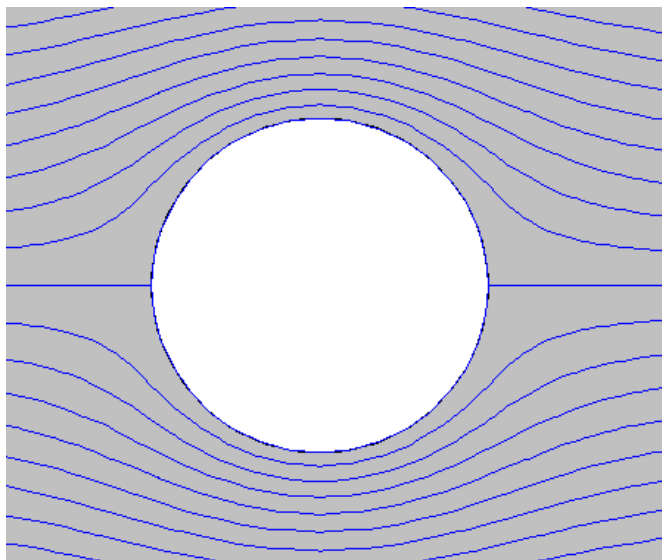


Figura 1.4 – Escoamento ao redor de um cilindro.

Para perfis esbeltos, mesmo havendo simetria do corpo com relação a um eixo, em geral não há com relação a outro. Quando o corpo está alinhado com o escoamento incidente, os campos de velocidade e de pressão são simétricos acima e abaixo do mesmo. Entretanto, ao se rotacionar levemente o corpo, começa-se a verificar uma dada assimetria no escoamento. Esta assimetria altera significativamente o campo de velocidade e, por conseguinte o de pressão, acarretando na geração da força de sustentação. A Figura 1.5 mostra como o escoamento varia ao se rotacionar um perfil esbelto, aerofólio de Joukowski, imerso num escoamento uniforme.

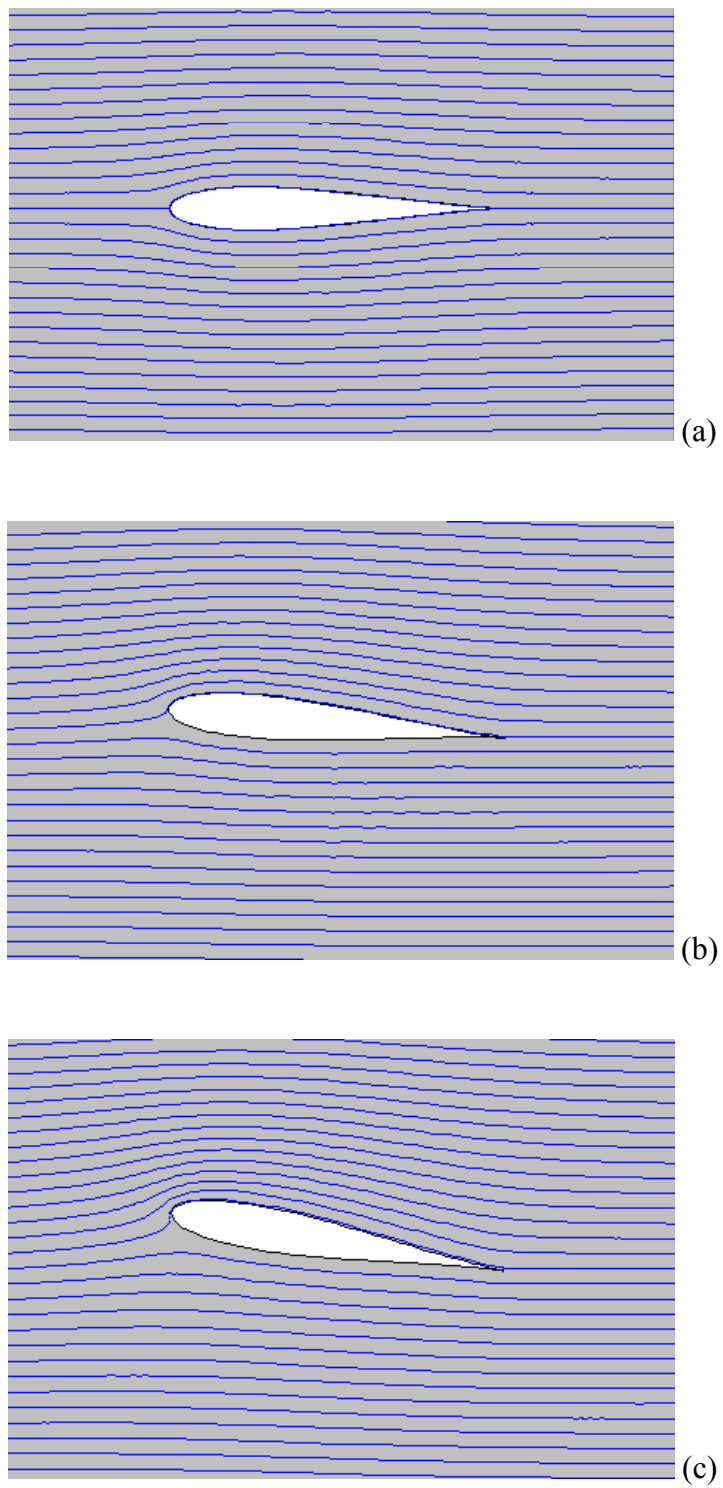


Figura 1.5 – Escoamento ao redor de um aerofólio de Joukowski para alguns ângulos de ataque, (a) $\alpha = 0^\circ$, (b) $\alpha = 5^\circ$, (c) $\alpha = 10^\circ$.

1.3 Proposta de Trabalho

Para iniciar o estudo do escoamento ao redor de corpos, rombudos ou esbeltos, tem-se que admitir algumas hipóteses. Como o interesse fundamental é o estudo da sustentação e não do arrasto sobre o corpo, as hipóteses de escoamento incompressível e irrotacional parecem ser suficientes para escoamentos com efeitos de compressibilidade desprezíveis e efeitos viscosos confinados a finas camadas limites. Estas hipóteses levam a uma classe de escoamento denominados escoamentos potenciais e incompressíveis, governados pela equação de Laplace.

Os projetos de aerofólios requerem alta precisão na predição da distribuição de pressão, pois esta implica numa maior ou menor sustentação, assim como na estabilidade da aeronave. Inicialmente, a teoria de aerofólio fino foi amplamente usada na análise e/ou projeto de aerofólios. Entretanto, devido às limitações do método para aerofólios multi-elementos, essa teoria foi aos poucos caindo em desuso, não sendo mais foco de pesquisas avançadas atualmente. Outras ferramentas analíticas, como a Teoria de Variáveis Complexas, fornecem resultados exatos, mas apresentam limitações na sua aplicabilidade a geometrias de caráter mais geral.

Diversos métodos numéricos podem ser utilizados para solução do escoamento potencial incompressível ao redor de aerofólios, como os métodos de diferenças finitas, elementos finitos e os métodos dos elementos de contorno. O método dos painéis, que é uma subclasse do método dos elementos de contorno, é um método numérico que discretiza a superfície do corpo sobre o qual o escoamento incide e não a região fluida, como os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, apresentando grande vantagem pela sua simplicidade de modelagem e no tempo de processamento (*CPU time*). Naturalmente, esta comparação só é válida para escoamentos incompressíveis e irrotacionais, pois ao contrário do método dos painéis, os outros métodos podem ser aplicados a campos de escoamentos mais complexos, onde os efeitos da compressibilidade e/ou da viscosidade não podem ser desprezados. Além disso, o método dos painéis é um método aplicável a geometrias bastante gerais e largamente difundidos entre aerodinamicistas, podendo o escoamento ser ao redor de corpos rombudos, tais como cilindros, ou perfis aerodinâmicos, como aerofólios da série NACA. O assunto deste trabalho diz respeito ao método dos painéis.

Para perfis de corpos bidimensionais como os tratados aqui, o método dos painéis parte da discretização da superfície do corpo, onde o corpo é discretizado

através de linhas que interligam pontos pertencentes à mesma. Esta tarefa de discretização do corpo chama-se “panelizar” o corpo. Esta “panelização” pode ser feita utilizando várias funções matemáticas, sendo que a mais utilizada é a função polinomial linear. A discretização com função polinomial linear é também denominada de discretização por painéis retos (“*flat panels*”). Devido a sua simplicidade, painéis retos tem seu uso muito difundido e a maioria dos softwares de pesquisa já desenvolvidos se baseiam em tal hipótese. Com o amadurecimento da metodologia, iniciou-se o processo de otimização, tentando-se incluir a curvatura do corpo no método, com o objetivo de se obter uma maior precisão para um menor número de painéis. Para tanto, optou-se pelo uso da função polinomial cúbica que possibilita impor tanto a continuidade da função de discretização quanto da sua derivada.

Adicionalmente à discretização do corpo, o método consiste na distribuição sobre os painéis de elementos de singularidades, tais como fontes, dipolos e vórtices. A escolha de qual singularidade utilizar é relativamente arbitrária, sendo que a solução se reduz a encontrar a intensidade de tais singularidades a partir das condições de contorno do problema.

As funções de distribuição de singularidades podem ser constantes, lineares e quadráticas ou de ordem superior. Ao se especificar uma dessas funções sobre painéis retos, ocorre uma descontinuidade geométrica de um dado painel para o seu adjacente (quina), e pode-se impor a continuidade e a diferenciabilidade da função de distribuição. Estas são as funções de distribuição de singularidade usuais. Ao se aumentar a ordem ainda mais, outras hipóteses simplificadoras devem ser introduzidas para possibilitar o fechamento e resolução do sistema de equações algébricas lineares que deve ser formado para a determinação das intensidades das singularidades.

A superposição do escoamento uniforme às singularidades do tipo fontes, dipolos ou vórtices sobre os painéis do corpo produzem uma solução da equação de Laplace. Esta solução, para ser única, deve satisfazer à condição de impenetrabilidade da fronteira sólida, visto que, ao admitir a hipótese de fluido não-viscoso, a condição de contorno de não-deslizamento não pode ser satisfeita. Para tanto, pode-se utilizar a condição de contorno de Dirichlet, de Neumann ou uma combinação entre ambas, de acordo com o tipo de singularidade e sua função de distribuição.

O objetivo deste trabalho consiste em analisar o desempenho do método dos painéis quando se compara os diferentes tipos de singularidade e suas diferentes funções de distribuição. Diversos métodos foram implementados ao longo do

desenvolvimento do trabalho, entretanto os métodos apresentados aqui são aqueles cujos resultados são os mais comumente encontrados na literatura, assim como aqueles que apresentaram os melhores resultados. Estes ainda foram modificados na sua metodologia básica de modo a incluir o efeito da curvatura do painel, exceto o método de fontes e dipolos que apresentaram resultados inferiores ao método dos dipolos (sem fonte), sendo sua análise abandonada. Além disso, alguns métodos sofreram pequenas alterações para verificar a possibilidade da inclusão da conservação da massa e da circulação como equações globais, verificando a melhoria ou não do método.

A Tabela 1.1 resume os vários esquemas desenvolvidos e analisados ao longo do trabalho, em função da condição de contorno, do tipo de singularidade, da ordem da distribuição e da inclusão ou não da curvatura do painel.

Tabela 1.1 – Métodos desenvolvidos e analisados neste trabalho, segundo a condição de contorno, tipo de singularidade, distribuição e inclusão ou não da curvatura.

C.C.	Singularidade	Distribuição	Sem Curvatura	Com Curvatura
Neumann	Fonte	Constante	x	x
		Linear	x	x
		Quadrático	x	x
	Vórtice	Linear	x	x
		Quadrático	x	x
Dirichlet	Vórtice	Constante	x	x
	Fonte e Dipolo	Constantes	x	-
		Lineares	x	-
		Quadráticos	x	-
	Dipolo (s/ Fonte)	Constante	x	x
		Linear	x	x
		Quadrático	x	x

Especificamente, os objetivos deste trabalho são:

- (i) Implementar as singularidades do tipo fontes, dipolos, fontes e dipolos e vórtices para três funções de distribuição de singularidades: constante, linear, quadrática;

- (ii) Determinar, para cada tipo de singularidade e função de distribuição, os erros numéricos obtidos em função do número de painéis utilizados para discretizar o corpo;
- (iii) Comparar o desempenho de cada modelo implementado (tipo de singularidade e função de distribuição) com os demais, tanto do ponto de vista dos erros numéricos quanto da velocidade de processamento;
- (iv) Repetir as implementações utilizando uma discretização do corpo com painéis curvos, utilizando uma função polinomial cúbica para este fim;
- (v) Identificar os melhores modelos a serem utilizados em geral, do ponto de vista de erros numéricos e tempo de processamento, para o cálculo do escoamento potencial sobre corpos.

No capítulo 2 é dada uma breve revisão bibliográfica do método dos painéis, assim como outros métodos numéricos e analíticos, utilizados para resolver escoamentos ao redor de corpos rombudos e esbeltos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Trabalhos Experimentais

Para a perfeita compreensão dos fenômenos físicos em mecânica dos fluidos, assim como em quase toda a engenharia, é de suma importância que medições experimentais sejam feitas em condições controladas, seja no laboratório ou no campo. As simulações numéricas buscam retratar os fenômenos físicos tão próximos da realidade o quanto possível. Desta forma, a comparação com resultados experimentais adequados é de vital relevância para a validação de um código computacional.

Especificamente no caso de aerofólios, existe um grande número de estudos experimentais realizados ao longo dos anos para a determinação das cargas aerodinâmicas que atuam sobre aerofólios das mais variadas famílias. Em geral, os experimentos objetivam medir a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do aerofólio, e a dependência que os coeficientes de sustentação, arrasto e momento possuem do ângulo de ataque, tendo o número de Reynolds como parâmetro. Essas medições são tomadas em condições de regime permanente. A literatura possui inúmeras publicações disponíveis que compilam esses dados, sendo as mais utilizadas as três citadas abaixo.

ABBOTT & VON DOENHOFF (1959) reúnem informações experimentais sobre diversos tipos de aerofólios da classe NACA, mostrando medições para o coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque para números de Reynolds iguais a 3×10^6 , 6×10^6 e 9×10^6 e distribuição de pressão para alguns perfis.

Em conjunto com dados experimentais para corpos rombudos, tubulações e diversas outras aplicações, BLEVINS (1984) apresenta diversos resultados para aerofólios, incluindo escoamentos com Números de Reynolds mais baixos, da ordem de $1,7 \times 10^4$.

HOERNER & BORST (1985) expõem dados para aerofólios juntamente com diversas teorias relacionadas ao escoamento de ar e água ao redor de aerofólios, flaps, superfícies de sustentação em geral e aviões.

Estas compilações de resultados experimentais constituem referências importantes para a validação de resultados numéricos obtidos a partir de simulações computacionais.

2.2 Trabalhos Analíticos

As modelagens de escoamentos no campo da aerodinâmica foram inicialmente desenvolvidas através de modelos analíticos, em especial, através de elementos da Teoria Potencial. Diversos livros abordam de modo bastante detalhado o assunto, apresentando aplicações da Teoria Potencial, dentre estes se destacam os livros de KELLOG (1953), THWAITES (1960), KARAMCHETTI (1980) e ANDERSON (1991).

BERTIN & SMITH (1998) apresenta os fundamentos básicos de aerodinâmica com destaque para o detalhamento dado a Teoria de Aerofólios Finos, além da apresentação de outras técnicas numéricas.

MILNE-THOMSON (1955), no campo da hidrodinâmica e em MILNE-THOMSON (1958), no campo da aerodinâmica, apresentam também teorias analíticas em Mecânicas dos Fluidos, em especial, a Transformação Conforme, não se restringindo apenas a apresentação do método, como também na sua aplicação. Outro método bastante conhecido e aplicado é o Método das Perturbações, recomendando-se o livro de VAN DYKE (1975).

Com relação à teoria de camada limite, há diversos livros que tratam do assunto, com destaque para a última edição de SCHLICHTING & GERSTEN (2000). Para detalhes específicos sobre a camada limite laminar, pode-se consultar ROSENHEAD (1963).

Outros livros de Mecânica dos Fluidos foram ainda consultados, dentre estes se destacam BATCHELOR (1967), KUNDU & COHEN (2002).

2.3 Trabalhos Numéricos

A utilização das teorias analíticas, tal como a Transformada Conforme, torna-se extremamente trabalhosa para corpos de geometria arbitrária. Neste tipo de aplicação é que os métodos numéricos apresentam as suas maiores vantagens, pois podem ser aplicados, em geral, para qualquer geometria.

Existe uma classe de métodos numéricos com grande uso em Mecânica dos Fluidos que se baseia na discretização da superfície de contorno, chamado de Método dos Elementos de Contorno, Brebbia *et al.* (1984). Um desses métodos é o denominado Método dos Painéis que se destaca pela sua larga aplicação na indústria aeronáutica para a análise de escoamentos potenciais ao redor de corpos rombudos e esbeltos. Vários autores citam o trabalho de MARTENSEN (1959), como trazendo os primeiros passos para o desenvolvimento do Método dos Painéis, que descreve uma forma de analisar perfis aerodinâmicos em escoamentos potenciais para aplicações aeronáuticas. Sendo estendido em Lewis (1991) que provê especial atenção ao método de vórtices e ainda detalha o efeito de curvatura do painel.

Diversos trabalhos decorrentes foram publicados, destacando-se o artigo de HESS & SMITH (1966) que apresenta uma extensão do método para outras aplicações, em especial na análise de escoamentos utilizando distribuições de fontes.

HESS (1973) analisou a precisão do método dos painéis de distribuição constante para escoamentos bidimensionais modelados através de fontes e sumidouros, sugerindo que a velocidade calculada convergia a uma taxa de $1/N^2$, sendo N o número de painéis. Ele também examinou a possibilidade de aumentar a taxa de convergência dos métodos de ordem superior para o qual o efeito de curvatura do painel é incluído. Van de Vooran (1980), usando uma técnica diferente, estudou o movimento de uma lâmina de vórtices livres (*free vortex sheet*) permitindo curvatura e intensidades variáveis. Este trabalho sugere que o efeito de curvatura deve ser da ordem de $1/N$. Resultados numéricos de BENSON (1987) mostram que o método constante tem acurácia da ordem de $1/N$ somente.

BELLAMY-KNIGHTS *et al.* (1988) analisaram também assim como HESS (1973), as propriedades de convergência do método dos painéis, considerando tanto a continuidade da distribuição de singularidades quanto à curvatura do corpo. A análise revelou que o efeito de curvatura sobre o cálculo das intensidades de singularidades e das velocidades é da ordem de $1/N$.

Uma revisão histórica e características detalhadas do método podem ser vistas em HESS (1990). Para apresentações didáticas de descrição dos fundamentos do Método dos Painéis e das teorias potenciais clássicas aplicadas a escoamentos bidimensionais e incompressíveis ao redor de aerofólios, podem-se destacar os livros de KATZ & PLOTKIN (2001) e MORAN (1984).

MARGASON *et al.* (1985) comparou cinco códigos de painéis bastante conhecidos para predizer o escoamento subsônico para uma série de configurações geométricas.

Os códigos de painéis usados foram o de Hess, VSAERO, QUADPAN, MCAERO e o PAN AIR, sendo três de baixa ordem e dois de ordem superior. Utilizaram-se para o trabalho, cinco geometrias de asas e duas configurações de asa/corpo, incluindo uma ampla variedade geométrica. Além disso, variou-se o número de Mach e o ângulo de ataque.

Em geral, todos os códigos apresentaram uma concordância muito boa com os dados experimentais, havendo um aumento da precisão ao se utilizar métodos de ordem superior, para um dado número de painéis, e um significativo aumento de tempo computacional.

PRABHU RAMACHANDRAN *et al.* (2003) modela o escoamento sobre um cilindro circular, utilizando uma distribuição de vórtices lineares com inclusão da curvatura, feita via função polinomial cúbica, não mais produzindo qualquer efeito de descontinuidade no nó.

PEREIRA *et al.* (2004) analisam sistematicamente diversas possibilidades de escolha de singularidades e também nas suas formas de distribuição. Este trabalho ficou restrito a distribuições de singularidades de ordem constante e linear. No mesmo ano, PEREIRA & BODSTEIN (2004), ampliaram a análise, implementando os métodos com função de distribuição quadrática.

SILVA *et al.* (2004) utilizam o Método dos Painéis para cálculo bidimensional de perfis de pás de turbinas eólicas, calculando a sustentação para baixos ângulos de ataque e dimensionando o rotor aerodinamicamente segundo o procedimento descrito em MANWELL *et al.* (2001).

Além das literaturas já citadas, deve-se destacar o livro de KREYSZIG (1999). Este foi utilizado como fonte de consulta na parte de cálculo avançado e numérico, sendo bastante didático e eficaz, em especial, na implementação do Método dos Mínimos Quadrados e nas integrações numéricas.

Capítulo 3

Modelo Matemático

3.1 Escoamento Potencial e Formulação do Problema

O escoamento incompressível ao redor de corpos imersos num fluido Newtoniano pode ser divididas em duas regiões distintas com relação à influência da viscosidade. A região próxima ao corpo, a camada limite, e a região a jusante do corpo, a esteira, são profundamente influenciadas pela viscosidade e caracterizadas pela existência de vorticidade não-nula. Fora dessas regiões, a influência da viscosidade torna-se desprezível e o escoamento caracteriza-se por possuir um campo de vorticidade nulo.

Considerando a integral de linha numa região simplesmente conexa, ao longo de uma linha arbitrária C , a circulação ao longo de C pode ser definida como

$$\Gamma \equiv \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_C (u dx + v dy + w dz). \quad (3.1)$$

Pelo teorema de Stokes, podemos escrever

$$\Gamma \equiv \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.2)$$

onde o vetor vorticidade é $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Para a região onde a influência da viscosidade é desprezível, o escoamento é considerado irrotacional, isto é, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$. Logo, ao se aplicar esta condição na Eq. (3.2), pode-se mostrar que a integral de linha torna-se uma derivada de ponto, ou, em outras palavras, a diferencial inexata torna-se exata. Deste modo, o campo de velocidade pode ser descrito através do gradiente de uma função escalar ϕ , denominada potencial de velocidade, tal que

$$\mathbf{u} \equiv \nabla \phi(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

A equação da continuidade para escoamento incompressível é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq. (3.3) na equação da continuidade (3.4), obtêm-se

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.5)$$

que é a equação de Laplace. Esta equação diferencial parcial requer duas condições de contorno, uma na superfície do corpo e outra no infinito. A condição de contorno de não deslizamento não pode ser satisfeita, pois a viscosidade foi desprezada. A condição de impenetrabilidade da fronteira sólida é, portanto adotada, sendo dada por

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (3.6.a)$$

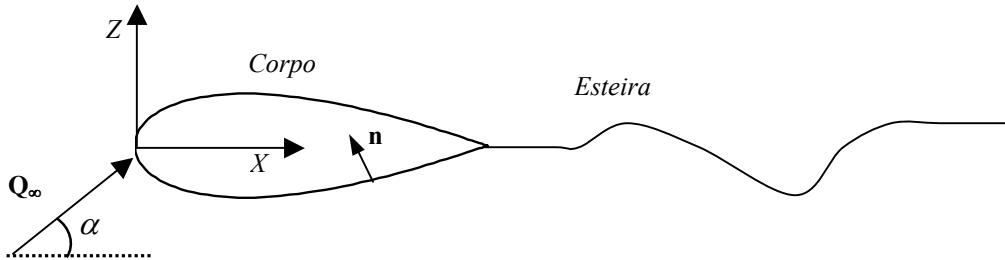


Figura 3.1 – Desenho esquemático do problema e descrição do sistema de coordenadas.

A segunda condição de contorno requer que a velocidade tenda à velocidade do escoamento incidente (Fig. 3.1) para um ponto distante do corpo ($r \rightarrow \infty$), isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\nabla \phi - \mathbf{Q}_{\infty}) = 0, \quad (3.6.b)$$

onde $\mathbf{r} = (x, z)$ para um escoamento bidimensional, α é o ângulo de ataque e $\mathbf{Q}_{\infty}$ é a velocidade do escoamento incidente ao corpo.

O campo de escoamento irrotacional e incompressível é resolvido pela equação de Laplace (3.5), sujeita às condições de contorno (3.6.a,b). Deve-se ressaltar aqui que, para a determinação do campo de velocidade, não é necessária a equação de Euler, sendo esta utilizada somente para conectar o campo de pressão ao de velocidade.

3.2 Solução Geral da Equação de Laplace Bidimensional

Seja um corpo bidimensional de superfície S_B imerso numa região V com superfície exterior S_∞ , como ilustrado na Fig. 3.2. As condições de contorno (3.6.a,b) são aplicáveis a S_B e S_∞ , respectivamente. A normal $\mathbf{n}$ é exterior ao volume de interesse V , limitado pelas superfícies S_B e S_∞ .

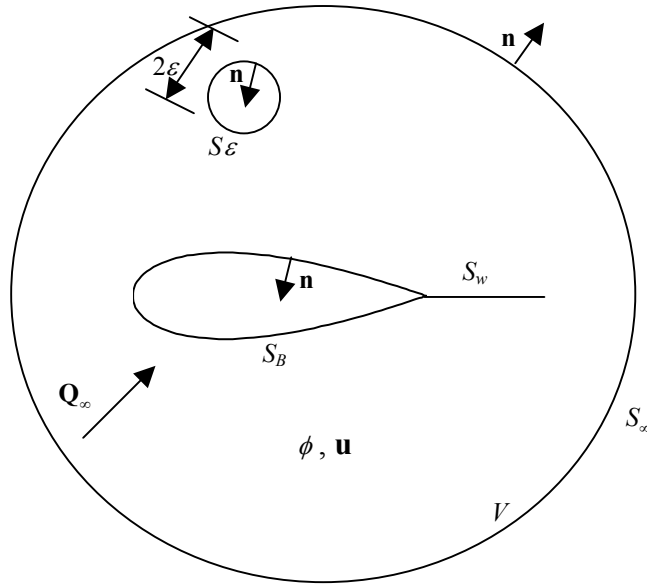


Figura 3.2 – Domínio físico e notação para o problema de escoamento potencial.

Utilizando a função $\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1$ no teorema da divergência, obtêm-se

$$\int_S (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV, \quad (3.7)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções escalares da posição. Esta equação é conhecida como identidade de Green (Kellogg, 1953).

A integral de superfície é tomada ao longo de toda a fronteira S , sendo incluída uma superfície S_W com o intuito de modelar a esteira que representa uma descontinuidade no campo irrotacional. Assim, podemos definir S como

$$S = S_B + S_W + S_\infty.$$

Para escoamentos bidimensionais, escolhem-se as funções ϕ_1 e ϕ_2 como

$$\phi_1 = \ln r \quad \text{e} \quad \phi_2 = \phi \quad (3.8)$$

onde ϕ é o potencial de velocidade e r é a distância do ponto $P(x, z)$ ao ponto de integração genérico da fronteira S . Repare que o potencial ϕ_1 é uma solução fundamental associada ao operador Laplaciano, ∇^2 , em coordenadas cilíndricas.

Quando o ponto P é exterior à região de interesse tanto ϕ_1 quanto ϕ_2 satisfazem a equação de Laplace (3.5), e a identidade de Green (3.7) se torna

$$\int_S (\ln r \nabla \phi - \phi \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.9)$$

Entretanto, quando o ponto P é interior à região de interesse, este deve ser excluído da região de interesse a fim de que se possa efetuar a integração. Para tanto, envolve-se o ponto com um pequeno círculo de raio ε , ou seja,

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{círculo } \varepsilon} \left(\ln r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \phi \frac{1}{r} \right) dS + \int_S (\ln r \nabla \phi - \phi \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.10)$$

Admitindo-se que sobre a superfície do círculo o potencial não varie apreciavelmente, então a sua derivada é considerada desprezível. Deste modo, a integral em torno do círculo, com $\varepsilon \rightarrow 0$, é dada por

$$\int_{\text{círculo } \varepsilon} \frac{\phi}{r} dS = 2\pi\phi(P). \quad (3.11)$$

Substituindo a Eq. (3.11) em (3.10), obtêm-se

$$\phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_S (\ln r \nabla \phi - \phi \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.12)$$

Quando o escoamento de interesse ocorrer no exterior do domínio (interior do corpo), o potencial interno resultante é dado por

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} (\ln r \nabla \phi_i - \phi_i \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.13)$$

Subtraindo-se a Eq. (3.13) de (3.12) e considerando a diferença de sentido das normais, obtêm-se

$$\phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} (\ln r \nabla (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_W + S_\infty} (\ln r \nabla \phi - \phi \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.14)$$

A contribuição de S_∞ na integral da Eq. (3.14) pode ser definida como

$$\phi_\infty(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_\infty} (\ln r \nabla \phi - \phi \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.15)$$

A esteira é suposta ser fina, de tal forma que $\partial\phi/\partial n$ seja contínua através dela. Assim,

$$\phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} (\ln r \nabla (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2\pi} \int_{S_W} \Delta\phi \mathbf{n} \cdot \nabla \ln r dS + \phi_\infty(P), \quad (3.16)$$

onde $\Delta\phi = \phi^+ - \phi^-$ e representa o salto de ϕ na esteira.

A diferença entre os potenciais externo e interno com relação à S_B , é definido como

$$-\mu = \phi - \phi_i \quad (3.17.a)$$

e a diferença entre as derivadas na direção normal do potencial externo e interno, é definido como

$$-\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n}, \quad (3.17.b)$$

onde μ e σ são denominados de intensidade de dipolo e fonte, respectivamente.

Substituindo as Eq. (3.17.a,b) em (3.16), obtêm-se

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \sigma \ln r dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) dS + \phi_\infty(P). \quad (3.18)$$

O dipolo que aparece na integral referente a S_W é a diferença de potencial entre as superfícies superior e inferior da esteira. Note também que a derivada $\partial/\partial n$ é na orientação do dipolo.

3.3 Método dos Painéis

Devido às características matemáticas da Eq. (3.18) que descrevem os potenciais das singularidades empregadas, com velocidades induzidas da ordem de $1/r$, ou menores, quando $r \rightarrow \infty$, sua influência tende a zero para pontos muito distantes das mesmas, satisfazendo automaticamente a condição de contorno (3.6.b). Resta, portanto, aplicar a Eq.(3.18) na condição de contorno (3.6.a), ou seja,

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \sigma \nabla (\ln r) dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS + \nabla \phi_\infty(P) \right\} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.19.a)$$

Esta condição de contorno é dita ser de Neumann, pois utiliza o fluxo normal à fronteira sólida. Uma outra condição de contorno menos direta do que esta é a de Dirichlet, que diz que o potencial dentro do corpo é constante, ou seja,

$$\phi_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \sigma \ln r dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) dS + \phi_\infty = \text{const.} \quad (3.19.b)$$

Esta constante pode ser admitida como zero, possibilitando especificar a condição de contorno em função do potencial interno a S_B .

Satisfazer a condição de contorno (3.19.a) ou (3.19.b) em toda a fronteira do corpo analiticamente é bastante complicado para uma geometria arbitrária. Opta-se, então, por utilizar um Método Numérico, conhecido como Método dos Painéis (Katz e Plotkin, 1991), de forma que as condições de contorno sejam satisfeitas em pontos discretos ao longo da superfície, ditos pontos de controle. Para o emprego desta solução, divide-se a fronteira do corpo em pequenos segmentos, retos ou curvos, denominados painéis, cada qual com seu respectivo ponto de controle, colocado no centro de cada painel, conforme ilustra a Fig. 3.3 .

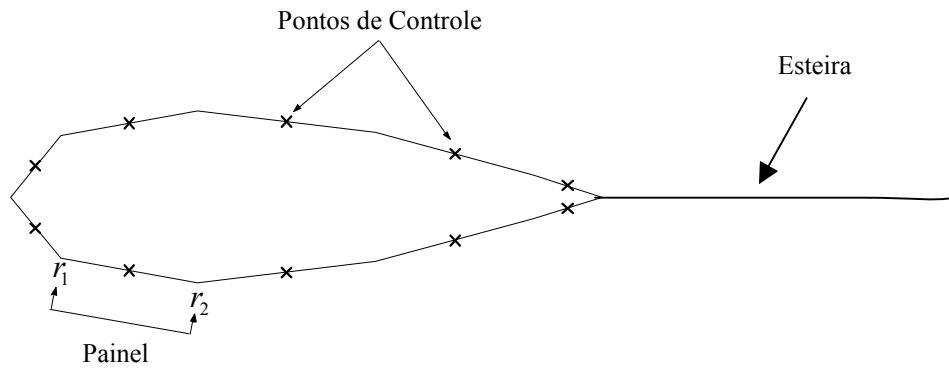


Figura 3.3 - Aerofólio discretizado, mostrando os pontos de controle.

A partir da geometria discretizada em N painéis ao longo da superfície do corpo e, considerando por simplicidade o caso no qual a intensidade das singularidades é constante ao longo do painel, a Eq.(3.19.a) pode ser escrita como

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \nabla \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dS \right]_j + \sum_{j=1}^N \sigma_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \nabla (\ln r) dS \right]_j \right\} \cdot \mathbf{n}_i = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}_i, \quad (3.20)$$

onde o dipolo μ_{N+1} refere-se ao dipolo da esteira μ_w , e o mesmo se aplica para a integral. O dipolo da esteira é constante, pois a circulação é a mesma para todo circuito que englobe o corpo e cruze a esteira.

Deste modo, a Eq. (3.20) pode ser escrita de forma compacta como

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j a_j + \sum_{j=1}^N \sigma_j b_j \right\} \cdot \mathbf{n}_i = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}_i, \quad (3.21)$$

onde $a_j \equiv \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \nabla \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dS \right]_j$ e $b_j \equiv \left[\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \nabla (\ln r) dS \right]_j$. Estes coeficientes são

chamados de coeficientes de influência, e dependem apenas da geometria do corpo. Esta equação é numericamente equivalente à condição de contorno de Neumann, Eq. (3.20), e é usada para determinar a intensidade das singularidades escolhidas. Este procedimento origina um sistema de equações algébricas lineares. A equação que expressa a condição de Dirichlet pode ser desenvolvida analogamente.

3.4 Condição de Kutta

A condição de Kutta deve ser imposta para que haja unicidade na circulação / solução, o que é alcançado pela igualdade das velocidades na superfície superior e inferior no bordo de fuga de um aerofólio. Na prática, esta condição implica que no bordo de fuga as pressões na superfície superior e inferior são iguais. Em geral, na maioria dos métodos de painéis, a condição de Kutta é satisfeita pela igualdade somente da componente tangencial da velocidade. A Fig. 3.4 mostra a nomenclatura do bordo de fuga de um aerofólio, onde se aplica a condição de Kutta.

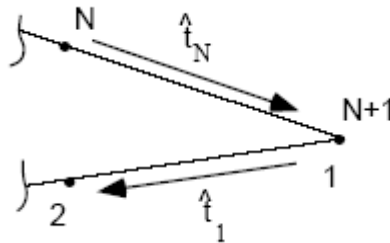


Figura 3.4 – Nomenclatura do método de painéis no bordo de fuga de um aerofólio.

Deste modo, a condição de Kutta pode ser matematicamente escrita como

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_N,$$

ou ainda, considerando-se somente a parcela tangencial,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_1 = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_N.$$

As expressões particulares para cada tipo de singularidade, dipolos e vórtices, e ordem da função de distribuição são dadas com maiores detalhes no capítulo 4.

3.5 Escolha de Singularidades

Conforme pode ser verificado através da Eq. (3.21) a escolha das singularidades que geram a solução do problema de escoamento potencial não é única, ou seja, para descrever um mesmo escoamento pode-se utilizar diversas combinações de singularidades que sejam capazes de representar o fenômeno físico em questão. Uma vez que as singularidades são escolhidas e suas intensidades determinadas através da imposição da Eq. (3.21), a solução obtida é única.

Para o caso de escoamento externo sobre aerofólios, a utilização de fontes unicamente só deve ser aplicada para aerofólios simétricos com ângulo de ataque nulo. Para situações diferentes dessa, é necessário empregar singularidades que possam representar escoamentos assimétricos, tais como vórtices ou dipolos. Escolhidas as singularidades, pode-se ainda utilizar funções de distribuição de singularidade mais gerais ao longo do painel, conforme mostrado na Fig. 3.5.a. Neste trabalho são empregadas funções de distribuição constante, linear e quadrática, com e sem inclusão de curvatura do painel.

O potencial de velocidade e as componentes de velocidade nas direções x e z , no sistema de coordenadas do painel, são apresentados para cada tipo de singularidade e ordem. Estas expressões utilizam algumas variáveis auxiliares $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$, apresentadas na Fig. 3.5.b e dadas por

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (z - z_k)^2} \text{ e } \theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_k}{x - x_k} \right). \quad (3.22.a,b)$$

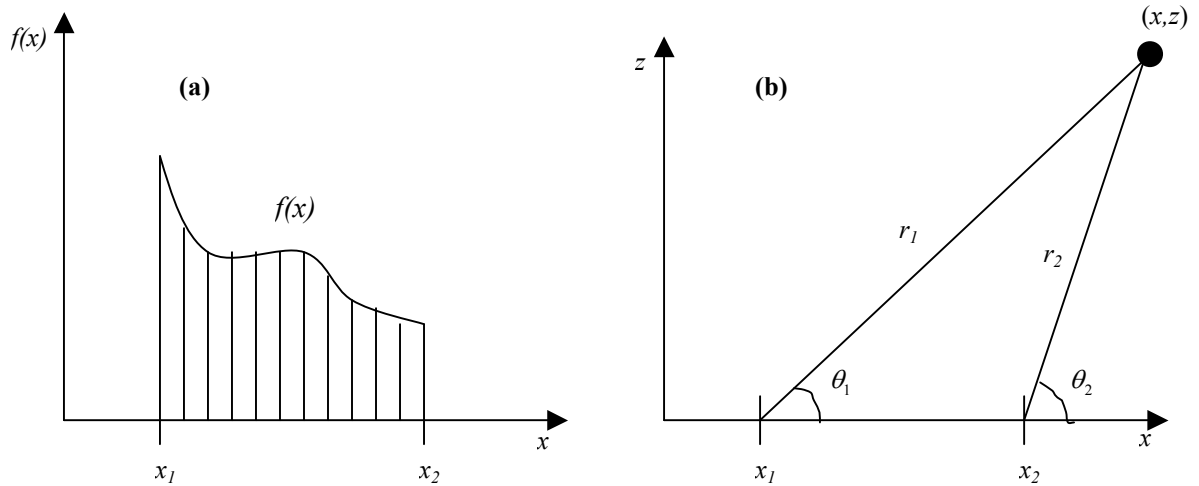


Figura 3.5 - Distribuição de singularidade ao longo do painel **(a)** Distribuição geral $f(x)$; **(b)** Variáveis auxiliares no sistema de coordenadas do painel.

Como todas as funções de distribuição de singularidade apresentadas abaixo estão expressas no sistema de coordenadas do painel (local), é necessário transformar as coordenadas do sistema global (X, Z) para o local (x, z) , efetuar os cálculos do potencial e da velocidade e, posteriormente, retornar ao sistema global, que é o sistema de interesse. A relação entre os dois sistemas pode ser observada na Fig. 3.6, onde é indicado o ângulo β do painel com a direção da corda do aerofólio, X , diferente para cada painel, através do qual é possível fazer a rotação dos eixos.

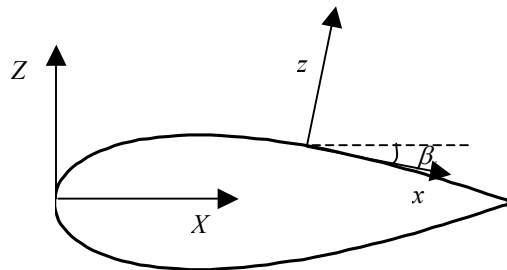


Figura 3.6 - Sistema de coordenadas, global e local.

Assim, o i -ésimo painel tem um ângulo β_i expresso com relação às quinas do painel, (X_i, Z_i) e (X_{i+1}, Z_{i+1}) que estão no sistema de coordenadas global, ou seja,

$$\beta_i = \tan^{-1} \left(\frac{Z_{i+1} - Z_i}{X_{i+1} - X_i} \right), \quad (3.23)$$

Com a determinação dos ângulos dos painéis, é possível fazer a rotação dos eixos, utilizando a operação matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i \\ -\sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_i \\ Z - Z_i \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Através da Fig. 3.6 é possível também, determinar os vetores normal e tangente à superfície do corpo no painel i , que são utilizados para a especificação das condições de contorno. Este painel possui vetor normal na direção de seu eixo z local e vetor tangente ao longo de seu eixo x local. Logo,

$$\mathbf{n}_i = (-\sin \beta_i, \cos \beta_i) \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_i = (\cos \beta_i, \sin \beta_i). \quad (3.25.a,b)$$

3.5.1 Fontes

São singularidades que geram um campo de velocidades na direção radial apenas, cuja intensidade possui o significado físico de ser igual à vazão volumétrica rejeitada pela singularidade (fonte) ou absorvida pela singularidade (sumidouro) e que passa através de uma circunferência que engloba a singularidade, no caso bidimensional ou de uma esfera, no tridimensional. São especialmente utilizados para modelar escoamentos simétricos, ou seja, para corpos simétricos com ângulo de ataque nulo.

A equação que rege uma fonte ou sumidouro pontual localizada em (x_0, z_0) é obtida da Eq. (3.19.b), ou seja,

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (3.26.a)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (3.26.b)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (3.26.c)$$

onde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ é a distância radial da fonte (ou sumidouro), localizada em (x_0, z_0) , a um ponto (x, z) da região fluida. A intensidade σ da singularidade é positiva no caso da fonte, e negativa no caso do sumidouro.

3.5.1.1 Fonte Constante

Para uma distribuição de fontes constante de intensidade $\sigma(x_0) = \sigma_0$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eqs. (3.26.a, b, c) sobre o painel, ou seja,

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.27.a)$$

$$u = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.27.b)$$

$$w = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.27.c)$$

onde σ_0 é a intensidade de uma fonte com função de distribuição constante sobre o painel; z_0 é nulo ao longo do painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.27.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi(x, y) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \left[(x - x_1) \ln r_1 - (x - x_2) \ln r_2 + z(\theta_2 - \theta_1) \right], \quad (3.28.a)$$

$$u = -\frac{\sigma_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (3.28.b)$$

$$w = \frac{\sigma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (3.28.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.1.2 Fonte Linear

Para uma distribuição linear de fontes de intensidade $\sigma(x_0) = \sigma_1 x_0$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.26.a, b, c) ao longo do painel, ou seja,

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.29.a)$$

$$u = \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.29.b)$$

$$w = \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.29.c)$$

onde σ_1 - é a parcela da intensidade da fonte referente ao termo linear da função de distribuição linear; z_0 é nulo ao longo do painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.29.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = \frac{\sigma_1}{4\pi} [(x^2 - x_1^2 - z^2) \ln r_1 - (x^2 - x_2^2 - z^2) \ln r_2 + 2xz(\theta_2 - \theta_1) - x(x_2 - x_1)], \quad (3.30.a)$$

$$u = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[z(\theta_2 - \theta_1) - x \ln \frac{r_2}{r_1} - (x_2 - x_1) \right], \quad (3.30.b)$$

$$w = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[z \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\theta_2 - \theta_1) \right], \quad (3.30.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.1.3 Fonte Quadrática

Para uma distribuição quadrática de fontes de intensidade $\sigma(x_0) = \sigma_2 x_0^2$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.26.a, b, c) ao longo do painel, ou seja,

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0^2 \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0, \quad (3.31.a)$$

$$u = \frac{\sigma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.31.b)$$

$$w = \frac{\sigma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.31.c)$$

onde σ_2 é a parcela da intensidade da fonte referente ao termo quadrático da função de distribuição quadrática sobre o painel; z_0 é nulo ao longo do painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.31.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\begin{aligned} \phi = \frac{\sigma_2}{12\pi} [2(x^2 - z^2)(x_1 - x_2) + x(x_1^2 - x_2^2) + 2z(3x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + \\ + x_2^3 \log r_2^2 - x_1^3 \log r_1^2 - x(x^2 - 9z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}], \end{aligned} \quad (3.32.a)$$

$$u = \frac{\sigma_2}{4\pi} [2x(x_1 - x_2) + x_1^2 - x_2^2 + 4xz(\theta_2 - \theta_1) - (x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}], \quad (3.32.b)$$

$$w = \frac{\sigma_2}{2\pi} [(x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(x_2 - x_1) + xz \log \frac{r_2^2}{r_1^2}], \quad (3.32.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.2 Dipolos

Para um dipolo discreto de intensidade μ na direção do eixo de coordenadas local z , ou seja, $(0, \mu)$, obtêm-se para o potencial de velocidade e para as componentes de velocidade nas direções x e z , respectivamente,

$$\begin{aligned} \phi(x, z) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) = \\ = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{z - z_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \end{aligned} \quad (3.33.a)$$

$$u(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\mu}{\pi} \frac{(z - z_0)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]^2}, \quad (3.33.b)$$

$$w(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{(x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]^2}. \quad (3.33.c)$$

3.5.2.1 Dipolo Constante

Para uma distribuição de dipolos constante de intensidade $\mu(x_0) = \mu_0$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.33.a, b, c), ou seja,

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z - z_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.34.a)$$

$$u = \frac{\mu_0}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]^2} dx_0, \quad (3.34.b)$$

$$w = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]^2} dx_0, \quad (3.34.c)$$

onde μ_0 é a intensidade de um dipolo com função de distribuição constante sobre o painel; z_0 é nulo ao longo de um painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.34.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = -\frac{\mu_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (3.35.a)$$

$$u = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{z}{r_1^2} - \frac{z}{r_2^2} \right), \quad (3.35.b)$$

$$w = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{x - x_1}{r_1^2} - \frac{x - x_2}{r_2^2} \right), \quad (3.35.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.2.2 Dipolo Linear

Para uma distribuição de dipolos linear de intensidade $\mu(x_0) = \mu_1 x_0$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.33.a, b, c), ou seja,

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.36.a)$$

$$u = \frac{\mu_1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]^2} dx_0, \quad (3.36.b)$$

$$w = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \frac{(x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]^2} dx_0, \quad (3.36.c)$$

onde μ_1 é a intensidade de um dipolo com função de distribuição linear sobre o painel; z_0 é nulo ao longo de um painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.36.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[z \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\theta_2 - \theta_1) \right], \quad (3.37.a)$$

$$u = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) - z \left(\frac{x_2}{r_2^2} - \frac{x_1}{r_1^2} \right) \right], \quad (3.37.b)$$

$$w = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{x(x - x_2) + z^2}{r_2^2} - \frac{x(x - x_1) + z^2}{r_1^2} \right], \quad (3.37.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.2.3 Dipolo Quadrático

Para uma distribuição de dipolos quadráticos de intensidade $\mu(x_0) = \mu_2 x_0^2$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.33.a, b, c), ou seja,

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.38.a)$$

$$u = \frac{\mu_2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (x - x_0)(z - z_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^2} dx_0, \quad (3.38.b)$$

$$w = -\frac{\mu_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0^2 \frac{(x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^2} dx_0, \quad (3.38.c)$$

onde μ_2 é a intensidade de um dipolo com função de distribuição quadrática sobre o painel; z_0 é nulo ao longo de um painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.38.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[z(x_1 - x_2) - (x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) - x \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right], \quad (3.39.a)$$

$$u = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[z \left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{x_1^2}{r_1^2} - \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) - 2x(\theta_2 - \theta_1) \right], \quad (3.39.b)$$

$$w = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[2(x_1 - x_2) + \frac{x_1^2 (x - x_1)}{r_1^2} - \frac{x_2^2 (x - x_2)}{r_2^2} + 2z(\theta_2 - \theta_1) - x \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right], \quad (3.39.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.3 Vórtices

Outra singularidade de grande interesse são os vórtices que podem representar escoamentos assimétricos sendo, portanto, utilizado em muitos casos ao invés dos dipolos. O potencial de velocidade e as componentes de velocidade nas direções x e z , respectivamente, são dadas por

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma}{2\pi} \theta = -\frac{\gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0}, \quad (3.40.a)$$

$$u(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (3.40.b)$$

$$w(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (3.40.c)$$

onde γ é intensidade de um vórtice discreto, considerada positiva no sentido horário.

3.5.3.1 Vórtice Constante

Para uma distribuição de vórtice com função de distribuição constante de intensidade $\gamma(x_0) = \gamma_0$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.40.a, b, c) sobre o painel, ou seja,

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} dx_0 \quad (3.41.a)$$

$$u = \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0 \quad (3.41.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.41.c)$$

onde γ_0 é a intensidade de um vórtice com distribuição constante sobre o painel; z_0 é nulo ao longo de um painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.41.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \left[(x - x_1) \theta_1 - (x - x_2) \theta_2 - z \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (3.42.a)$$

$$u = \frac{\gamma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (3.42.b)$$

$$w = \frac{\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (3.42.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.3.2 Vórtice Linear

Para uma distribuição de vórtice com função de distribuição linear de intensidade $\gamma(x_0) = \gamma_1 x_0$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.40.a, b, c), ou seja,

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} dx_0, \quad (3.43.a)$$

$$u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.43.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.43.c)$$

onde γ_1 é a intensidade de um vórtice com distribuição linear sobre o painel; z_0 é nulo ao longo de um painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.43.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[xz \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{z}{2} (x_2 - x_1) + \frac{x^2 - x_2^2 - z^2}{2} \theta_2 - \frac{x^2 - x_1^2 - z^2}{2} \theta_1 \right], \quad (3.44.a)$$

$$u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + z \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (3.44.b)$$

$$w = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[(x_2 - x_1) - z(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (3.44.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

3.5.3.3 Vórtice Quadrático

Para uma distribuição de vórtice quadrático de intensidade $\gamma(x_0) = \gamma_2 x_0^2$, ao longo do k -ésimo painel, deve-se integrar as Eq. (3.40.a, b, c), ou seja,

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0^2 \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} dx_0, \quad (3.45.a)$$

$$u = \frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.45.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.45.c)$$

onde γ_2 é a intensidade de um vórtice com distribuição quadrática sobre o painel; z_0 é nulo ao longo de um painel sem curvatura e x_1 e x_2 são os limites de integração sobre o painel no sistema de coordenadas local. Portanto, resolvendo as integrais (3.45.a, b, c) e utilizando as variáveis da Fig. 3.5, obtêm-se

$$\phi = \frac{\gamma_2}{12\pi} [4xz(x_2 - x_1) + z(x_2^2 - x_1^2) + 2x_1^3\theta_1 - 2x_2^3\theta_2 + 2x(x^2 - 3z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(3x^2 - z^2)\log\frac{r_2^2}{r_1^2}], \quad (3.46.a)$$

$$u = \frac{\gamma_2}{12\pi} \left[(x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(x_2 - x_1) + xz \log\frac{r_2^2}{r_1^2} \right], \quad (3.46.b)$$

$$w = \frac{\gamma_2}{4\pi} \left[2x(x_2 - x_1) + x_2^2 - x_1^2 - 4xz(\theta_2 - \theta_1) + (x^2 - z^2)\log\frac{r_2^2}{r_1^2} \right], \quad (3.46.c)$$

onde r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos pelas Eq. (3.22.a, b) e podem ser vistos esquematicamente na Fig. 3.5.b.

A auto-indução é a perturbação do potencial de velocidade ou da própria velocidade produzido por um painel sobre o ponto de controle do mesmo. O cálculo da parcela de auto-indução deve ser tratado em particular, a fim de evitar possíveis erros no cálculo das integrais da velocidade e do potencial. Este tratamento pode ser feito tanto analítica quanto numericamente. Para o caso de painéis retos, as integrais são resolvidas analiticamente, podendo-se particularizar as equações já deduzidas para englobar tal efeito sem que haja problemas. Para o caso de painéis curvos o mesmo procedimento não pode ser feito, visto que as integrações são numéricas. Neste caso, opta-se por adicionar um “gap” no ponto de controle em relação à superfície do painel. Este procedimento também poderia ter sido utilizado para painéis retos (Katz & Plotkin, 2001).

A tabela 3.1 resume de forma prática as equações do potencial e das componentes de velocidade nas direções x e z , associadas a fontes, dipolos e vórtices em

função da distribuição de singularidades ao longo do aerofólio. Estas expressões matemáticas desconsideram o efeito de curvatura, ou seja, são válidas apenas para painéis retos. Observe que, para os polinômios linear e quadrático, a função de distribuição deve ser escrita como $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$ e $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$, respectivamente. Como consequência, os potenciais $\phi(x, z)$, e as componentes de velocidade u e w também devem ser escritas como a superposição de cada contribuição de função de distribuição, ou seja, constante, linear e quadrática.

3.6 Inclusão da Curvatura no Método dos Painéis

A inclusão da curvatura do painel no método dos painéis tem como objetivo melhorar o desempenho do método através de considerações matemáticas e físicas. Para um corpo com superfície definida pela função $Z = f(x)$, a curvatura do painel exige a igualdade da derivada no nó final do painel $j-1$ com o nó do início do painel j , isto é, $dZ/dX|_{X_j^-} = dZ/dX|_{X_j^+}$, e a igualdade da derivada no nó final do painel j com o nó do início do painel $j+1$, isto é, $dZ/dX|_{X_{j+1}^-} = dZ/dX|_{X_{j+1}^+}$, visto no sistema de coordenadas global.

Para aerofólios em que a função $Z=f(X)$ é conhecida, basta calcular a derivada analiticamente e avaliá-la nos nós de cada painel. Porém, para muitos aerofólios de interesse prático a função $f(X)$ não se encontra disponível como uma função analítica, mas sim na forma tabular. Para se contornar este problema algumas estratégias podem ser traçadas. Por exemplo, é possível gerar uma função de interpolação entre os pontos do aerofólio e, posteriormente, tirar sua derivada analiticamente, procedimento este que gera grandes erros devido ao fato de que a função de interpolação garante somente a função e não a derivada no ponto em questão. Outra maneira é fazer uma discretização mais refinada (muitos painéis) do aerofólio somente para o cálculo da derivada, e aplicar tais valores numa discretização mais grosseira com um número reduzido de painéis. Este último método é bastante eficiente, mas sua programação torna-se mais difícil que o método aqui proposto e apresenta resultados bem próximos aos obtidos para uma discretização com 18 painéis no método proposto neste trabalho. Com o

aumento do número de painéis, esta diferença entre os métodos torna-se cada vez menor, até chegar ao caso de painel plano.

Tabela 3.1 - Ordem da distribuição de singularidades sobre painéis retos.

Elemento	Constante $\lambda(x) = \lambda_0$	Linear $\lambda(x) = \lambda_1 x$	Quadrática $\lambda(x) = \lambda_2 x^2$
Fonte	$\phi = \frac{\sigma_0}{2\pi} [(x-x_1) \ln r_1 - (x-x_2) \ln r_2 + z(\theta_2 - \theta_1)]$ $u = -\frac{\sigma_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ $w = \frac{\sigma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$	$\phi = \frac{\sigma_1}{4\pi} [(x^2 - x_1^2 - z^2) \ln r_1 - (x^2 - x_2^2 - z^2) \ln r_2 + 2xz(\theta_2 - \theta_1) - x(x_2 - x_1)]$ $u = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[z(\theta_2 - \theta_1) - x \ln \frac{r_2}{r_1} - (x_2 - x_1) \right]$ $w = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[z \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\theta_2 - \theta_1) \right]$	$\phi = \frac{\sigma_2}{12\pi} [2(x^2 - z^2)(x_1 - x_2) + x(x_1^2 - x_2^2) + 2z(3x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + x_2^3 \log r_2^2 - x_1^3 \log r_1^2 - x(x^2 - 9z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$ $u = \frac{\sigma_2}{4\pi} [2x(x_1 - x_2) + x_1^2 - x_2^2 + 4xz(\theta_2 - \theta_1) - (x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$ $w = \frac{\sigma_2}{2\pi} [(x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(x_2 - x_1) + xz \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$
Dipolo	$\phi = -\frac{\mu_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$ $u = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{z}{r_1^2} - \frac{z}{r_2^2} \right)$ $w = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{x-x_1}{r_1^2} - \frac{x-x_2}{r_2^2} \right)$	$\phi = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[z \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\theta_2 - \theta_1) \right]$ $u = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) - z \left(\frac{x_2}{r_2^2} - \frac{x_1}{r_1^2} \right) \right]$ $w = -\frac{\mu_1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{x(x-x_2) + z^2}{r_2^2} - \frac{x(x-x_1) + z^2}{r_1^2} \right]$	$\phi = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[z(x_1 - x_2) - (x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) - x \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]$ $u = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[z \left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{x_1^2}{r_1^2} - \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) - 2x(\theta_2 - \theta_1) \right]$ $w = \frac{\mu_2}{2\pi} \left[2(x_1 - x_2) + \frac{x_1^2(x-x_1)}{r_1^2} - \frac{x_2^2(x-x_2)}{r_2^2} + 2z(\theta_2 - \theta_1) - x \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]$
Vórtice	$\phi = -\frac{\gamma_0}{2\pi} [(x-x_1)\theta_1 - (x-x_2)\theta_2 + z \ln \frac{r_2}{r_1}]$ $u = \frac{\gamma_0}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$ $w = \frac{\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$	$\phi = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[xz \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{z}{2}(x_2 - x_1) + \frac{x^2 - x_2^2 - z^2}{2}\theta_2 - \frac{x^2 - x_1^2 - z^2}{2}\theta_1 \right]$ $u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + z \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$ $w = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[(x_2 - x_1) - z(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$	$\phi = \frac{\gamma_2}{12\pi} [4xz(x_2 - x_1) + z(x_2^2 - x_1^2) + 2x_1^3\theta_1 - 2x_2^3\theta_2 + 2x(x^2 - 3z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(3x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$ $u = \frac{\gamma_2}{12\pi} \left[(x^2 - z^2)(\theta_2 - \theta_1) + z(x_2 - x_1) + xz \log \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]$ $w = \frac{\gamma_2}{4\pi} [2x(x_2 - x_1) + x_2^2 - x_1^2 - 4xz(\theta_2 - \theta_1) + (x^2 - z^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2}]$

O método para o cálculo das derivadas aqui proposto é bem parecido com o método proposto por Lewis (1991) para corrigir o efeito de curvatura no método “misto” dos vórtices discretos/constante. Para o aerofólio da Fig. 3.7, o ângulo de inclinação do nó de montante do painel no sistema de coordenadas globais é a média entre o ângulo do painel em consideração, j , e o ângulo do painel de montante, $j-1$, enquanto que o ângulo de inclinação do nó de jusante do painel é dado pela média do ângulo do painel j e o ângulo do painel $j+1$. Estes ângulos dos nós são calculados no sistema de coordenadas globais, devendo passá-los para o sistema local posicionado no j -ésimo painel. Assim, se β_{j-1} é o ângulo a montante, β_j é o ângulo em consideração e β_{j+1} é o ângulo a jusante em relação ao sistema de coordenada global, então os ângulos em relação ao sistema de coordenada local são dados por $\frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{2}$ e $\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{2}$.

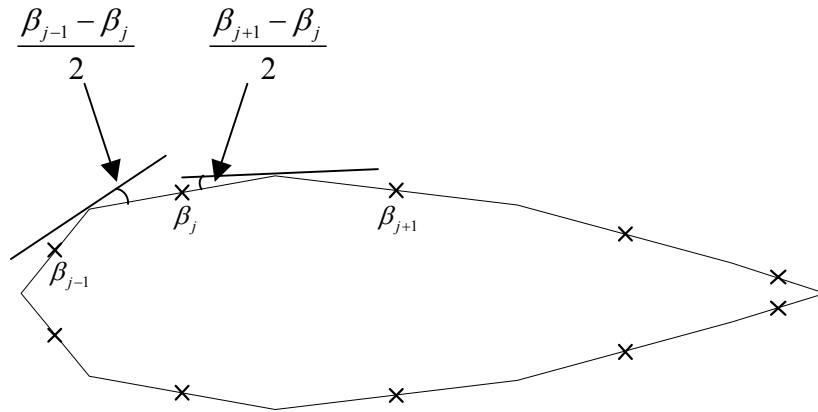


Figura 3.7 – Inclusão da curvatura no método dos painéis.

Deste modo, propõe-se o uso de uma função polinomial do terceiro grau que substitui z_0 nas fórmulas anteriores, i. e., $z_0 = \eta(x_0)$ e não mais constante. Assim,

$$\eta(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d, \quad (3.47)$$

o que permite impor quatro condições para a determinação das quatro constantes a , b , c e d . Essas quatro condições são a continuidade da função e de sua derivada nos nós de montante e jusante de cada painel. Matematicamente, é possível escrever

$$\eta(0) = 0, \quad (3.48.a)$$

$$\eta(\Delta c) = 0, \quad (3.48.b)$$

$$\frac{d\eta(0)}{dx_0} = \tan\left(\frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{2}\right) \equiv \delta_1, \quad (3.48.c)$$

$$\frac{d\eta(\Delta c)}{dx_0} = \tan\left(\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{2}\right) \equiv \delta_2, \quad (3.48.d)$$

onde Δc é o tamanho do painel j . Cabe ressaltar que δ_1 para o painel 1 e δ_2 para o painel N foram calculados assumindo que os ângulos β_0 e β_{N+1} tendem a zero.

Utilizando as Eq.(3.48.a,b,c,d) na Eq.(3.47), obtêm-se

$$\eta(x_0) = \Delta c \left[(\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0^3}{\Delta c^3} - (2\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0^2}{\Delta c^2} + \delta_1 \frac{x_0}{\Delta c} \right], \quad (3.49.a)$$

sendo sua derivada dada por

$$\frac{d\eta}{dx_0}(x_0) = 3(\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0^2}{\Delta c^2} - 2(2\delta_1 + \delta_2) \frac{x_0}{\Delta c} + \delta_1. \quad (3.49.b)$$

Adotando-se uma variável auxiliar definida por

$$\xi \equiv \frac{x_0}{\Delta c}, \quad (3.50)$$

as Eq. (3.48.a,b) podem ser reescritas do seguinte modo

$$\eta(\xi \Delta c) \equiv \eta^*(\xi) = \Delta c \left[(\delta_1 + \delta_2) \xi^3 - (2\delta_1 + \delta_2) \xi^2 + \delta_1 \xi \right], \quad (3.51.a)$$

$$\frac{d\eta^*}{dx_0}(\xi) = \frac{d\eta}{dx_0}(\xi\Delta c) = 3(\delta_1 + \delta_2)\xi^2 - 2(2\delta_1 + \delta_2)\xi + \delta_1. \quad (3.51.b)$$

Quando se introduz o efeito de curvatura no painel, deve-se corrigir a normal e a tangente no ponto de controle, dadas pelas Eqs. (3.25.a,b). Assim, os vetores normal e tangencial no ponto de controle, corrigidos para a curvatura do painel, são dadas por

$$\mathbf{n}_i = \left\{ -\sin \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(0,5) \right) \right], \cos \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(0,5) \right) \right] \right\}, \quad (3.52.a)$$

$$\mathbf{t}_i = \left\{ \cos \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(0,5) \right) \right], \sin \left[\beta_i + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta^*}{dx_0}(0,5) \right) \right] \right\}. \quad (3.52.b)$$

Na Eq. (3.52.b), a grandeza $\frac{d\eta^*}{dx_0}(0,5)$ expressa o valor da Eq. (3.51.b) avaliada em $\xi = 0,5$. As equações para cada tipo de singularidade incluindo o efeito de curvatura dos painéis são obtidas abaixo.

3.6.1 Fontes

3.6.1.1 Fonte Constante

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.27.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.53.a)$$

$$u = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.53.b)$$

$$w = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(z - \eta(x_0))}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0. \quad (3.53.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.53.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_0 \Delta c}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.54.a)$$

$$u = \frac{\sigma_0 \Delta c}{2\pi} \int_0^1 \frac{(x - \xi \Delta c)}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.54.b)$$

$$w = \frac{\sigma_0 \Delta c}{2\pi} \int_0^1 \frac{(z - \eta^*(\xi))}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi. \quad (3.54.c)$$

As Eqs. (3.54) e todas as demais descritas abaixo são integradas numericamente utilizando o Método de Simpson 1/3.

3.6.1.2 Fonte Linear

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.29.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.55.a)$$

$$u = \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.55.b)$$

$$w = \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (z - \eta(x_0))}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0. \quad (3.55.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.55.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \ln \sqrt{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.56.a)$$

$$u = \frac{\sigma_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi (x - \xi \Delta c)}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.56.b)$$

$$w = \frac{\sigma_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi (z - \eta^*(\xi))}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi. \quad (3.56.c)$$

3.6.1.3 Fonte Quadrática

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.31.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0^2 \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.57.a)$$

$$u = \frac{\sigma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.57.b)$$

$$w = \frac{\sigma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (z - \eta(x_0))}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0. \quad (3.57.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.57.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = \frac{\sigma_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \xi^2 \ln \sqrt{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.58.a)$$

$$u = \frac{\sigma_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi^2 (x - \xi \Delta c)}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.58.b)$$

$$w = \frac{\sigma_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi^2 (z - \eta^*(\xi))}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi. \quad (3.58.c)$$

3.6.2 Dipolos

3.6.2.1 Dipolo Constante

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.34.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z - \eta(x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.59.a)$$

$$u = \frac{\mu_0}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)(z - \eta(x_0))}{\left[(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2 \right]^2} dx_0, \quad (3.59.b)$$

$$w = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)^2 - (z - \eta(x_0))^2}{\left[(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2 \right]^2} dx_0. \quad (3.59.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.59.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_0 \Delta c}{2\pi} \int_0^1 \frac{z - \eta^*(\xi)}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.60.a)$$

$$u = \frac{\mu_0 \Delta c}{\pi} \int_0^1 \frac{(x - \xi \Delta c)(z - \eta^*(\xi))}{\left[(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2 \right]^2} d\xi, \quad (3.60.b)$$

$$w = -\frac{\mu_0 \Delta c}{2\pi} \int_0^1 \frac{(x - \xi \Delta c)^2 - (z - \eta^*(\xi))^2}{\left[(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2 \right]^2} d\xi. \quad (3.60.c)$$

3.6.2.2 Dipolo Linear

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.36.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (z - \eta(x_0))}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.61.a)$$

$$u = \frac{\mu_1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0)(z - \eta(x_0))}{\left[(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2 \right]^2} dx_0, \quad (3.61.b)$$

$$w = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \frac{(x - x_0)^2 - (z - \eta(x_0))^2}{\left[(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2 \right]^2} dx_0. \quad (3.61.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.61.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{z - \eta^*(\xi)}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.62.a)$$

$$u = \frac{\mu_1 \Delta c^2}{\pi} \int_0^1 \xi \frac{(x - \xi \Delta c)(z - \eta^*(\xi))}{\left[(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2 \right]^2} d\xi, \quad (3.62.b)$$

$$w = -\frac{\mu_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{(x - \xi \Delta c)^2 - (z - \eta^*(\xi))^2}{\left[(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2 \right]^2} d\xi. \quad (3.62.c)$$

3.6.2.3 Dipolo Quadrático

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.38.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (z - \eta(x_0))}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.63.a)$$

$$u = \frac{\mu_2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (x - x_0)(z - \eta(x_0))}{\left[(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2 \right]^2} dx_0, \quad (3.63.b)$$

$$w = -\frac{\mu_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0^2 \frac{(x - x_0)^2 - (z - \eta(x_0))^2}{\left[(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2 \right]^2} dx_0. \quad (3.63.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.63.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = -\frac{\mu_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{z - \eta^*(\xi)}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.64.a)$$

$$u = \frac{\mu_2 \Delta c^3}{\pi} \int_0^1 \xi^2 \frac{(x - \xi \Delta c)(z - \eta^*(\xi))}{\left[(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2 \right]^2} d\xi, \quad (3.64.b)$$

$$w = -\frac{\mu_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \xi^2 \frac{(x - \xi \Delta c)^2 - (z - \eta^*(\xi))^2}{\left[(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2 \right]^2} d\xi. \quad (3.64.c)$$

3.6.3 Vórtices

3.6.3.1 Vórtice Constante

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.41.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \tan^{-1} \frac{z - \eta(x_0)}{x - x_0} dx_0, \quad (3.65.a)$$

$$u = \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(z - \eta(x_0))}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0, \quad (3.65.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (z - \eta(x_0))^2} dx_0. \quad (3.65.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.65.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_0 \Delta c}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \tan^{-1} \frac{z - \eta^*(\xi)}{x - \xi \Delta c} d\xi, \quad (3.66.a)$$

$$u = \frac{\gamma_0 \Delta c}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(z - \eta^*(\xi))}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.66.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_0 \Delta c}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - \xi \Delta c}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi. \quad (3.66.c)$$

3.6.3.2 Vórtice Linear

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.43.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} dx_0, \quad (3.67.a)$$

$$u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.67.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0. \quad (3.67.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.67.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \tan^{-1} \frac{z - \eta^*(\xi)}{x - \xi \Delta c} d\xi, \quad (3.68.a)$$

$$u = \frac{\gamma_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{(z - \eta^*(\xi))}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.68.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_1 \Delta c^2}{2\pi} \int_0^1 \xi \frac{x - \xi \Delta c}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi. \quad (3.68.c)$$

3.6.3.3 Vórtice Quadrático

Substituindo a Eq. (3.49.a) em (3.45.a,b,c), obtêm-se

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0^2 \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} dx_0, \quad (3.69.a)$$

$$u = \frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0, \quad (3.69.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0^2 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx_0. \quad (3.69.c)$$

Considerando $x_1 = 0$, admitido como origem do sistema de coordenadas local, $x_2 = \Delta c$ e fazendo a mudança de variáveis proposta pela Eq.(3.50), as Eq. (3.69.a,b,c) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\phi(x, z) = -\frac{\gamma_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \xi^2 \tan^{-1} \frac{z - \eta^*(\xi)}{x - \xi \Delta c} d\xi, \quad (3.70.a)$$

$$u = \frac{\gamma_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \xi^2 \frac{(z - \eta^*(\xi))}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi, \quad (3.70.b)$$

$$w = -\frac{\gamma_2 \Delta c^3}{2\pi} \int_0^1 \xi^2 \frac{x - \xi \Delta c}{(x - \xi \Delta c)^2 + (z - \eta^*(\xi))^2} d\xi. \quad (3.70.c)$$

Conforme já comentado, o cálculo da parcela de auto-indução para painéis curvos é efetuado numericamente, adicionando-se um “gap” no ponto de controle em relação à superfície do painel.

Novamente, deve-se observar que, para os polinômios linear e quadrático, a função de distribuição deve ser escrita como $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$ e $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$,

respectivamente. Como consequência, os potenciais $\phi(x, z)$, e as componentes de velocidade u e w também devem ser escritas como a superposição de cada contribuição de função de distribuição, ou seja, constante, linear e quadrática.

Capítulo 4

Implementação Computacional

O primeiro passo a ser dado para a implementação computacional do método dos painéis é a definição da geometria do corpo. Utiliza-se para este fim a discretização cossenoidal da Eq. (4.1), que têm como objetivo aumentar o número de painéis nas regiões dos bordos de ataque e de fuga, locais estes que apresentam grande variação de velocidade e de pressão. Deste modo, mesmo utilizando uma discretização com poucos painéis, a condição de contorno pode ser imposta nessas regiões com menores erros, conforme ilustrado na Fig. 4.1.

$$X = \frac{c}{2}(1 - \cos \varphi). \quad (4.1)$$

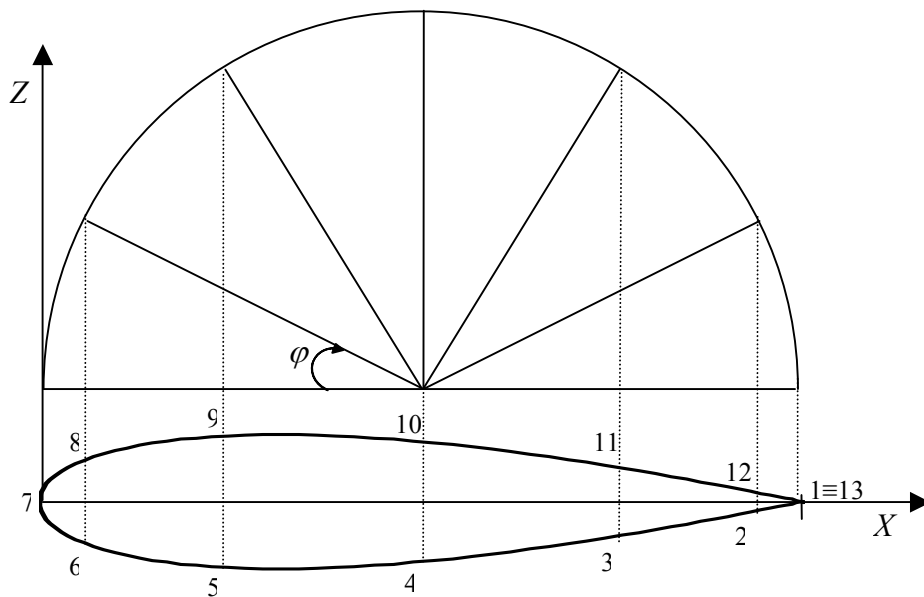


Figura 4.1 – Discretização especial do contorno, concentrando painéis nas extremidades.

Aplicando a condição de contorno de impenetrabilidade, Eq. (3.6.a) ou, equivalentemente, a condição de potencial constante (condição de Dirichlet), em todos

os pontos de controle, chega-se a um sistema de equações algébricas lineares que pode ser resolvido pelo Método de Gauss ou qualquer outro que seja adequado ao problema.

4.1 Implementação Computacional de Singularidades Constantes

Para uma distribuição de singularidades constante $\lambda(x_0) = \lambda_0$, que pode ser fonte, dipolo ou vórtice, a condição de contorno de impenetrabilidade para o i -ésimo painel é expressa da seguinte maneira

$$a_{i1}\lambda_{01} + a_{i2}\lambda_{02} + \dots + a_{iN-1}\lambda_{0N-1} + a_{iN}\lambda_{0N} = RHS_i, \quad (4.2)$$

onde λ_{0j} representa a parte constante da distribuição de singularidades do j -ésimo painel, o mesmo ocorrendo para o coeficiente de influência, a_{ij} .

O coeficiente de influência a_{ij} é calculado, para o caso de condição de contorno de Neumann, como sendo a componente de velocidade normal induzida no painel i , produzida por uma distribuição de singularidade de intensidade unitária no painel j . Para o caso de condição de contorno de Dirichlet, o coeficiente de influência a_{ij} é dado como sendo a perturbação no potencial de velocidade no painel i produzido por uma distribuição de singularidades de intensidade unitária no painel j . As expressões matemáticas para os coeficientes de influência a_{ij} encontram-se no Apêndice A.

Ao aplicar a condição de contorno para todos os pontos de controle, obtêm-se um sistema de equações lineares de ordem $N \times N$, dado por

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \vdots \\ \lambda_{0N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_N \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\text{onde } A_{ij} = a_{ij} \text{ e} \quad (4.4.a)$$

$$RHS_i = -\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_\infty = Q_\infty (\cos \alpha \sin \beta_i - \sin \alpha \cos \beta_i) \quad (4.4.b)$$

onde α é o ângulo de ataque e β_i é o ângulo do painel em relação ao eixo X do sistema de coordenadas global.

Para escoamentos que gerem sustentação, deve-se utilizar a condição de Kutta. Para se incluir tal condição no sistema de equações, Eq. (4.3), é necessário que se troque uma equação de impenetrabilidade por esta condição ou utilizar o método dos mínimos quadrados, onde se tenta satisfazer ambas. Em geral, na literatura prefere-se simplesmente trocá-las, visto que os erros são similares. A condição de Kutta para dipolos é expressa por

$$\mu_w = \mu_N - \mu_1, \quad (4.5.a)$$

enquanto que para vórtices é dada por

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0. \quad (4.5.b)$$

Neste momento cabe uma observação em relação ao método de fontes e dipolos. Neste método, a incógnita é a intensidade de dipolos e somente esta tem sua ordem de distribuição aumentada, sendo a distribuição de fontes sempre constantes e dadas por

$$\sigma_j = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{Q}_\infty.$$

4.2 Implementação Computacional de Singularidades Lineares

Para uma distribuição de singularidades lineares $\lambda(x_0) = \lambda_0 + \lambda_1 x_0$, podendo ser fonte, dipolo ou vórtice, a condição de contorno de impenetrabilidade para o i -ésimo painel é expressa da seguinte maneira

$$a_{i1}\lambda_{01} + b_{i1}\lambda_{11} + a_{i2}\lambda_{02} + b_{i2}\lambda_{12} + \dots + a_{iN-1}\lambda_{0N-1} + b_{iN-1}\lambda_{1N-1} + a_{iN}\lambda_{0N} + b_{iN}\lambda_{1N} = RHS_i, \quad (4.6)$$

onde λ_{0j} , λ_{1j} representam a parte constante e linear da distribuição de singularidades do j -ésimo painel, o mesmo ocorrendo para os coeficientes de influência, a_{ij} , b_{ij} .

Assim como no caso da distribuição de singularidades constantes, os coeficientes de influência a_{ij} , b_{ij} apresentam o mesmo significado físico e, portanto, são

calculados da mesma maneira. As expressões matemáticas que definem os coeficientes de influência a_{ij} e b_{ij} podem ser obtidas do apêndice A.

Ao escrever as equações de impenetrabilidade para os N pontos de controle, chega-se a um sistema de equações lineares indeterminado com N equações a $2N$ incógnitas. Para resolver este problema, admite-se que a função de distribuição de singularidades é contínua, exceto no bordo de fuga, onde a condição de Kutta deve ser imposta. Assim, têm-se mais $N-1$ equações de continuidade da função linear nos nós dos painéis que são dadas por

$$\lambda_{0j} + \lambda_{1j} \Delta c_j = \lambda_{0j+1} \quad (4.7)$$

onde Δc_j é o comprimento do painel j . Neste momento, o sistema de equações têm $2N-1$ equações a $2N$ incógnitas, faltando, portanto, mais uma equação.

Essa equação que falta para fechar o problema é a condição de Kutta, obtida através de uma consideração física de que o bordo de fuga é um ponto de estagnação, ou seja, um ponto de velocidade nula. Logo, esta condição para fontes e vórtices é dada por

$$\lambda_{01} + \lambda_{0N} + \lambda_{1N} \Delta c_N = 0, \quad (4.8.a)$$

enquanto que para dipolos é dada por

$$\mu_w = \mu_{0N} + \mu_{1N} \Delta c_N - \mu_{01}. \quad (4.8.b)$$

Neste ponto o sistema de equações está fechado com $2N$ equações a $2N$ incógnitas. Entretanto, a resolução deste sistema sem nenhum tratamento, torna-se de difícil implementação, assim como bastante dispendiosa em termos computacionais. Para contornar este problema, utiliza-se a Eq. (4.7) como fórmula de recorrência, visto que é perfeitamente possível descrever derivadas de ordem superior em função de derivadas de ordem inferior, reduzindo-se a ordem do sistema de $2N$ para $N+1$. Deste modo, reescrevendo a Eq. (4.7), obtemos

$$\lambda_{1j} = \frac{1}{\Delta c_j} (\lambda_{0j+1} - \lambda_{0j}). \quad (4.9)$$

Substituindo a Eq.(4.9) em (4.6), obtêm-se uma equação com a seguinte forma

$$A_{i1}\lambda_{01} + A_{i2}\lambda_{02} + \dots + A_{iN-1}\lambda_{0N-1} + A_{iN}\lambda_{0N} + A_{iN+1}\lambda_{1N} = RHS_i, \quad (4.10)$$

onde a lei de formação dos coeficientes A_{ij} , mostrados na Tabela 4.1, é uma função dos coeficientes de influência, a_{ij} e b_{ij} . Para maiores detalhes sobre a lei de formação para a distribuição linear de singularidade ver apêndice B.

Tabela 4.1 – Lei de formação para distribuição linear de singularidades dos coeficientes A_{ij}

Coefficientes A_{ij}: $A_{i1} = \left(a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} \right).$ $A_{ij} = \left(a_{ij} + \frac{b_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} - \frac{b_{ij}}{\Delta c_j} \right), \quad 2 \leq j \leq N-1.$ $A_{iN} = \left(a_{iN} + \frac{b_{iN-1}}{\Delta c_{N-1}} \right).$ $A_{iN+1} = b_{iN}.$
--

Aplicando, portanto, a Eq. (4.10) em todos os pontos de controle e adicionando a equação referente ao bordo de fuga, Eq. (4.8), o sistema é então escrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N-1} & A_{1N} & A_{1N+1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N-1} & A_{2N} & A_{2N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-11} & A_{N-12} & \cdots & A_{N-1N-1} & A_{N-1N} & A_{N-1N+1} \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN-1} & A_{NN} & A_{NN+1} \\ A_{N+11} & A_{N+12} & \cdots & A_{N+1N-1} & A_{N+1N} & A_{N+1N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \vdots \\ \gamma_{0N-1} \\ \gamma_{0N} \\ \gamma_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_{N-1} \\ RHS_N \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

onde as demais intensidades das singularidades, λ , são prontamente determinadas pelas fórmula de recorrência, Eq. (4.9).

4.3 Implementação Computacional de Singularidades Quadráticas

4.3.1 Fontes e Dipolos

Para uma distribuição de singularidades quadráticas $\lambda(x_0) = \lambda_0 + \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0^2$, podendo ser fonte, dipolo ou vórtice, a condição de contorno de impenetrabilidade para o i -ésimo painel é expressa da seguinte maneira

$$a_{i1}\lambda_{01} + b_{i1}\lambda_{11} + c_{i1}\lambda_{21} + \dots + a_{iN}\lambda_{0N} + b_{iN}\lambda_{1N} + c_{iN}\lambda_{2N} = RHS_i, \quad (4.12)$$

onde λ_{0j} , λ_{1j} e λ_{2j} representam a parte constante, linear e quadrática da distribuição de singularidades do j -ésimo painel, o mesmo ocorrendo para os coeficientes de influência, a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} .

Assim como no caso das distribuições de singularidades constantes e lineares, os coeficientes de influência a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} são calculados de maneira análoga, encontrando-se no Apêndice A.

Ao escrever as equações de impenetrabilidade para os N pontos de controle, chega-se a um sistema de equações lineares indeterminado com N equações a $3N$ incógnitas. Para resolver este problema, admite-se que a distribuição de singularidades é contínua e diferenciável, exceto no bordo de fuga, novamente por ser um ponto onde deve ser imposta a condição de Kutta. Assim, têm-se mais $2N-2$ equações que são dadas por

$$\lambda_{0j} + \lambda_{1j}\Delta c_j + \lambda_{2j}\Delta c_j^2 = \lambda_{0j+1}, \quad (4.13.a)$$

$$\lambda_{1j} + 2\lambda_{2j}\Delta c_j = \lambda_{1j+1} \quad (4.13.b)$$

onde Δc_j é o comprimento do painel j . A Eq. (4.13.a) expressa a continuidade da função quadrática nos nós, enquanto que a Eq. (4.13.b) expressa a continuidade de

derivada de função. Neste momento, o sistema de equações tem $3N-2$ equações a $3N$ incógnitas, faltando ainda, mais duas equações.

Com relação ao bordo de fuga, tem-se a condição de salto para a função de distribuição que pode ser utilizada para fontes, dipolos e vórtices. No caso de dipolos e vórtices tal condição é a própria condição de Kutta, enquanto que para fontes expressa que o bordo de fuga é um ponto de estagnação com velocidade nula. Para fontes e vórtices, esta condição é dada por

$$\lambda_{01} + \lambda_{0N} + \lambda_{1N}\Delta c_N + \lambda_{2N}\Delta c_N^2 = 0, \quad (4.14.a)$$

enquanto que para dipolos é expressa por

$$\mu_w = \mu_{0N} + \mu_{1N}\Delta c_N + \mu_{2N}\Delta c_N^2 - \mu_{01}. \quad (4.14.b)$$

Outra equação é necessária para o bordo de fuga a fim de fechar o sistema de equações. A igualdade da componente tangencial das velocidades na superfície superior e inferior no bordo de fuga pode ser expressa para fontes e dipolos da seguinte forma

$$\lambda_{11} + \lambda_{1N} + 2\lambda_{2N}\Delta c_N = 0. \quad (4.15)$$

Para vórtices, esta equação já é aplicada através da condição de Kutta, sendo necessário obter um outro meio de fechar o sistema. Para isso, utiliza-se uma distribuição de função quadrática ao longo de todo o aerofólio exceto no bordo de fuga, onde se utiliza uma distribuição linear. O item 4.3.2 a seguir e o apêndice D tratam com maiores detalhes a distribuição quadrática de vórtices.

Neste ponto o sistema de equações está fechado com $3N$ equações a $3N$ incógnitas. Analogamente ao feito para distribuição linear de singularidades, utilizam-se as Eqs. (4.13.a,b) como fórmulas de recorrência para reduzir a ordem do sistema de $3N$ para $N+2$. Deste modo,

$$\lambda_{1j} = \frac{2}{\Delta c_j}(\lambda_{0j+1} - \lambda_{0j}) - \lambda_{1j+1}, \quad (4.16.a)$$

$$\lambda_{2j} = \frac{1}{2\Delta c_j} (\lambda_{1j+1} - \lambda_{1j}). \quad (4.16.b)$$

Substituindo as Eq. (4.16.a,b) em (4.12), obtêm-se uma equação com a seguinte forma

$$A_{i1}\lambda_{01} + A_{i2}\lambda_{02} + \dots + A_{iN-1}\lambda_{0N-1} + A_{iN}\lambda_{0N} + A_{iN+1}\lambda_{1N} + A_{iN+2}\lambda_{2N} = RHS_i, \quad (4.17)$$

onde a lei de formação dos coeficientes A_{ij} , mostrados na Tabela 4.2, é uma função dos coeficientes de influência, a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} . Para maiores detalhes sobre a lei de formação para a distribuição quadrática de fontes e dipolos ver apêndice C.

Tabela 4.2 – Lei de Formação dos Coeficientes A_{ij} para Distribuição Quadrática de Fontes e Dipolos.

Variáveis auxiliares:

$$R1(i,1) = 2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1}.$$

$$R1(i,j) = R1(i,j-1) + (-1)^{j-1} \left[\frac{c_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} + 2b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right], \quad 2 \leq j \leq N-1.$$

$$R2(i) = b_{iN} + \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+N} \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right).$$

Coeficientes A_{ij} :

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{R1(i,1)}{\Delta c_1}.$$

$$A_{ij} = a_{ij} + (-1)^j \left[\frac{R1(i,j-1)}{\Delta c_{j-1}} + \frac{R1(i,j)}{\Delta c_j} \right], \quad 2 \leq j \leq N-1.$$

$$A_{iN} = a_{iN} + (-1)^N \frac{R1(i,N-1)}{\Delta c_{N-1}}.$$

$$A_{iN+1} = R2(i).$$

$$A_{iN+2} = c_{iN}.$$

Aplicando, portanto, a Eq. (4.17) em todos os pontos de controle e adicionando as duas equações referentes ao bordo de fuga, Eqs. (4.14) e (4.15), o sistema é então dado por

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} & A_{1N+1} & A_{1N+2} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} & A_{2N+1} & A_{2N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-11} & A_{N-12} & \cdots & A_{N-1N} & A_{N-1N+1} & A_{N-1N+2} \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} & A_{NN+1} & A_{NN+2} \\ A_{N+11} & A_{N+12} & \cdots & A_{N+1N} & A_{N+1N+1} & A_{N+1N+2} \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 2\Delta c_N & \Delta c_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \vdots \\ \lambda_{0N-1} \\ \lambda_{0N} \\ \lambda_{1N} \\ \lambda_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_{N-1} \\ RHS_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

onde as demais intensidades das singularidades, λ , são prontamente determinadas pelas fórmulas de recorrência, Eq. (4.16.a,b).

4.3.2 Vórtices

Como a condição de salto para a derivada da função de distribuição quadrática de vórtices, Eq. 4.15, não apresenta significado físico, deve-se obter um outro meio de fechar o sistema de equações algébricas. Para tanto, propõe-se utilizar uma distribuição quadrática ao longo de todo o aerofólio, exceto no bordo de fuga (painéis 1 e N), onde se adota uma distribuição linear.

Deste modo, aplicando a condição de contorno de impenetrabilidade, aos N pontos de controle, obtêm-se

$$\begin{aligned} a_{i1}\gamma_{01} + b_{i1}\gamma_{11} + a_{i2}\gamma_{02} + b_{i2}\gamma_{12} + c_{i2}\gamma_{22} + \dots + a_{iN-1}\gamma_{0N-1} + b_{iN-1}\gamma_{1N-1} \\ + c_{iN-1}\gamma_{2N-1} + a_{iN}\gamma_{0N} + b_{iN}\gamma_{1N} = RHS_i, \end{aligned} \quad (4.19)$$

para $1 \leq i \leq N$. Neste ponto pode-se verificar que há N equações a $3N - 2$ incógnitas, estando portanto, o sistema indeterminado.

Devido à hipótese de continuidade da função de distribuição, assim como de sua derivada, deve-se impor o acoplamento entre os painéis j e $j+1$. Como a ordem das funções de distribuição de vórtices são diferentes nos painéis 1 e 2, obtêm-se

$$\gamma_{01} + \gamma_{11}\Delta c_1 = \gamma_{02}, \quad (4.20.a)$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{12}, \quad (4.20.b)$$

para os demais painéis j e $j+1$, onde $2 \leq j \leq N-1$, têm-se

$$\gamma_{0j} + \gamma_{1j}\Delta c_j + \gamma_{2j}\Delta c_j^2 = \gamma_{0j+1}, \quad (4.21.a)$$

$$\gamma_{1j} + 2\gamma_{2j}\Delta c_j = \gamma_{1j+1}. \quad (4.21.b)$$

Resta, portanto, aplicar a condição de Kutta no bordo de fuga do aerofólio, obtendo-se

$$\gamma_{01} + \gamma_{0N} + \gamma_{1N}\Delta c_N = 0. \quad (4.22)$$

As equações de continuidade da função de distribuição, de sua derivada e a condição de Kutta, descritas acima, fornecem $2N-1$ equações. Assim, o sistema de equações já se encontra sobredeterminado com $3N-1$ equações a $3N-2$ incógnitas, sendo resolvido através do Método dos Mínimos Quadrados.

Manipulando as Eqs. (4.20.a, b) e (4.21.a, b) de modo análogo ao realizado para a distribuição de fontes e dipolos quadráticos, e substituindo-as na Eq. (4.19), obtém-se uma equação com a seguinte forma

$$A_{i1}\lambda_{01} + A_{i2}\lambda_{02} + \dots + A_{i,N-1}\lambda_{0,N-1} + A_{iN}\lambda_{0N} + A_{i,N+1}\lambda_{1N} = RHS_i, \quad (4.23)$$

onde a lei de formação dos coeficientes A_{ij} , mostrados na Tabela 4.3, é uma função dos coeficientes de influência, a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} . Para maiores detalhes sobre a lei de formação para a distribuição quadrática de vórtices ver apêndice D.

Tabela 4.3 – Lei de Formação dos Coeficientes A_{ij} para Distribuição Quadrática de Vórtices.

Variáveis auxiliares:

$$R3(i,1) = 0,$$

$$R3(i,2) = 2b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2},$$

$$R3(i,j) = R3(i,j-1) + (-1)^j \left(\frac{c_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} + 2b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right), \text{ para } 3 \leq j \leq N-1.$$

Coeficientes A_{ij} :

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1},$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} - \frac{1}{\Delta c_2} R3(i,2),$$

$$A_{ij} = a_{ij} + (-1)^{j-1} \left[\frac{R3(i,j-1)}{\Delta c_{j-1}} + \frac{R3(i,j)}{\Delta c_j} \right], \text{ para } 3 \leq j \leq N-1.$$

$$A_{iN} = a_{iN} - \frac{1}{\Delta c_3} R3(i,N-1),$$

$$A_{iN+1} = b_{iN} + \sum_{j=2}^{N-1} (-1)^j \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right).$$

Aplicando, portanto, a Eq. (4.23) em todos os pontos de controle e adicionando a condição de Kutta, Eq. (4.22), o sistema é então dado por

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} & A_{1N+1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} & A_{2N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-11} & A_{N-12} & \cdots & A_{N-1N} & A_{N-1N+1} \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} & A_{NN+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & \Delta c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \vdots \\ \gamma_{0N-1} \\ \gamma_{0N} \\ \gamma_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_{N-1} \\ RHS_N \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

onde as demais intensidades das singularidades, γ , são prontamente determinadas pelas Eqs. (4.20) e (4.21).

4.4 Cálculo das Forças Aerodinâmicas

O cálculo dos coeficientes de influência e a solução do sistema de equações lineares foram implementados em rotinas FORTRAN e, uma vez calculadas as intensidades das singularidades, é importante determinar alguns coeficientes aerodinâmicos, tais como o coeficiente de pressão ao longo da superfície do aerofólio, C_p , e o coeficiente de sustentação, C_L , definidos por:

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2}, \quad (4.25.a)$$

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2 c}, \quad (4.25.b)$$

onde p_∞ é a pressão estática do escoamento incidente (pressão de referência), c é a corda do aerofólio, L a força de sustentação e ρ é a massa específica do fluido. Uma vez calculadas as intensidades das singularidades, é possível avaliar a velocidade tangencial ao i -ésimo painel. Com esta velocidade pode-se calcular o coeficiente de pressão através da equação de Bernoulli, que se torna

$$C_p = 1 - \frac{u_i^2 + w_i^2}{Q_\infty^2}. \quad (4.26)$$

Para calcular o coeficiente de sustentação, C_L , pode-se proceder de duas maneiras. A primeira através da integração do coeficiente de pressão ao longo do aerofólio, que fornece a seguinte expressão

$$C_L = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N C_{p_i} \Delta c_i \cos(\alpha - \beta_i). \quad (4.27)$$

E a segunda, através do teorema de Kutta-Joukowski,

$$C_L = \frac{2}{Q_\infty c} \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \text{onde} \begin{cases} \Gamma_i = \gamma_i \Delta c_i & , \text{ para vórtice} \\ \Gamma_i = \mu_i - \mu_{i+1} & , \text{ para dipolo} \end{cases} \quad (4.28)$$

sendo Γ_i a circulação média, γ_i a circulação média por unidade de comprimento e μ_i a intensidade média do dipolo, relativos ao i -ésimo painel.

Um fluxograma esquemático do método dos painéis feito neste trabalho, Fig. 4.2, segue a mesma linha de raciocínio do proposto por Katz & Plotkin (1991).

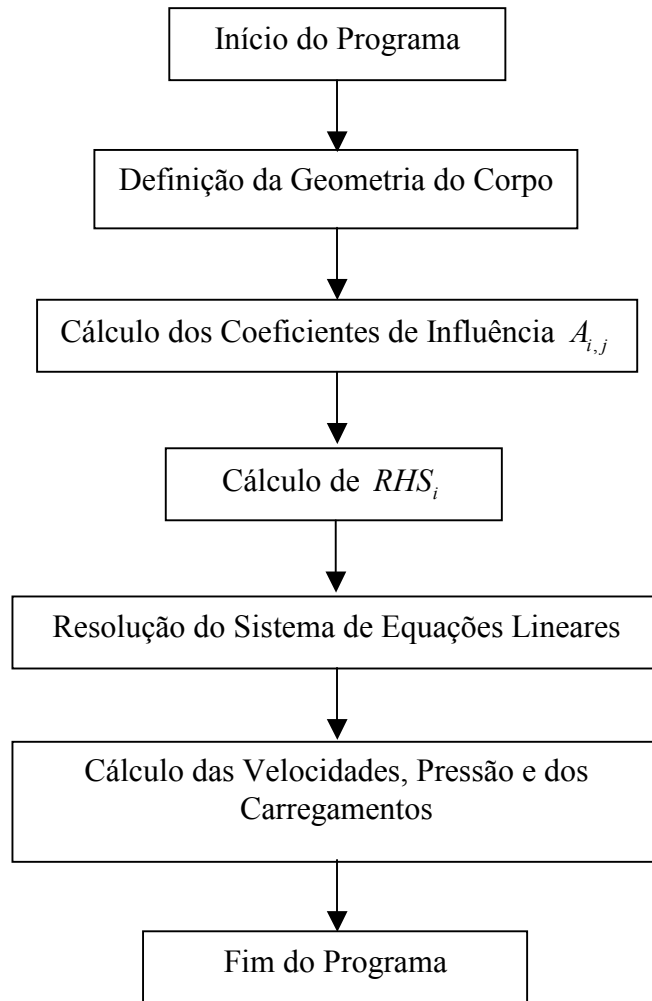


Figura 4.2 – Fluxograma mostrando a estrutura do método numérico, Katz & Plotkin, 1991.

O cálculo do potencial de velocidade e das velocidades induzidas, quando se inclui o efeito de curvatura, é realizado utilizando um procedimento de integração numérica através do método de Simpson 1/3 composta, porque o número de intervalos de integração, n , é par e maior ou igual a 4. Divide-se, inicialmente, o painel em 10000

intervalos e incrementa-se com o mesmo valor até que seja alcançado o critério de convergência adotado que é de 10^{-5} . Para maiores detalhes do método de integração, incluindo o valor do seu erro, ver Apêndice E.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

O escoamento potencial ao redor de um aerofólio é calculado com o Método dos Painéis para cada uma das distribuições de singularidades descritas no capítulo 3 e 4. Para a validação dos resultados, são feitas comparações do coeficiente de sustentação e da distribuição do coeficiente de pressão sobre o aerofólio, calculados segundo o método dos painéis, com a solução analítica para o aerofólio de Van de Vooren, escolhido exatamente por possuir solução obtida via Transformação Conforme (Katz e Plotkin, 1991). O aerofólio de Van de Vooren escolhido tem espessura de 15% e seu ângulo no bordo de fuga tem 20° . Os resultados apresentados abaixo são divididos em duas partes: a primeira para painéis retos, isto é, painéis sem curvatura; a segunda para painéis com curvatura.

5.1 Painéis sem Curvatura

O escoamento potencial ao redor do aerofólio de Van de Vooren, discretizado com painéis sem curvatura, foi calculado com o Método dos Painéis para todas as distribuições de singularidades descritas no capítulo 3, a saber: fontes, vórtices, dipolos e a combinação fontes-dipolos. Para cada tipo de singularidade, funções de distribuição constante, linear e quadrática foram estudadas.

Os resultados apresentados são para três diferentes combinações das condições de contorno locais e das condições globais de conservação de massa ou circulação. O Método Convencional é aquele em que o sistema de equações algébricas lineares é formado impondo-se apenas as condições de contorno locais (Neumann ou Dirichlet), conforme Katz e Plotkin (1991). Neste caso, o sistema não inclui uma condição de conservação global. O Método Modificado é aquele obtido ao se substituir uma equação que expressa a condição de contorno local em um único ponto de controle por uma equação de conservação global. Neste caso, o ponto de controle onde não se impõe a condição local é escolhido de modo a se evitar regiões próximas aos bordos de ataque e de fuga do aerofólio. A terceira metodologia, baseada no Método dos Mínimos Quadrados, incorpora a equação global a todas as equações de contorno locais e

considera uma solução aproximada para o novo sistema sobredeterminado formado. A solução numérica do sistema de equações algébricas lineares obtidas por qualquer um dos métodos é calculada utilizando o algoritmo de decomposição LU.

Distribuindo inicialmente apenas fontes sobre o aerofólio, a análise fica restrita a aerofólios sem sustentação, isto é, ao caso de um aerofólio simétrico, com ângulo de ataque nulo. As três diferentes funções de distribuição de singularidades foram analisadas: constante, linear e quadrática. Utilizando 30 painéis, pois as diferenças entre os métodos ficam mais evidentes com um número pequeno de painéis, pode-se observar na Fig. 5.1 resultados calculados para a variação de C_p ao longo da superfície do aerofólio. Os resultados numéricos mostrados são para uma distribuição de singularidades quadráticas. Como pode ser visto na Fig. 5.1, estes resultados estão muito próximos da solução analítica, exceto pela flutuação anômala de pressão calculada pelo Método Modificado justamente no ponto onde a condição local foi removida. Ao se incluir a conservação da massa em substituição à condição local, a primeira é automaticamente satisfeita, mas a condição local não é mais respeitada. Ao se incluir todas as condições locais juntamente com a condição global e se resolver o sistema de equações algébricas lineares sobredeterminado pelo Método dos Mínimos Quadrados, o erro existente na solução tende a ser distribuído para todas as fontes dos painéis, amenizando seu efeito local. Os resultados para fonte constante e linear não são mostrados nesta figura porque as curvas de C_p coincidem visualmente com as curvas de C_p da fonte quadrática. Estes resultados dão uma indicação do erro local de cada método de solução e indicam que, mesmo para um pequeno número de painéis, a função de distribuição constante produz resultados muito próximos aos obtidos pelas funções de ordem linear e quadrática, exceto no painel onde se observa a flutuação anômala de pressão calculada segundo o método modificado.

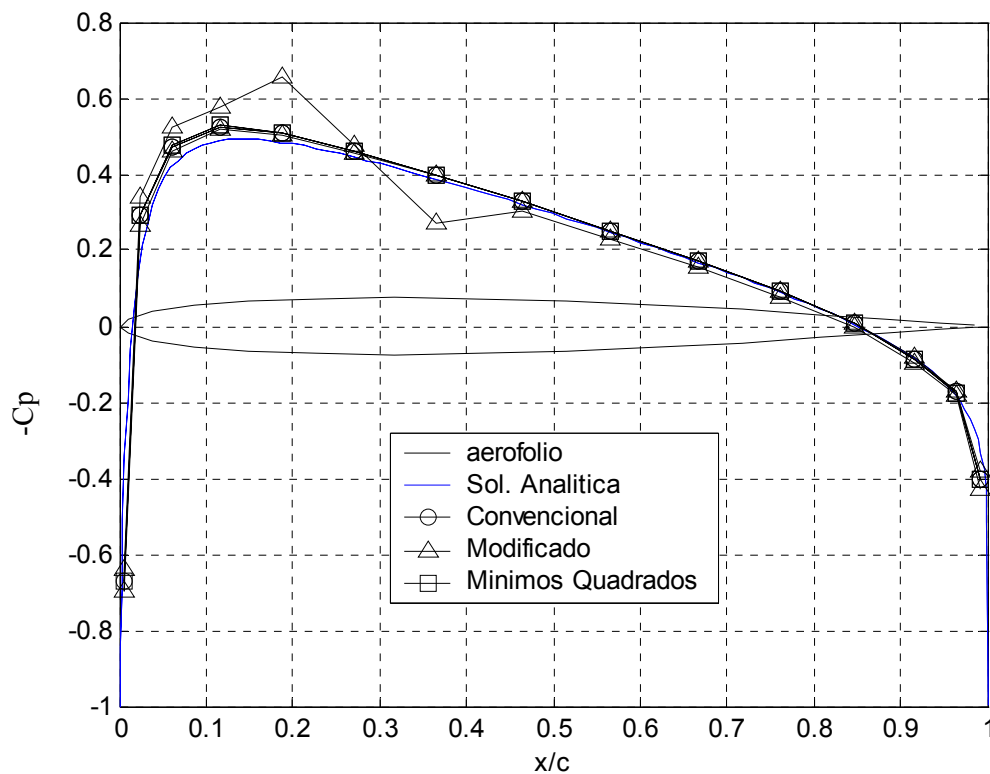


Figura 5.1 - Variação de C_p ao longo da superfície do aerofólio para: fontes quadráticas; $N = 30$, $\alpha = 0^\circ$.

A Tabela 5.1 mostra como o valor do somatório da massa total de fluido que cruza a superfície do aerofólio emitida pelas fontes dos painéis varia com o número de painéis, para cada função de distribuição e método de solução estudado. A massa total de fluido que cruza a superfície do aerofólio deve ser nula para que a superfície do aerofólio seja uma linha de corrente. Quando o Método Modificado é utilizado, o valor deste somatório de massa total é nulo porque esta é uma condição imposta explicitamente na solução. O valor deste somatório, quando diferente de zero, fornece uma indicação do erro global da solução. Como os resultados da Tabela 5.1 mostram, o valor do somatório de massa total cai rapidamente quando o número de painéis aumenta, chegando à terceira casa decimal com $N = 100$ e à quarta casa decimal com $N = 300$. Além disso, é interessante também observar que a função de distribuição não afeta o erro global do método de solução, como corroborado pelos gráficos do coeficiente de pressão da Fig. 5.1. Em outras palavras, os resultados obtidos com a função de distribuição constante fornecem resultados essencialmente equivalentes aos obtidos pelas funções de distribuição de ordem superior, para o mesmo método de

solução. Finalmente, é possível ainda inferir da Tabela 5.1 que o erro global obtido pelo Método Convencional e pelo Método dos Mínimos Quadrados são muito próximos entre si, indicando que podem ser utilizados indistintamente, dependendo da aplicação ou da modelagem completa que se deseja utilizar para a solução de um problema específico.

Pode-se, então, concluir que os Métodos Convencional e dos Mínimos Quadrados produzem soluções muito próximas entre si, com erros locais e globais muito pequenos, enquanto que o Método Modificado não é o mais adequado devido ao erro local que surge no coeficiente de pressão do painel onde a condição local não é imposta. Os resultados adicionalmente indicam que as distribuições linear e quadrática fornecem resultados muito próximos da distribuição constante, independentemente do método de solução usado. Estes resultados permitem inferir que a solução com melhor custo-benefício, do ponto de vista numérico, para um escoamento simétrico ao redor de um aerofólio simétrico sujeito a um ângulo de ataque nulo, é aquela com distribuição de fontes constantes obtida ou pelo Método Convencional ou pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Tabela 5.1 - Somatório da massa total das fontes distribuídas sobre os painéis em função do método de solução e do número de painéis.

Singularidade	Distribuição	Método	$N = 20$	$N = 60$	$N = 100$	$N = 300$
Fonte (C.C.Neumann)	Constante	Convencional	0,0107	0,0035	0,0021	0,0007
		Modificado	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		Mínimos Quadrados	0,0085	0,0033	0,0020	0,0007
	Linear	Convencional	0,0118	0,0036	0,0021	0,0007
		Modificado	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		Mínimos Quadrados	0,0095	0,0033	0,0020	0,0007
	Quadrática	Convencional	0,0152	0,0040	0,0023	0,0007
		Modificado	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		Mínimos Quadrados	0,0122	0,0037	0,0022	0,0007

Para escoamentos com ângulo de ataque não-nulo em torno de aerofólios simétricos ou assimétricos, que geram forças de sustentação não nulas, devem ser

utilizados elementos de singularidade capazes de reproduzir assimetrias nos campos de velocidade e pressão do escoamento. Tais elementos são dipolos e vórtices.

Para a análise de um escoamento assimétrico, utiliza-se novamente o aerofólio de Van de Vooren com 15% de espessura e 20° de ângulo no bordo de fuga, que é simétrico, mas com ângulo de ataque diferente de zero. Visando acentuar as variações de pressão, principalmente nos bordos de ataque e de fuga, emprega-se um ângulo de ataque de 10° para as simulações numéricas discutidas a seguir. Para cada simulação, são utilizadas novamente as três funções de distribuição de singularidade: constante, linear e quadrática.

A Tabela 5.2 apresenta o erro global do coeficiente de sustentação, definido como a diferença entre o valor obtido numericamente e o valor analítico exato para o aerofólio escolhido com $\alpha = 10^\circ$. Estes erros são expressos em termos da função de distribuição de singularidade, do número de painéis e do tipo de singularidade, ao qual encontra-se associada a condição de contorno (Neumann ou Dirichlet) utilizada na implementação numérica. Dessa Tabela, as seguintes inferências podem-se ser feitas:

- a) os erros de todos os modelos de distribuição de singularidade estudados diminuem quando o número de painéis aumenta, como esperado;
- b) fixado o número de painéis, a função de distribuição constante apresenta erros da mesma ordem de grandeza para todos os tipos de singularidade analisados; em outras palavras, qualquer tipo de singularidade produz os mesmos resultados;
- c) em geral, a função de distribuição constante apresenta erros maiores do que as funções linear e quadrática, exceto para pequenos valores de N , como ilustrado pelos casos com $N = 20$; valores pequenos como este, entretanto, não são utilizados em geral para simulações com alto grau de exatidão numérica;
- d) fixado o número de painéis, as distribuições linear e quadrática também produzem erros de mesma ordem de grandeza para todos os tipos de singularidade escolhidos, exceto para pequenos valores de N , como ilustrado pelos casos com $N = 20$, casos em que a distribuição de vórtices apresenta melhores resultados que as demais; desta análise pode-se afirmar que o modelo com distribuição de vórtices, linear ou quadrático, gera resultados com menores erros para qualquer valor de N , grande ou pequeno;
- e) o modelo combinado de fonte e dipolo não é melhor que o de vórtices e de dipolos, e pode ser descartado;

- f) o modelo de dipolo quadrático apresenta erros muito próximos aos obtidos com o modelo de vórtices lineares;
- g) o modelo de vórtices quadráticos apresenta erros próximos ao modelo de vórtices lineares;
- h) o modelo proposto por Lewis apresenta soluções bastante precisas mesmo para um número reduzido de painéis, $N=20$, fato que deve ser considerado visto a simplicidade de sua implementação, chegando a valores próximos aos dados pelos métodos de vórtice linear e dipolo quadrático;
- i) com base nas observações acima, é possível concluir que o modelo de vórtices, com função de distribuição linear ou quadrática e o modelo de dipolo com função de distribuição quadrática, apresentam menores erros globais para qualquer valor de N .

O método de Lewis é um código que utiliza a hipótese de campo próximo, ou seja, a velocidade induzida por um painel distante do ponto de controle em análise pode ser considerada como sendo produzido por um vórtice concentrado (pontual), enquanto que para velocidades induzidas pelo próprio painel (*self-induced*) é utilizada uma distribuição de vórtices constantes. Este método considera ainda a curvatura entre painéis adjacentes através de considerações geométricas e utiliza um procedimento (*Back Diagonal Correction*) para tornar a matriz do sistema de equações em diagonal dominante, através de uma consideração física de circulação nula no interior do aerofólio, sendo esta a grande responsável pela precisão do método.

Tabela 5.2 - Erro no coeficiente de sustentação em termos do elemento de singularidade, da função de distribuição e do número de painéis. Van de Vooren 15%; $\alpha = 10^\circ$.

C.C.	Singularidade	Distribuição	$N=20$	$N=60$	$N=100$	$N=300$
Neumann	Vórtice	Linear	-0.84%	-0.10%	-0.04%	0.00%
		Quadrático	-0.61%	-0.09%	-0.03%	0.00%
Dirichlet	Vórtice	Constante	-10.27%	-1.93%	-1.06%	-0.28%
		Lewis	-1.65%	-0.21%	-0.08%	-0.01%
	Fonte e Dipolo	Constantes	-6.91%	-2.35%	-1.40%	-0.47%
		Lineares	-11.48%	0.05%	0.09%	0.01%
		Quadráticos	-2.70%	-0.84%	-0.51%	-0.19%
	Dipolo	Constante	-4.12%	-1.34%	-0.91%	-0.61%
		Linear	-11.48%	0.05%	0.09%	0.01%
		Quadrático	-0.83%	-0.09%	-0.03%	0.00%

À medida que a função de distribuição tem o grau do seu polinômio aumentado, a ordem do método tende a aumentar e, conseqüentemente, o erro numérico do método tende a diminuir, como discutido acima, exceto nos casos em que o número de painéis é muito pequeno. O aumento do número de painéis também faz com que o erro diminua. Deve-se mencionar que a possibilidade de utilização de outra condição de contorno que não a indicada na Tabela 5.2 para cada tipo de singularidade escolhida foi estudada, mas o modelo não apresenta solução numérica convergida, seja para parâmetros locais, como o coeficiente de pressão, seja para parâmetros globais, como o coeficiente de sustentação.

Diferentes métodos de solução para os diversos modelos de singularidade estudados também podem ser utilizados. O método dos painéis com distribuição de vórtices constantes, formulado com condição de contorno de Dirichlet, é análogo ao modelo de fontes com função de distribuição constante, onde a imposição da condição de conservação da massa torna o sistema de equações algébricas lineares sobredeterminado. No modelo de vórtices faz-se necessário introduzir uma equação adicional de conservação de circulação para representar fisicamente o mecanismo de geração de força de sustentação. Para escoamentos em regime permanente esta condição se traduz na conhecida Condição de Kutta, que é uma condição local porque envolve apenas as intensidades dos vórtices dos painéis adjacentes ao bordo de fuga. A adição de uma equação que expresse a condição de Kutta ao sistema de equações algébricas lineares que representa a imposição da condição de contorno torna o sistema sobredeterminado, analogamente à solução para fontes. É importante ressaltar que a imposição da condição de Kutta é necessária para que a solução capte o mecanismo de geração de sustentação que ocorre no escoamento real, ao contrário da equação da massa para o modelo de fontes, a qual é automaticamente satisfeita para N grande, mesmo que não seja imposta explicitamente.

De maneira semelhante, mas não igual, ao modelo de fontes, novamente é possível obter a solução para o sistema de equações algébricas lineares de três maneiras diferentes. O aqui denominado Método Convencional é aquele em que o sistema de equações é reduzido a um sistema determinado substituindo-se uma condição de contorno em algum painel previamente escolhido, longe dos bordos de ataque e de fuga, pela condição de Kutta (KATZ & PLOTKIN, 1991). A substituição de uma condição de contorno em algum painel por uma condição global de conservação de circulação dá

origem ao aqui denominado Método Modificado. Neste método, o somatório de toda a circulação ao redor do aerofólio deve ser especificado para o tipo de aerofólio e ângulo de ataque escolhidos. Embora a especificação da circulação total ao redor do aerofólio não faça sentido do ponto de vista de cálculo do escoamento potencial porque a circulação é uma incógnita, essa metodologia pode ser aplicada em conjunto com o Método de Vórtices para a solução do escoamento viscoso e não-permanente ao redor do mesmo aerofólio (SILVA, 2005). Esta é a razão para a análise do desempenho do Método Modificado. Alternativamente, o sistema de equações sobredeterminado formado pela imposição da condição de contorno local em todos os N pontos de controle juntamente com a condição de conservação de circulação, na forma da condição de Kutta ou na sua forma global, pode ser resolvido pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Os desempenhos dos três métodos de solução podem ser comparados na Fig. 5.2, que apresenta em forma gráfica os erros percentuais no cálculo do coeficiente de sustentação para uma distribuição de vórtices constantes e lineares, para $\alpha = 10^\circ$. Conforme pode ser visto na figura, as soluções obtidas para a distribuição de vórtices constantes pelo Método Modificado e pelo Método dos Mínimos Quadrados não são melhores que a solução obtida pelo Método Convencional, mas também não são muito diferentes. Este resultado sugere que o Método Convencional apresenta-se como a melhor opção para o cálculo de escoamento potencial ao redor de um aerofólio, enquanto que os Métodos Modificado e dos Mínimos Quadrados podem ser usados como parte do algoritmo do Método de Vórtices porque seus erros não são muito diferentes dos erros obtidos com o Método Convencional. Para os métodos de vórtice linear e quadrático as metodologias discutidas acima não são aplicáveis, pois a condição de Kutta é adicionada ao sistema sem que haja remoção de nenhuma equação que expressa a condição de contorno, e o sistema torna-se, então, determinado para a distribuição linear. Como o aumento da ordem da distribuição requer mais equações para possibilitar o fechamento do sistema, a distribuição quadrática demanda, além da condição de conservação de circulação, uma equação adicional de compatibilização das funções de distribuição nos nós dos painéis.

Pode-se ainda inferir três resultados do gráfico da Fig. 5.2. Em primeiro lugar, conforme esperado intuitivamente e mostrado na Tabela 5.2, a solução se aproxima do valor analítico com o aumento do número de painéis. Em outras palavras, o erro diminui à medida que N aumenta (ou $1/N$ diminui no gráfico da Fig. 5.2). A Fig. 5.2 ilustra esta

convergência tendo como base os três métodos de solução para a distribuição de vórtices constantes e a solução por vórtices lineares. Em segundo lugar, fica evidente nesta figura que a solução com vórtices lineares apresenta erros até duas ordens de grandeza menores que as soluções para vórtices constantes. Em terceiro lugar, pode-se observar que a solução com vórtices lineares converge muito mais rapidamente para solução analítica, fato caracterizado pela inclinação mais íngreme de sua curva de erro. Este resultado já era esperado por ser o método de vórtices lineares um método de ordem superior ao de vórtices constantes. Pelo fato de a curva de erro possuir inclinação 1:2, o método de vórtices lineares é dito ser de segunda ordem, enquanto que o método de vórtices constantes possui inclinação 1:1 e é, portanto, de primeira ordem (MORAN, 1984).

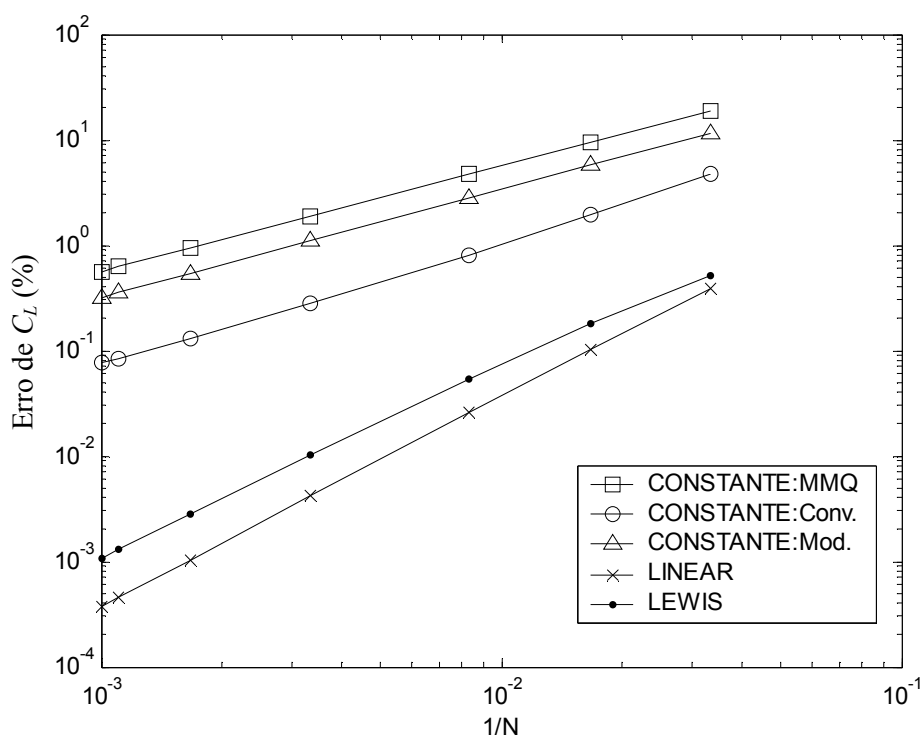


Figura 5.2 – Comparação entre o erro do coeficiente de sustentação (C_L) para vórtice constante e linear; $\alpha = 10^\circ$.

O método do dipolo, com ou sem fonte, é implementado utilizando a condição de contorno de Dirichlet. Esta condição é imposta no interior do corpo e é equivalente à imposição da condição de contorno de Neumann na região exterior. A Fig. 5.3 apresenta um gráfico do erro percentual do coeficiente de sustentação calculados com as distribuições de vórtices linear e quadrático e de dipolo quadrático para o aerofólio de Van de Vooren 15% com ângulo de ataque de 10° . Como pode ser visto na figura, o

método do dipolo quadrático (sem fonte) apresenta erros quase iguais ao método de vórtices lineares, o que já era previsto uma vez que uma distribuição de dipolos de ordem M é equivalente a uma distribuição de vórtices de ordem $M-1$ (KATZ & PLOTKIN, 1991). Esta equivalência não ocorre para o método combinado de dipolos e fontes.

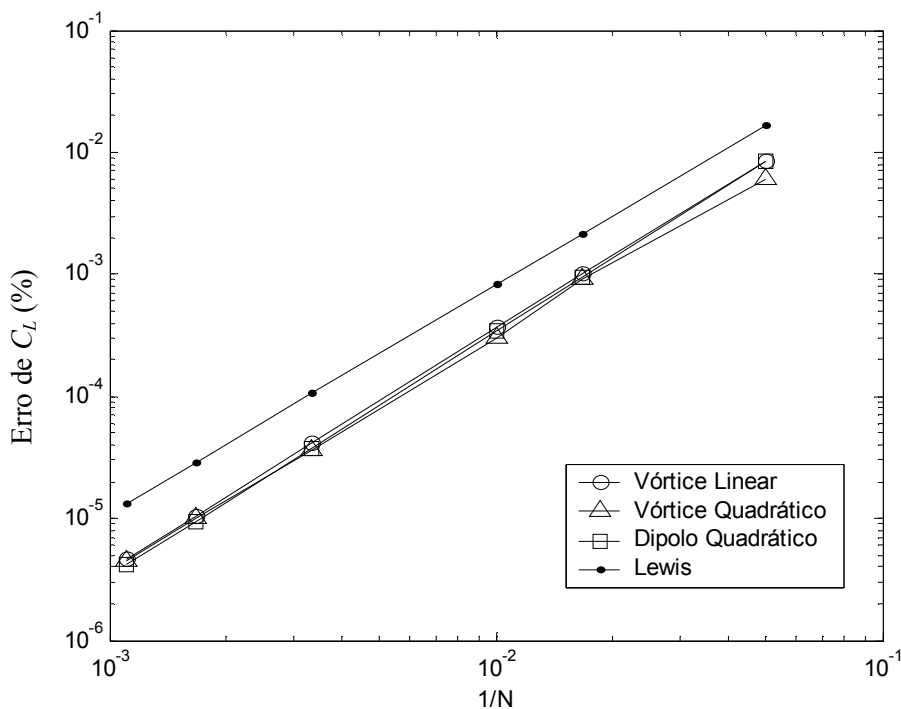


Figura 5.3 – Erro (%) do coeficiente de sustentação (C_L) para o aerofólio de Van de Vooren 15% com ângulo de ataque (α) de 10°.

Visando avaliar os erros locais, a Fig. 5.4 mostra uma comparação entre a solução analítica e os resultados calculados pelos métodos com distribuição de vórtices e dipolos, ambos lineares, para a distribuição do coeficiente de pressão sobre a superfície do aerofólio. Os resultados foram obtidos utilizando novamente 30 painéis para acentuar as diferenças entre os métodos. Pode-se notar a que a solução utilizando dipolos lineares com condição de contorno de Dirichlet tende a capturar mais corretamente o pico de sucção no bordo de ataque do aerofólio, embora nas demais regiões a solução para vórtices lineares com condição de contorno de Neumann seja mais próxima da solução analítica.

Para o método dos vórtices quadráticos impõe-se a condição de contorno de Neumann, o que leva a erros globais no coeficiente de sustentação semelhantes aos erros do método dos vórtices linear (Tabela 5.2). A Fig. 5.5.a compara a distribuição de

coeficientes de pressão ao longo do aerofólio para os métodos dos vórtices lineares e quadráticos, demonstrando que ambos os métodos são bastante precisos. Deve-se ressaltar a melhor captura pelo método do vórtice quadrático do pico de sucção na região próxima ao bordo de ataque do aerofólio.

A Fig. 5.5.b mostra a distribuição do coeficiente de pressão sobre o aerofólio obtido com os métodos de vórtice linear e dipolo quadrático. Os resultados permitem inferir que ambos os métodos apresentam resultados muito próximos entre si também para a variação local de uma grandeza física de interesse. A avaliação dos erros globais desses dois métodos, mostrada na Fig. 5.3, já tinha permitido inferir que os métodos de vórtice linear e dipolo quadrático são essencialmente equivalentes, pois produzem erros globais muito próximos entre si. Em comparação com a solução analítica, também é possível verificar que ambos os métodos calculam com grande exatidão as variações locais de C_p , mesmo com apenas 30 painéis, exceto no bordo de ataque. O refinamento da discretização do aerofólio corrige esse problema.

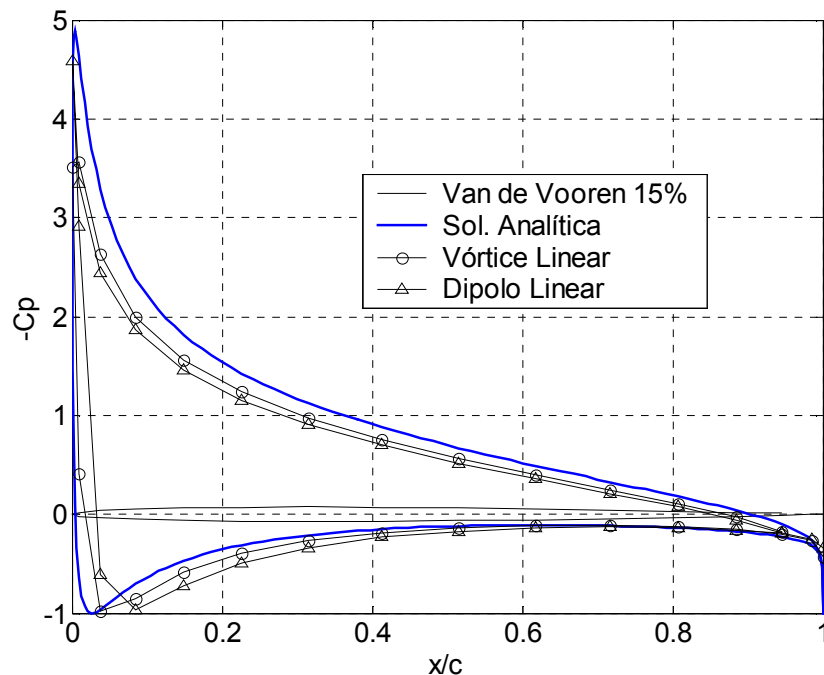


Figura 5.4 – Comparação entre os coeficientes de pressão (C_p) para vórtice e dipolo linear. $N = 30$, $\alpha = 10^\circ$.

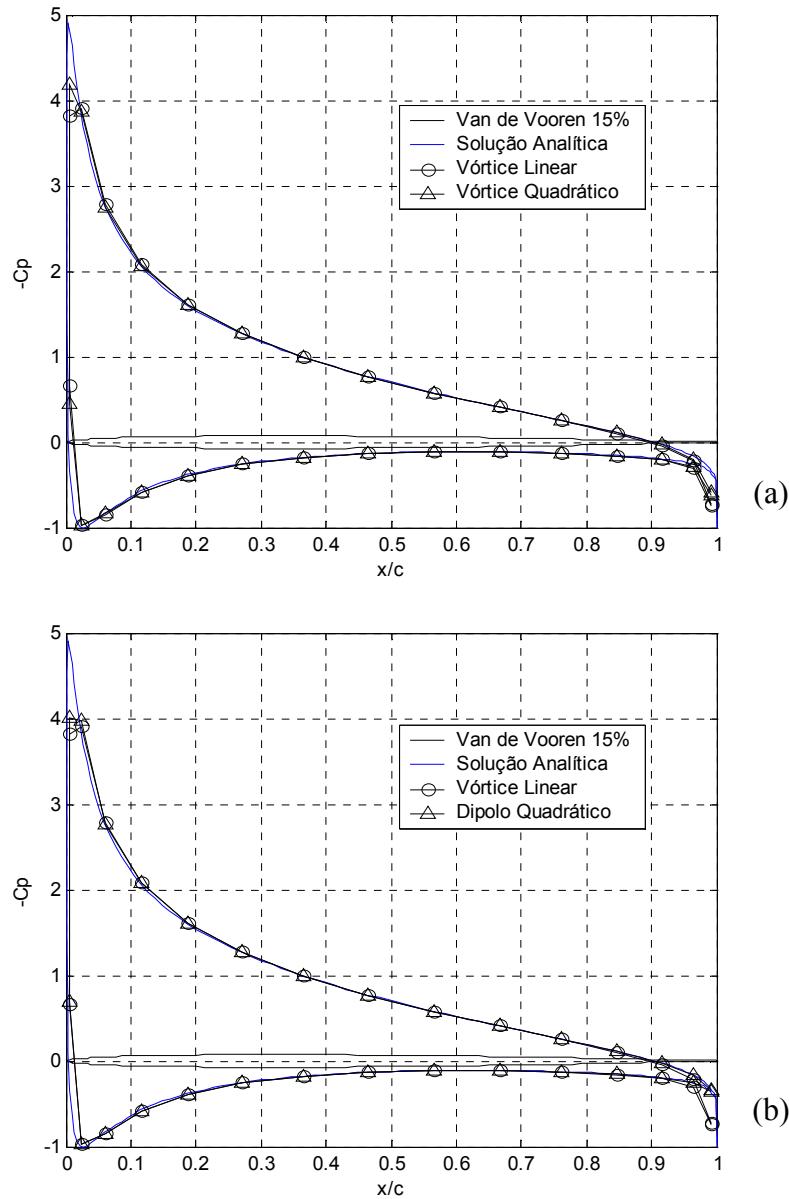


Figura 5.5 - Coeficiente de pressão ao longo do aerofólio para $N = 30$ e $\alpha = 10^\circ$.
 (a) vórtices lineares e quadráticos. (b) vórtices lineares e dipolos quadráticos.

O tempo de processamento, ou tempo de CPU (*CPU time*), é um dado importante ao se comparar o desempenho de cada método analisado. É sabido que os métodos que utilizam a condição de contorno de Dirichlet apresentam um tempo de processamento inferior aos que fazem uso da condição de contorno de Neumann (KATZ & PLOTKIN, 1991). Este comportamento pode ser observado tanto numericamente na Tabela 5.3, quanto graficamente nas Fig 5.6 e 5.7, medidos em um computador Pentium

III 1.1 MHz. Com base nesses resultados obtidos, pode-se concluir que o método do dipolo quadrático apresenta a vantagem de ser mais rápido e com exatidão semelhante ao do vórtice linear. Deve-se, entretanto, evitar o uso da condição de Dirichlet para descrever escoamentos sobre corpos com painéis muito próximos entre si ou mesmo regiões onde a espessura seja muito fina. O tempo de CPU para escoamentos bidimensionais como os estudados neste trabalho não é um fator limitador para a simulação numérica de escoamentos potenciais ao redor de corpos, mas torna-se mais expressivo para escoamentos tridimensionais sobre corpos rombudos e esbeltos.

Tabela 5.3 – Tempo de processamento (s) para diversos tipos e distribuições de singularidades.

Métodos				Número de Painéis (N)				
				20	100	300	600	900
Condição de Contorno	Neumann	Fonte	Constante	0.0	0.1	0.5	2.2	5.4
			Linear	0.0	0.1	0.8	3.5	9.3
			Quadrática	0.0	0.1	0.9	3.9	9.4
		Vórtice	Linear	0.0	0.1	0.8	3.4	9.2
			Quadrático	0.0	0.1	0.9	3.9	9.4
			Constante	0.0	0.0	0.5	2.2	5.4
	Dirichlet	Vórtice	Lewis	0.0	0.0	0.1	0.5	1.3
			Constante	0.0	0.0	0.4	1.9	4.7
		Fonte e Dipolo	Linear	0.0	0.1	0.5	2.3	5.7
			Quadrático	0.0	0.1	0.6	2.6	6.9
		Dipolo	Constante	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			Linear	0.0	0.0	0.3	1.4	3.6
			Quadrático	0.0	0.0	0.4	1.8	4.9

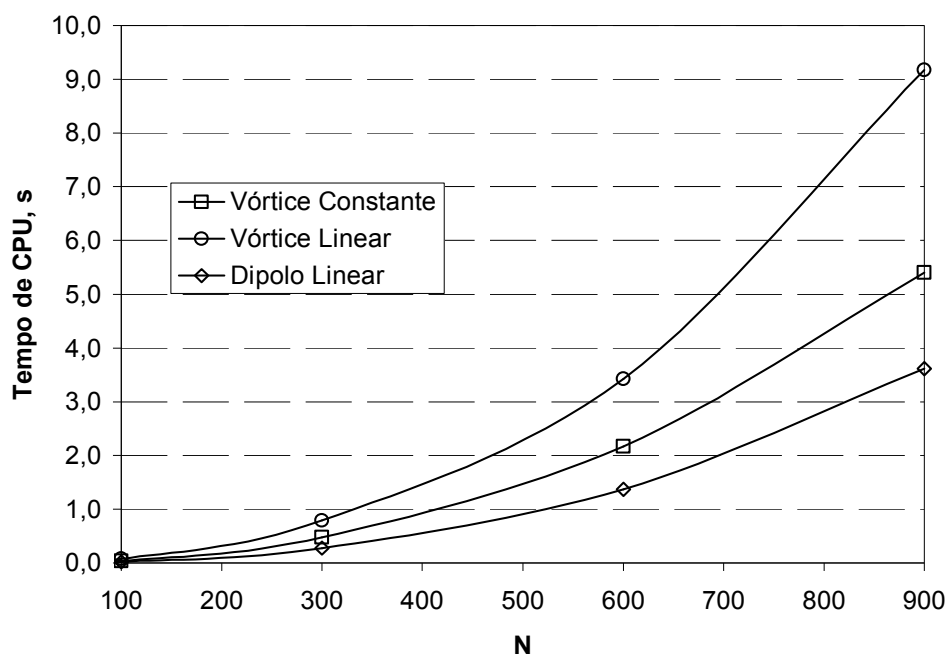


Figura 5.6 – Comparação entre o tempo de processamento (s) para os métodos de baixa ordem.

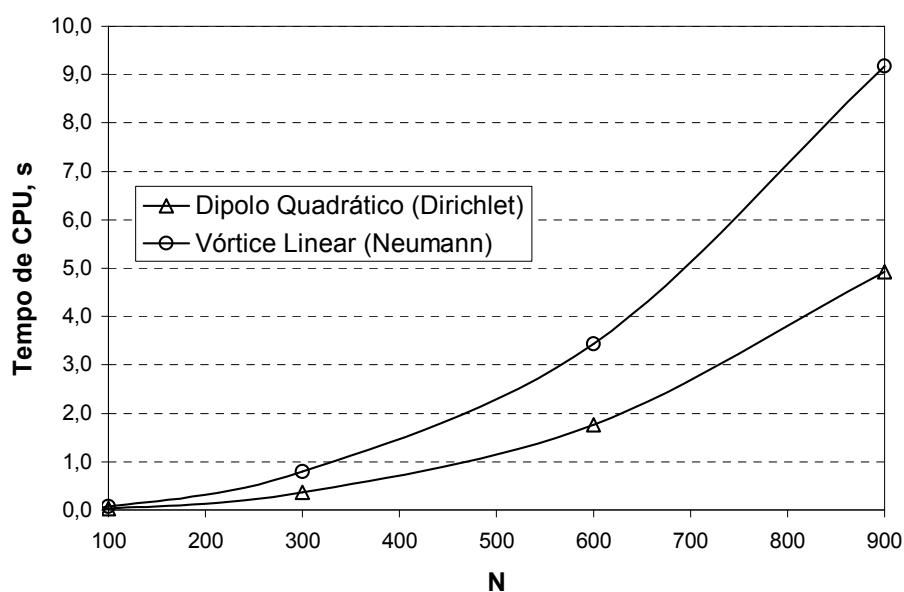


Figura 5.7 - Comparação do tempo de processamento do método dos painéis utilizando dipolos quadráticos (c.c. Dirichlet) e vórtices lineares (c.c. Neumann).

A Fig. 5.8 mostra a distribuição de dipolos quadráticos com condição de contorno de Dirichlet para $N = 120$ e $\alpha = 10^\circ$, na qual se verifica a boa concordância do método no bordo de ataque e na região crítica próxima ao bordo de fuga, em destaque. Pode-se concluir, finalmente, que o método de painéis com distribuição de vórtices lineares e o método de painéis com distribuição de dipolos quadráticos são os que

apresentaram melhor desempenho do ponto de vista da exatidão do método, simplicidade e ainda com baixo tempo de CPU. Em outras palavras, são os métodos com melhor custo-benefício.

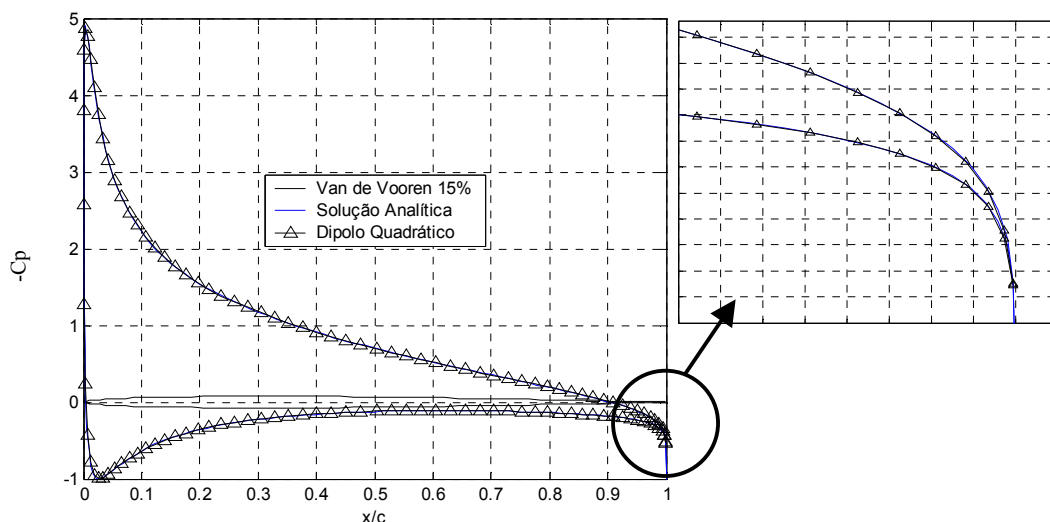


Figura 5.8 - Coeficiente de pressão para dipolos quadráticos com destaque para o bordo de fuga, c.c. de Dirichlet , $N = 120$ e $\alpha = 10^\circ$.

5.2 Painéis com Curvatura

A inclusão da curvatura dos painéis no método dos painéis tem como objetivo aumentar a precisão do método em relação ao método de painéis retos para um mesmo número de painéis, ou utilizar um número menor de painéis para uma mesma precisão.

O polinômio cúbico utilizado para descrever a curvatura dos painéis na discretização do aerofólio pode ser visto na Fig. 5.9. No estudo realizado, manteve-se o aerofólio de Van de Vooren com 15% de espessura, mas reduziu-se para 18 o número de painéis que representam o aerofólio visando proporcionar para uma melhor avaliação dos resultados obtidos. Os pontos de controle, que eram calculados como a média dos pontos das quinas no painel sem curvatura, foram transladados na direção normal ao painel original sem curvatura, a fim de permanecerem sobre o mesmo. As direções normais e tangenciais calculadas sobre o painel também são corrigidas de modo a acomodar a existência de curvatura no painel.

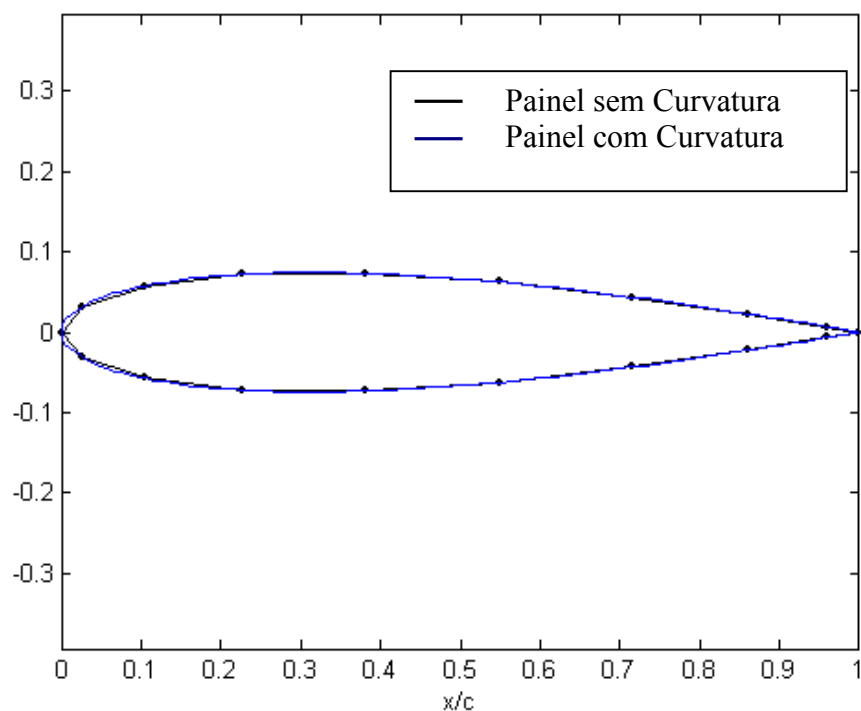


Figura 5.9 - Representação da função cúbica que inclui a curvatura.

A análise é novamente iniciada com as distribuições de singularidades que geram um campo de escoamento simétrico, ou seja, as fontes e/ou sumidouros. A Fig. 5.10 mostra uma comparação entre os métodos que utilizam fontes constantes com e sem curvatura. Os resultados para fonte linear e quadrática são omitidos, pois resultaram em curvas praticamente idênticas às curvas obtidas para fonte constante, fato que pode ser verificado através da Tabela 5.4, que mostra como o valor do somatório de massa total emitida pelas fontes na superfície do corpo varia com o número de painéis.

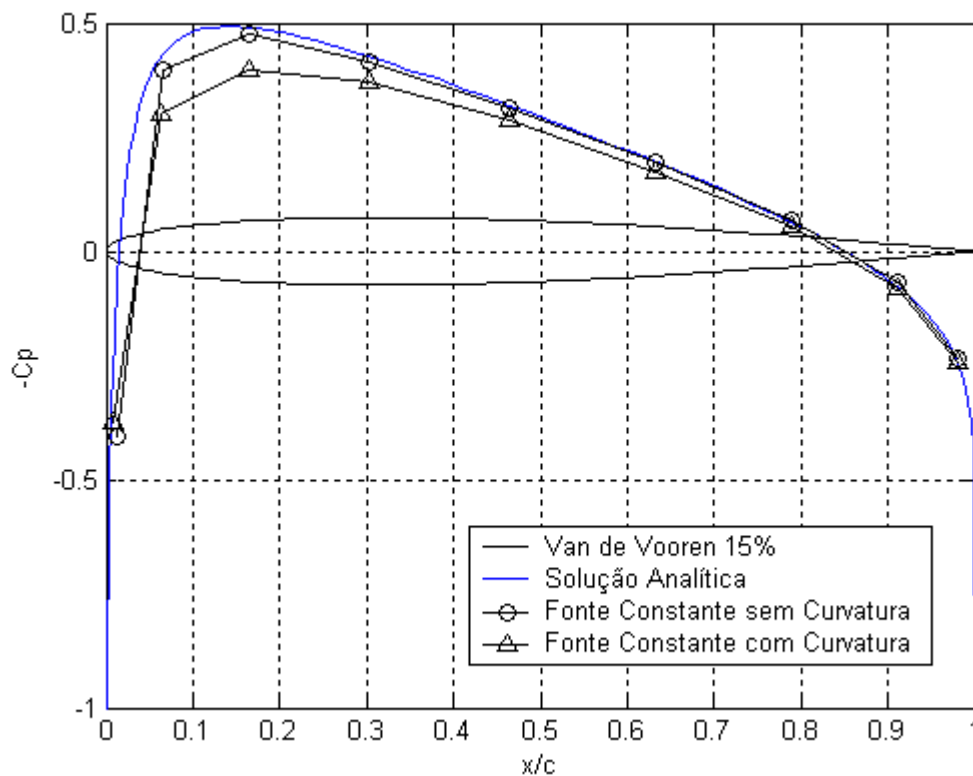


Figura 5.10 - Comparação entre os coeficientes de pressão para fonte constante com e sem a curvatura do painel. $N = 18$, $\alpha = 0^\circ$.

Tabela 5.4 - Análise do somatório das fontes, com e sem inclusão da curvatura dos painéis.

Singularidade	Distribuição	Método		$N = 12$	$N = 18$	$N = 30$	$N = 60$	$N = 120$
Fonte (C.C. de Neumann)	Constante	Convencional	s/curv	0.0160	0.0117	0.0072	0.0035	0.0018
			c/curv	-0.0568	-0.0208	-0.0057	-0.0002	0.0009
	Linear	Convencional	s/curv	0.0202	0.0130	0.0075	0.0036	0.0018
			c/curv	-0.0574	-0.0208	-0.0057	-0.0002	0.0009
	Quadrática	Convencional	s/curv	0.0262	0.0172	0.0092	0.0040	0.0019
			c/curv	-0.0503	-0.0168	-0.0042	0.0001	0.0010

Como a Fig. 5.10 e a Tabela 5.4 indicam, a inclusão da curvatura dos painéis no método dos painéis que utiliza uma distribuição de fontes constantes, com solução calculada pelo método de solução convencional, acarretou uma redução de uma ordem de grandeza nos valores da massa total de fluido que cruza a superfície do aerofólio para valores de N da ordem de 10^2 , como pode ser visto no resultado para $N = 60$ da Tabela 5.4. Por outro lado, a inclusão da curvatura dos painéis não redundou na obtenção de melhor precisão em relação aos resultados com painéis retos para valores de N da ordem

de grandeza de 10, como pode ser visto nos resultados para $N = 12, 18$ e 30 . Este comportamento dos erros globais do método é corroborado pelos erros locais apresentados na Fig. 5.10 para a distribuição de C_p no aerofólio com $N = 18$. Deste modo, pode-se dizer que o método dos painéis com distribuição de fontes (constantes) sobre painéis sem curvatura é o preferido quando poucos painéis são utilizados para discretizar o corpo, independentemente da função de distribuição de singularidade empregada, pois é o mais simples de ser implementado e apresenta resultados muito semelhantes ao de ordem superior. Por outro lado, para este exemplo, quando o número de painéis é da ordem de 10^2 ou maior, a inclusão da curvatura dos painéis produz erros globais no mínimo uma ordem de grandeza menores. Neste caso, painéis com curvatura são a melhor opção. É interessante notar também que o aumento da ordem do método, através do aumento do grau do polinômio usado para a função de distribuição, não diminui os erros globais do método, ao contrário do esperado intuitivamente.

Analogamente, os métodos que utilizam vórtices com funções de distribuição de singularidade constante, linear e quadrática, com e sem curvatura nos painéis, são comparados graficamente nas Figs. 5.11, 5.12 e 5.13 e numericamente na Tabela 5.5. As Figs. 5.11, 5.12 e 5.13 apresentam uma comparação entre os coeficientes de pressão sobre o aerofólio obtidos da solução analítica e das soluções numéricas, com e sem a curvatura nos painéis, para vórtices constantes, lineares e quadráticos, respectivamente, com $N = 18$, $\alpha = 10^\circ$. A Tabela 5.5 lista os erros obtidos entre os coeficientes de sustentação calculados por integração de C_p para os diferentes métodos dos painéis, com e sem curvatura, em relação ao valor exato obtido da solução analítica para o aerofólio de Van de Vooren com 15% de espessura e $\alpha = 10^\circ$. Nesta tabela, o erro no coeficiente de sustentação é apresentado em função do tipo de singularidade, da função de distribuição e do número de painéis. Com base nesses resultados, pode-se verificar que:

- a) a Tabela 5.5 mostra que o método de painéis com curvatura apresenta, em geral, um erro menor do que o método de painéis sem curvatura, e este erro diminui com o aumento do número de painéis, embora os erros continuem dentro da mesma ordem de grandeza;
- b) o método de painéis com curvatura e com função de distribuição de vórtices constantes sobre o aerofólio não apresenta uma melhora significativa em relação ao equivalente sem curvatura, seja em termos de erros locais (Fig. 5.11), seja em termos de erros globais (Tabela 5.5), mesmo quando N aumenta;

- c) o método de painéis com curvatura e com função de distribuição de vórtices lineares sobre o aerofólio apresenta uma melhora significativa em relação ao equivalente sem curvatura em termos de erros locais (Fig. 5.12) e globais (Tabela 5.5), embora os erros globais com e sem curvatura continuem da mesma ordem de grandeza, mesmo quando N aumenta;
- d) o método de painéis com vórtices lineares e painéis com curvatura tende a capturar mais corretamente os gradientes de velocidade e de pressão no bordo de ataque do aerofólio (Fig. 5.12), mas produz um resultado similar ao método sem curvatura para o restante do aerofólio, uma vez que o efeito da curvatura é muito mais pronunciado na região em torno do bordo do ataque do que nas demais regiões (Fig. 5.9).
- e) a adição de curvatura ao método de painéis com função de distribuição de vórtices quadrática (Fig. 5.13) apresenta uma melhora significativa em relação ao equivalente sem curvatura em termos de globais (Tabela 5.5), o mesmo não ocorrendo para os erros locais (Fig. 5.13). Os erros globais para os métodos com e sem curvatura se mantêm com a mesma ordem de grandeza, mesmo quando N aumenta;
- f) a adição de curvatura ao método de painéis com distribuição de dipolos constantes, lineares e quadráticos causa erros globais menores do que no método com painéis retos, embora as diferenças sejam pequenas mesmo quando N aumenta.

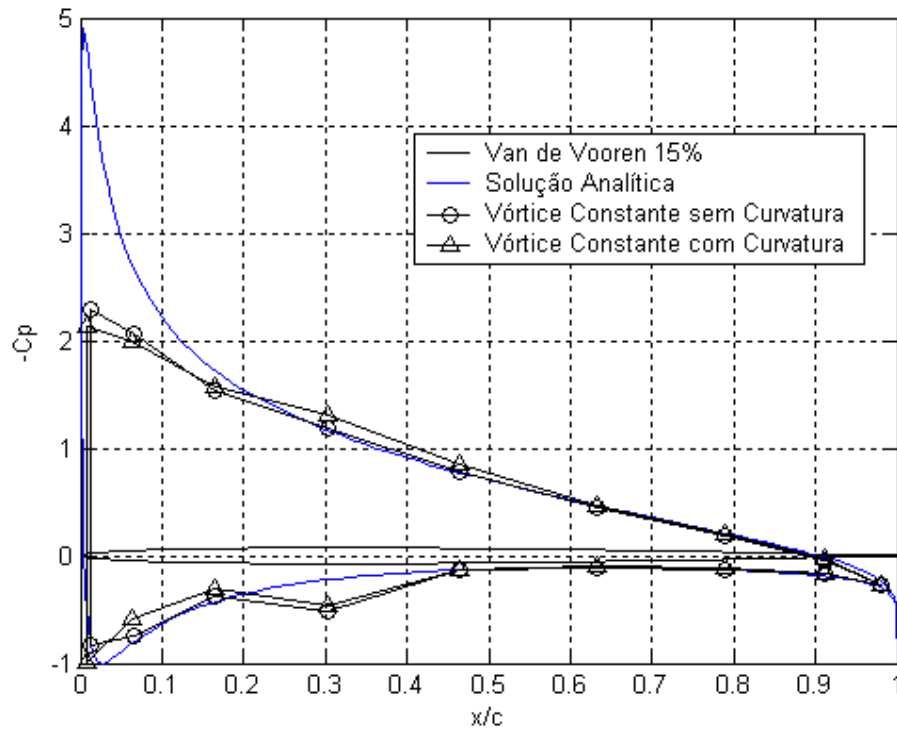


Figura 5.11 - Comparação entre os coeficientes de pressão para vórtice constante com e sem a curvatura do painel. $N = 18$, $\alpha = 10^\circ$.

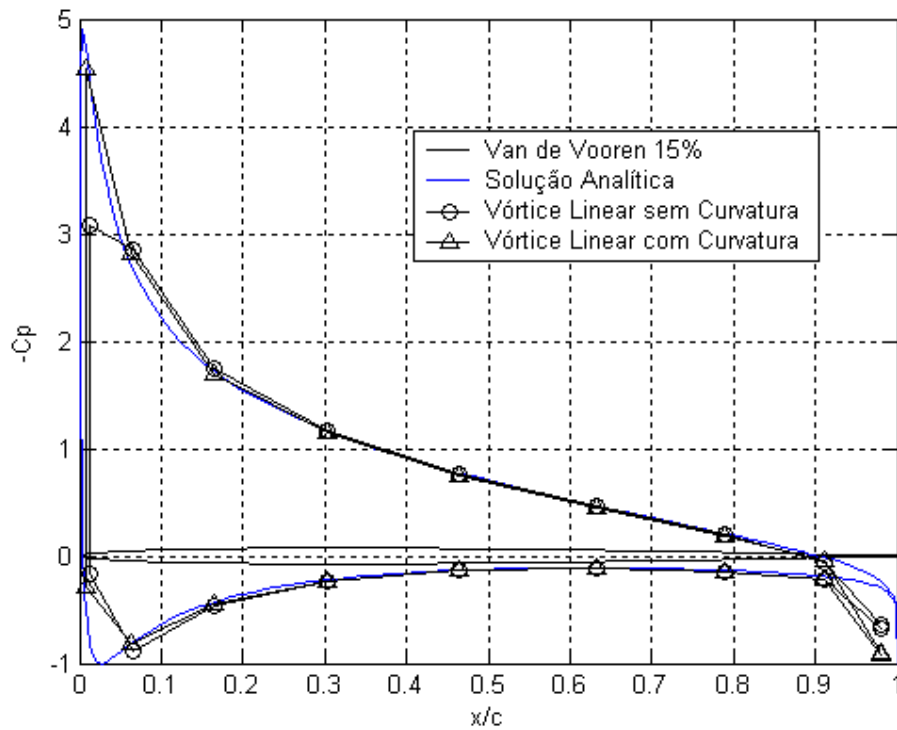


Figura 5.12 - Comparação entre os coeficientes de pressão para vórtice linear com e sem a curvatura do painel. $N = 18$, $\alpha = 10^\circ$.

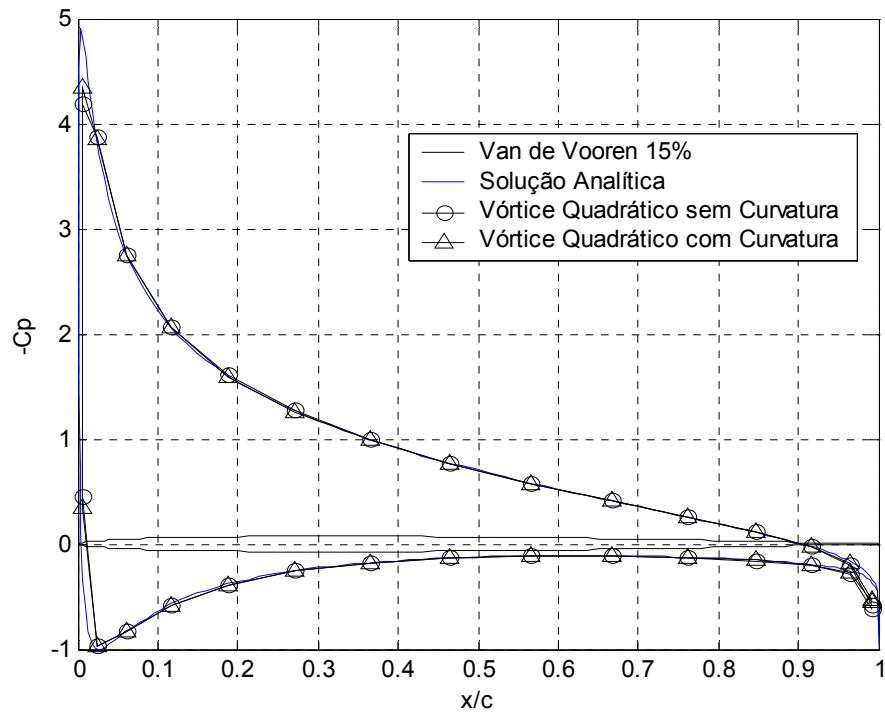


Figura 5.13 - Comparação entre os coeficientes de pressão para vórtice quadrático com e sem a curvatura do painel. $N = 18$, $\alpha = 10^\circ$.

Tabela 5.5 - Erro no coeficiente de sustentação em função do elemento de singularidade, da distribuição e do número de painéis, com e sem curvatura. Van de Vooren 15%, $\alpha = 10^\circ$.

C.C.	Singularidade	Distribuição	N = 12	N = 18	N = 30	N = 60	N = 120
Neumann	Vórtice	Linear	s/curv.	-7,98%	-3,20%	-1,02%	-0,24%
			c/curv.	-3,06%	-1,14%	-0,44%	-0,13%
		Quadrática	s/curv.	-5,54%	-2,32%	-0,81%	-0,21%
			c/curv.	-2,15%	-0,84%	-0,35%	-0,11%
Dirichlet	Vórtice	Constante	s/curv.	-16,16%	-10,14%	-5,55 %	-2,43%
			c/curv.	-18,65%	-9,99%	-5,02%	-1,99%
	Dipolo	Constante	s/curv.	-22,61%	-10,67%	-6,03%	-2,58%
			c/curv.	-16,96%	-7,11%	-4,02%	-1,72%
		Linear	s/curv.	-40,59%	7,70%	-0,10%	-1,86%
			c/curv.	-20,3%	3,85%	-0,05%	-0,93%
		Quadrático	s/curv.	-5,94%	-2,33%	-0,72%	-0,17%
			c/curv.	-3,96%	-1,55%	-0,48%	-0,11%

A Fig. 5.14 mostra um gráfico do comportamento do erro percentual no coeficiente de sustentação do aerofólio de Van de Vooren com 15% de espessura e $\alpha = 10^\circ$ em função do inverso do número de painéis ($1/N$) para os métodos do vórtice constante, linear e quadrático com e sem curvatura. Como já mencionado, os erros para os métodos de painéis com vórtices constantes com e sem curvatura são muito próximos entre si, enquanto que a adição de curvatura ao método de painéis com vórtices lineares ou quadráticos reduz o erro global sobre o coeficiente de sustentação, mas não altera a inclinação da curva de erro. O método do vórtice linear apresenta uma inclinação mais íngreme do que o método do vórtice constante, o que caracteriza sua ordem superior. O método do vórtice constante é dito ser de primeira ordem por apresentar inclinação 1:1 na Fig. 5.14, enquanto que o método do vórtice linear é dito ser de segunda ordem por apresentar inclinação 1:2 na mesma figura.

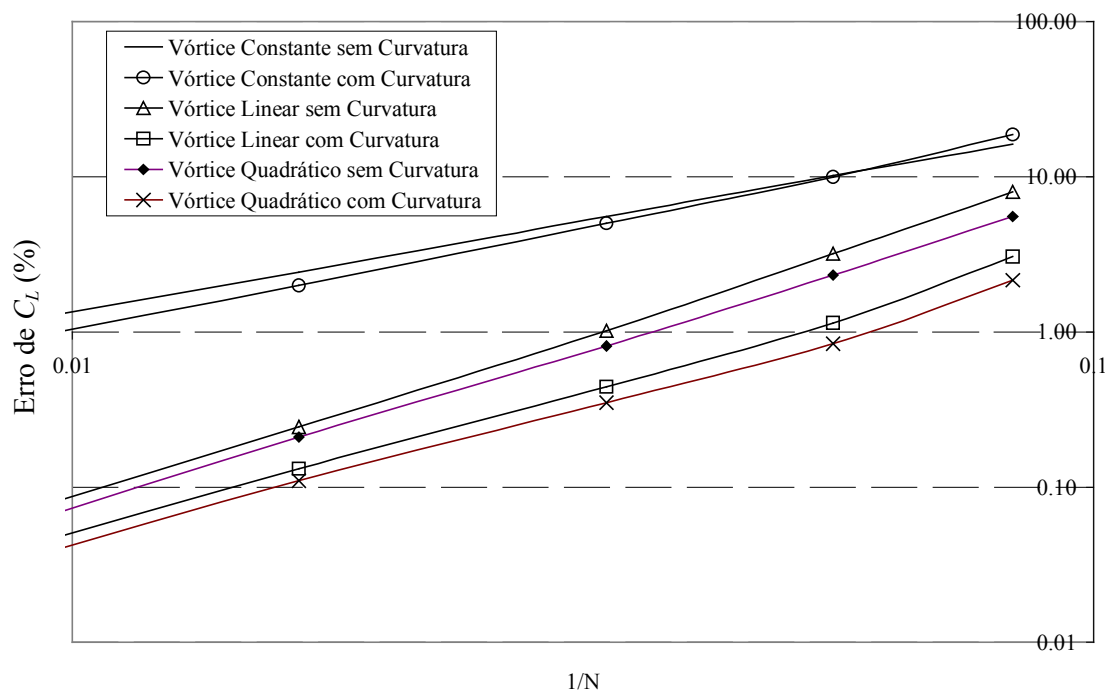


Figura 5.14 – Erro (%) no coeficiente de sustentação do aerofólio de Van de Vooren 15% com $\alpha = 10^\circ$ para os métodos de vórtices constantes, lineares e quadráticos, com e sem curvatura.

O método de painéis com distribuição de dipolos quadráticos (sem fonte) e com curvatura apresenta erros no coeficiente de sustentação que são muito próximos aos erros do método de painéis com distribuição de vórtices lineares, como pode ser visto na Tabela 5.5. Este resultado é semelhante ao caso sem curvatura porque uma distribuição de dipolos de ordem M é equivalente a uma distribuição de vórtices de ordem $M - 1$ (KATZ & PLOTKIN, 1991). A Fig. 5.15 corrobora este resultado mostrando graficamente, através da distribuição do coeficiente de pressão sobre o aerofólio, a semelhança entre os resultados calculados pelo método dos dipolos quadráticos e pelo método dos vórtices lineares. Do estudo aqui realizado, pode-se concluir que estes são dois dos melhores métodos analisados.

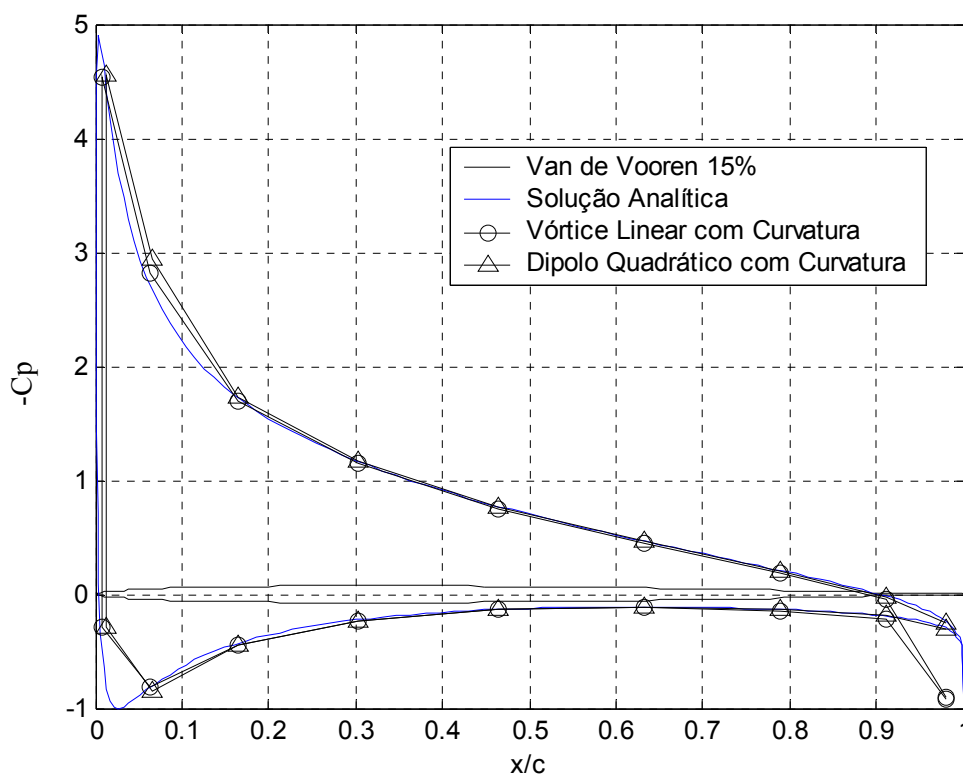


Figura 5.15- Comparação entre os coeficientes de pressão para vórtice linear e dipolo quadrático com curvatura. $N = 18$, $\alpha = 10^\circ$.

A Fig. 5.15 ilustra a distribuição linear de vórtices com condição de contorno de Neumann e com inclusão da curvatura nos painéis, para o aerofólio de Van de Vooren com $N = 120$ e $\alpha = 10^\circ$, na qual se verifica a boa concordância do método na região crítica próxima ao bordo de fuga.

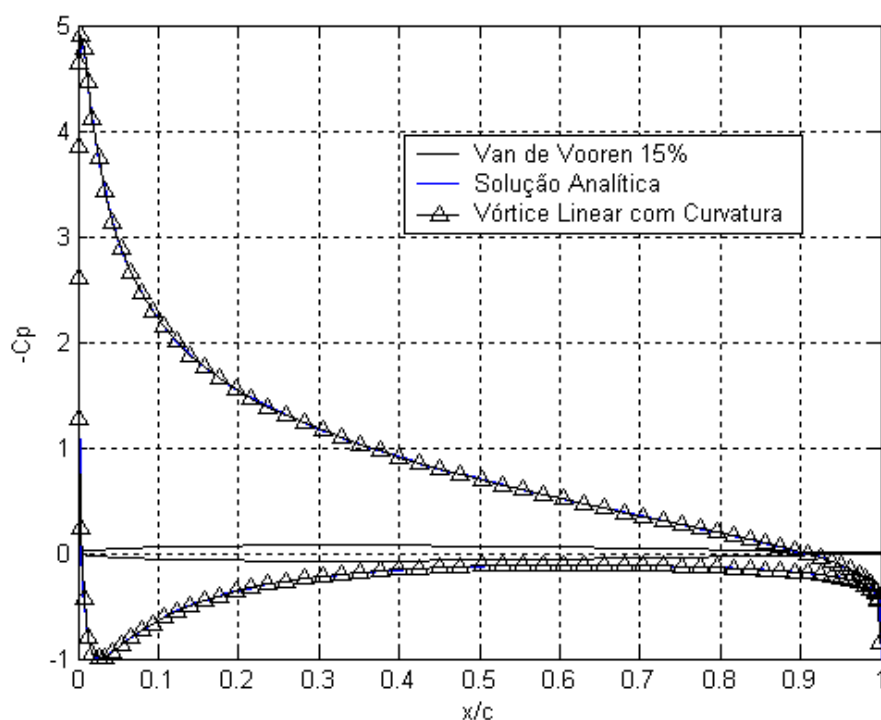


Figura 5.16 - Coeficiente de pressão para vórtices lineares com curvatura, condição de contorno de Neumann , $N = 120$ e $\alpha = 10^\circ$.

O tempo de processamento, ou tempo de CPU, foi desconsiderado nos casos dos métodos de painéis com curvatura porque a integração numérica utilizando o critério de convergência adotado leva a um tempo bastante mais elevado que nos casos sem curvatura. Por exemplo, para uma discretização do aerofólio de Van de Vooren 15% utilizando 30 painéis, o método do vórtice linear sem curvatura apresentou um tempo de processamento de 0,0 segundos ao passo que ao incluir a curvatura o tempo necessário foi de 421,5 segundos. Entretanto, a tendência é que os métodos de Dirichlet tenham um tempo de processamento inferior aos de Neumann, pois requer um número de operações numéricas menor.

Capítulo 6

Conclusões

Ao analisar os resultados é possível destacar alguns aspectos com respeito ao método dos painéis.

Para aerofólios simétricos e com ângulo de ataque nulo, ou seja, escoamento simétrico ao longo do perfil, apesar de ser perfeitamente possível também a utilização de vórtices e dipolos, opta-se pela utilização de fontes sujeita à condição de contorno de Neumann.

O método utilizando fontes constantes é explorado de diversas maneiras, do convencional ao método dos mínimos quadrados no qual se opta pela inclusão de uma equação de conservação global que é a de conservação de massa, implementado através do somatório das fontes. Os resultados não acarretaram numa melhoria significativa do método, conforme é visto na Fig. 5.1 e na Tabela 5.1.

Com a evolução do método se propôs, portanto, o aumento da ordem da distribuição das fontes, passando então a tratar de métodos ditos de ordem superior, fonte linear e quadrática. Essas técnicas, entretanto, continuam a não apresentar grandes diferenças de resultados para os do método de fonte constante. Portanto, restava a inclusão da curvatura do painel na técnica, o que é feito utilizando uma função polinomial de terceiro grau, assegurando que haja diferenciabilidade nos nós do painel, o que novamente não implicou, para fontes, em melhoria do método, Fig. 5.10 e Tabela 5.4.

Dentre as singularidades que são capazes de gerar escoamentos assimétricos, destacam-se os métodos que utilizam distribuição de vórtices ou dipolos, enquanto este é sujeito a condição de contorno de Dirichlet e aquele, em geral, a condição de contorno de Neumann. Para o método dos vórtices constantes é necessário trocar a condição de contorno de Neumann para Dirichlet, pois ao se aplicar a primeira obtêm-se uma matriz de coeficientes de influência cuja diagonal principal é nula.

No método do vórtice constante, analogamente ao que foi feito com a fonte constante para a conservação da massa, introduz-se uma equação adicional para representar fisicamente a sustentação, condição de Kutta; entretanto, para aplicá-la é necessário retirar uma equação local ou então fazer uso do método dos mínimos

quadrados. O método dito convencional é o da troca da equação local pela condição de Kutta, enquanto o dito modificado troca-se pelo somatório da circulação prescrito ao longo do aerofólio, o que é análogo à condição de Kutta. Essas nuances, entretanto, não apresentam melhorias com relação ao método convencional, conforme pode ser visto na Fig. 5.2. O método apresenta resultados satisfatórios, Tabela 5.2, entretanto, os erros são ainda elevados para um número reduzido de painéis.

Opta-se, novamente, pelo aumento da ordem da função de distribuição de singularidades, passando a vórtices lineares e quadráticos. O método do vórtice linear apresenta resultados bem melhores do que o apresentado pelo vórtice constante para um mesmo número de painéis, o mesmo ocorrendo de maneira menos significativa para o vórtice quadrático em relação ao linear, Tabela 5.2.

A inclusão da curvatura acarreta numa sensível melhora dos métodos de vórtice linear e quadrático, ao passo que o mesmo não se verifica de forma tão pronunciada para o método de vórtice constante.

Os métodos dos dipolos sujeitos à condição de contorno de Dirichlet apresentam uma propriedade bastante interessante que é o tempo de processamento reduzido, Tabela 5.3 e Fig. 5.6 e 5.7, isto se deve principalmente ao menor número de operações numéricas necessárias. Vale ressaltar que no método dos vórtices constante, a condição de contorno de Dirichlet não foi imposta através do potencial de velocidade e sim da velocidade tangencial, o que eleva o tempo de processamento.

Inicia-se novamente com o método dos dipolos constantes, passando ao linear e finalmente ao quadrático, havendo uma melhora significativa ao se elevar à ordem, conforme pode ser verificado na Tabela 5.2. Além disso, o método do dipolo quadrático apresenta erros no coeficiente de sustentação semelhantes aos do vórtice linear, Fig. 5.5.b, o que já era previsto, uma vez que para uma distribuição de dipolos de ordem M é equivalente ao de vórtices de ordem $M-1$, enquanto que o método de dipolos ($c/$ fontes), o mesmo não ocorreu. Aqui, novamente a inclusão da curvatura propiciou uma melhora do método, Tabela 5.5 e Fig. 5.15.

Deste modo, em linhas gerais, o método dos painéis apresenta as seguintes características:

- a) Os erros de todos os modelos de distribuição de singularidades estudados diminuem quando o número de painéis aumenta;
- b) Para o método que utiliza somente fontes, o aumento da ordem da função de distribuição de singularidade e a inclusão da curvatura não acarretam em

melhorias significativas em relação ao método de fontes constantes sem curvatura, Tabela 5.4;

- c) Para o método utilizando vórtices ou dipolos, em geral, o aumento da ordem da função de distribuição de singularidades e a inclusão da curvatura levam a menores erros, Tabela 5.5;
- d) Dentre os métodos analisados que geram sustentação, verifica-se que os métodos de vórtices lineares e de dipolos quadráticos apresentam os melhores custo-benefício. O aumento da ordem da função de distribuição de vórtices de linear para quadrática não leva a uma melhora significativa, Fig. 5.3;
- e) A grande vantagem do método de painéis utilizando à condição de contorno de Dirichlet, dipolos, é o tempo de processamento reduzido, apesar de necessitar de uma ordem a mais na função de distribuição de singularidades do que os que utilizam vórtices sujeito à condição de contorno de Neumann, Tabela 5.3.

A partir da análise efetuada neste trabalho, propõe-se algumas sugestões para trabalhos futuros, tais como:

- a) Realizar um estudo mais detalhado dos métodos aqui desenvolvidos para um aerofólio com bordo de fuga afilado (Joukowski, por exemplo);
- b) Aplicar um método de integração numérica menos oneroso para painéis curvos, tal como quadratura gaussiana;
- c) Explorar outras medidas de erros globais e locais, tais como o erro médio quadrático do coeficiente de arrasto e a norma do erro local, respectivamente;
- d) Aplicar os métodos de painéis a aerofólios multi-elementos e a geometrias tridimensionais, tais como asas.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, I. H. & VON DOENHOFF, A., 1959, *Theory of wing sections*, Dover Publications, New York.

ANDERSON, J. D., 1991, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, 2nd edition.

BATCHELOR, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.

BELLAMY-KNIGHTS, P.G., BENSON, M.G., GERRARD, J.H., GLADWELL, I., 1988, “*Convergence properties of panel methods*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 76, pp. 171-178.

Benson, M.G., 1987, “*Flow past bluff bodies*”, Ph.D. Thesis, University of Manchester, 1987.

BERTIN, J. J. & SMITH, M. L., 1998, *Aerodynamics for Engineers*, Prentice Hall, 3rd edition.

BLEVINS, R. D., 1984, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold, Co.

BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C., 1984, “*Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

HESS, J. L. & SMITH, A. M. O., 1966, “*Calculation of Potencial Flow About Arbitrary Bodies*”, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 3, Pergamon Press, New York, 138p.

Hess, J.L., 1973, “*Higher order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem*”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2, pp. 1-15.

HESS, J. L., 1990, “*Panel Methods in Computational Fluid Dynamics*,” Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 22, pp. 255-274.

HOERNER, S. F. & BORST, H. V., 1985, *Fluid-Dynamic Lift: Practical Information on Aerodynamic and Hydrodynamic Lift*, Hoerner Fluid Dynamics.

KARAMCHETTI, K., 1980, *Principles of Ideal-Fluid Dynamics*, R. E. Krieger Publishing Co.

KATZ, J. & PLOTKIN, A., 2001, *Low - Speed Aerodynamics*, 2nd edition, Cambridge University Press.

KELLOGG, O. D., *Foundation of Potencial Theory*, Dover, 1953.

KREYSZIG, E., 1999, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition, J. Wiley.

KUNDU, P. K. & COHEN, M. C., 2002, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Academic Press, San Diego.

LEWIS, R. I., 1991, *Vortex Element Method for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge, Cambridge University Press.

MANWELL, J.F., MCGOWAN J.G., ROGERS, A.L., 2001, “*Wind Energy Explained, Theory, Design and Application*”, John Wiley & Sons, West Sussex – England.

MARGASON, R.J., KJELGAARD, S.O., SELLERS, W.L., MORIIS, C.E.K., JR., WALKLEY, K.B., SHIELDS, E.W., 1985, “*Subsonic Panel Methods – A Comparison of Several Production Codes*” AIAA, Paper 85-0280.

MARTENSEN, E., 1959, “The Calculation of the Pressure Distribution on a Cascade of thick Airfoils by means of Fredholm Integral Equations of the Second Kind”, Aerodynamics Experimental Station, Göttingen.

MILNE-THOMSON, L. M., 1955, *Theoretical Hydrodynamics*, MacMillan & Co, NY.

MILNE-THOMSON, L. M., 1958, *Theoretical Aerodynamics*, Dover Publications, NY.

MORAN, J., 1984, *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*, John Wiley & Sons, New York.

PEREIRA, L. H. G. & BODSTEIN, G. C. R., 2004, “*Método dos Painéis com Distribuições de Singularidade Quadráticas Aplicados a Escoamentos Bidimensionais sobre Aerofólios*”, ENCIT – 10 Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PEREIRA, L. H. G., CARVALHO SILVA, D. F. & BODSTEIN, G. C. R., 2004, “*Estudo Numérico do Escoamento Potencial em Torno de um Aerofólio Utilizando o Método dos Painéis*”, ENCIT – 10 Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PRABHU RAMACHANDRAN, RAJAN, S. C., RAMAKRISHNA, M., 2003, “*A fast, two-dimensional panel method*”, SIAM J. SCI. COMPUT., Vol. 24, No. 6, pp. 1864–1878.

ROSENHEAD, L., 1963, *Laminar Boundary Layers*, Dover Publications, New York.

SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K., 2000, *Boundary Layer Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

SILVA, D. F. C., PEREIRA, L. H. G., BODSTEIN, G. C. R., 2004, *Aerodynamic Modeling of the Blade Geometry of Horizontal Axis Wind Turbines Using a Panel Method*", World Wind Energy Conference, Pequim, China.

THWAITES, B., 1960, *Incompressible Aerodynamics*, Dover Publications, NY.

VAN DE VOORAN, A.I., 1980, "*A numerical investigation of the rolling up of vortex sheets*", Proc. Roy. Soc. London A373, pp. 67-91.

VAN DYKE, M., 1975, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford.

Apêndice A

Cálculo dos Coeficientes de Influência

A.1 Condição de Contorno de Dirichlet

O coeficiente de influência é calculado como sendo a perturbação no potencial de velocidade no painel i produzido por uma distribuição de singularidade de intensidade unitária pelo painel j . Para uma função de distribuição de singularidades dada por $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$, obtêm-se

$$a_{i,j} = \phi_c \left(\lambda_0 = 1, xp_i, zp_i, x_j, z_j, x_{j+1}, z_{j+1} \right), \quad (\text{A.1.a})$$

$$b_{i,j} = \phi_l \left(\lambda_1 = 1, xp_i, zp_i, x_j, z_j, x_{j+1}, z_{j+1} \right), \quad (\text{A.1.b})$$

$$c_{i,j} = \phi_q \left(\lambda_2 = 1, xp_i, zp_i, x_j, z_j, x_{j+1}, z_{j+1} \right), \quad (\text{A.1.c})$$

onde:

$a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ são os coeficientes de influência referente as parcelas constantes, linear e quadrática, respectivamente, da função de distribuição de singularidades;

ϕ_c , ϕ_l , ϕ_q são os potenciais de velocidade associados as parcelas constante, linear e quadrática, respectivamente, da função de distribuição de singularidades;

λ_0 , λ_1 , λ_2 são as parcelas constante, linear e quadrática, respectivamente, da função de distribuição de singularidades;

xp , zp são as coordenadas do ponto de controle no sistema de coordenada local;

x , z são as coordenadas dos nós no sistema de coordenada local.

A.2 Condição de Contorno de Neumann

O coeficiente de influência a_{ij} são calculados como sendo a componente de velocidade normal induzida no painel i , produzida por uma distribuição de singularidade de intensidade unitária no painel j .

$$a_{i,j} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_c \left(\lambda_0 = 1, xp_i, zp_i, x_j, z_j, x_{j+1}, z_{j+1} \right), \quad (\text{A.2.a})$$

$$b_{i,j} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_l \left(\lambda_1 = 1, xp_i, zp_i, x_j, z_j, x_{j+1}, z_{j+1} \right), \quad (\text{A.2.b})$$

$$c_{i,j} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_q^i \left(\lambda_2 = 1, xp_i, zp_i, x_j, z_j, x_{j+1}, z_{j+1} \right), \quad (\text{A.2.c})$$

onde:

$\mathbf{u}_c$, $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_q$ são as parcelas constante, linear e quadrática, respectivamente, da velocidade induzida no painel i pelo painel j ;

$\mathbf{n}_i$ é a normal exterior do i -ésimo painel.

Apêndice B

Lei de Formação para Distribuição Linear de Singularidades dos Coeficientes $A_{i,j}$

Para uma distribuição linear de vórtices, por exemplo, dada por $\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x$ e um aerofólio discretizado com apenas 4 painéis, conforme Fig. B.1, deseja-se determinar uma lei de formação dos coeficientes $A_{i,j}$.

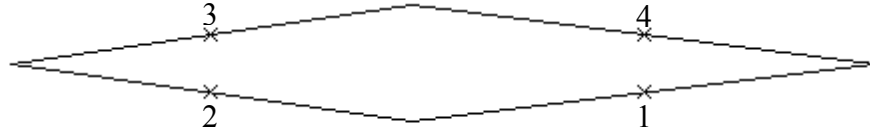


Figura B.1 – Aerofólio discretizado com apenas 4 painéis, ressaltando seus pontos de controle.

Aplicando a condição de impenetrabilidade, Eq. (4.6), aos 4 pontos de controle, obtêm-se

$$a_{i1}\lambda_{01} + b_{i1}\lambda_{11} + a_{i2}\lambda_{02} + b_{i2}\lambda_{12} + a_{i3}\lambda_{03} + b_{i3}\lambda_{13} + a_{i4}\lambda_{04} + b_{i4}\lambda_{14} = RHS_i, \quad (B.1)$$

para $1 \leq i \leq 4$.

Neste ponto pode-se verificar que há 4 equações e 8 incógnitas, estando portanto, o sistema indeterminado. A continuidade da função de distribuição de vórtices, Eq. (4.9), permite incorporar mais 3 equações ao sistema que é dado por

$$\gamma_{1j} = \frac{1}{\Delta c_j} (\gamma_{0j+1} - \gamma_{0j}), \quad \text{para } 1 \leq j \leq 3, \quad (B.2)$$

onde Δc_j é o comprimento do painel j .

Substituindo a Eq. (B.2) em (B.1) e manipulando algebricamente, obtêm-se

$$\left(a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1}\right)\gamma_{01} + \left(a_{i2} + \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} - \frac{b_{i2}}{\Delta c_2}\right)\gamma_{02} + \left(a_{i3} + \frac{b_{i2}}{\Delta c_2} - \frac{b_{i3}}{\Delta c_3}\right)\gamma_{03} + \left(a_{i4} + \frac{b_{i3}}{\Delta c_3}\right)\gamma_{04} + b_{i4}\gamma_{14} = RHS_i, \quad (B.3)$$

para $1 \leq i \leq 4$.

O sistema de equações agora têm 4 equações a 5 incógnitas. Resta, portanto, incluir a condição de Kutta, Eq. (4.8.a), aplicada ao caso de vórtices que é dada por

$$\gamma_{01} + \gamma_{04} + \gamma_{14}\Delta c_4 = 0. \quad (B.4)$$

Deste modo, por analogia, a lei de formação dos coeficientes A_{ij} é dada por

$$A_{i1} = \left(a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1}\right). \quad (B.5.a)$$

$$A_{ij} = \left(a_{ij} + \frac{b_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} - \frac{b_{ij}}{\Delta c_j}\right), \quad 2 \leq j \leq N-1. \quad (B.5.b)$$

$$A_{iN} = \left(a_{iN} + \frac{b_{iN-1}}{\Delta c_{N-1}}\right). \quad (B.5.c)$$

$$A_{iN+1} = b_{iN}. \quad (B.5.d)$$

Deste modo, demonstrou-se o exposto na Tabela 4.1.

Apêndice C

Lei de Formação para Distribuição Quadrática de Singularidades dos Coeficientes $A_{i,j}$

Para uma distribuição quadrática de dipolos, por exemplo, dada por $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$ e um aerofólio discretizado com apenas 4 painéis, conforme Fig. C.1, deseja-se determinar uma lei de formação dos coeficientes $A_{i,j}$.

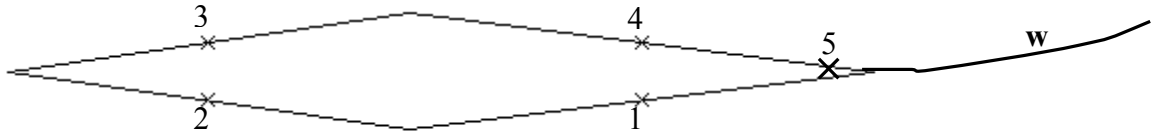


Figura C.1 – Aerofólio discretizado com apenas 4 painéis, ressaltando os pontos de controle e a esteira.

Aplicando a condição de impenetrabilidade, Eq. (4.12), aos 4 pontos de controle e a um ponto adicional próximo ao bordo de fuga, obtêm-se

$$a_{i1}\mu_{01} + b_{i1}\mu_{11} + c_{i1}\mu_{21} + a_{i2}\mu_{02} + b_{i2}\mu_{12} + c_{i2}\mu_{22} + a_{i3}\mu_{03} + b_{i3}\mu_{13} + c_{i3}\mu_{23} + a_{i4}\mu_{04} + b_{i4}\mu_{14} + c_{i4}\mu_{24} + A_{iw}\mu_w = RHS_i, \quad (C.1)$$

para $1 \leq i \leq 5$. Este ponto adicional é necessário para que seja possível o fechamento do sistema de equações. Além destas no bordo de fuga há a condição de salto tanto para a derivada quanto para a função de distribuição de dipolos.

Neste ponto pode-se verificar que há 7 equações e 13 incógnitas, estando portanto, o sistema indeterminado. A continuidade da função de distribuição e de sua derivada, Eqs. (4.13.a, b), permitem incorporar as outras 6 equações ao sistema. Estas equações são novamente reescritas,

$$\mu_{0j} + \mu_{1j}\Delta c_j + \mu_{2j}\Delta c_j^2 = \mu_{0,j+1}, \quad (C.2.a)$$

$$\mu_{1j} + 2\mu_{2j}\Delta c_j = \mu_{1j+1}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq 3. \quad (\text{C.2.b})$$

Expandindo e manipulando algebricamente as Eqs. (C.2.a,b), obtêm-se

$$\mu_{11} = \frac{2}{\Delta c_1}(\mu_{02} - \mu_{01}) - \mu_{12}, \quad (\text{C.3.a})$$

$$\mu_{12} = \frac{2}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) - \mu_{13}, \quad (\text{C.3.b})$$

$$\mu_{13} = \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14}, \quad (\text{C.3.c})$$

$$\mu_{21} = \frac{1}{2\Delta c_1}(\mu_{12} - \mu_{11}), \quad (\text{C.4.a})$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{2\Delta c_2}(\mu_{13} - \mu_{12}), \quad (\text{C.4.b})$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{2\Delta c_3}(\mu_{14} - \mu_{13}). \quad (\text{C.4.c})$$

Substituindo a Eq. (C.3.c) em (C.3.b) e em seguida, em (C.3.b), obtêm-se

$$\mu_{11} = \frac{2}{\Delta c_1}(\mu_{02} - \mu_{01}) - \frac{2}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14}, \quad (\text{C.5.a})$$

$$\mu_{12} = \frac{2}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) + \mu_{14}, \quad (\text{C.5.b})$$

$$\mu_{13} = \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14}. \quad (\text{C.5.c})$$

Substituindo as Eqs. (C.5) em (C.4), obtêm-se:

$$\mu_{21} = \frac{1}{\Delta c_1} \left[-\frac{1}{\Delta c_1} (\mu_{02} - \mu_{01}) + \frac{2}{\Delta c_2} (\mu_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) + \mu_{14} \right], \quad (C.6.a)$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\Delta c_2} \left[-\frac{1}{\Delta c_2} (\mu_{03} - \mu_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14} \right], \quad (C.6.b)$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{\Delta c_3} \left[-\frac{1}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) + \mu_{14} \right]. \quad (C.6.c)$$

Substituindo as Eqs. (C.5.a, b, c) e (C.6.a, b, c) em (C.1), obtêm-se

$$\begin{aligned} & a_{i1}\mu_{01} + b_{i1} \left[\frac{2}{\Delta c_1} (\mu_{02} - \mu_{01}) - \frac{2}{\Delta c_2} (\mu_{03} - \mu_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14} \right] + \\ & + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} \left[-\frac{1}{\Delta c_1} (\mu_{02} - \mu_{01}) + \frac{2}{\Delta c_2} (\mu_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) + \mu_{14} \right] + a_{i2}\mu_{02} + \\ & + b_{i2} \left[\frac{2}{\Delta c_2} (\mu_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) + \mu_{14} \right] + \\ & + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \left[-\frac{1}{\Delta c_2} (\mu_{03} - \mu_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14} \right] + \\ & a_{i3}\mu_{03} + b_{i3} \left[\frac{2}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) - \mu_{14} \right] + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \left[-\frac{1}{\Delta c_3} (\mu_{04} - \mu_{03}) + \mu_{14} \right] + \\ & + a_{i4}\mu_{04} + b_{i4}\mu_{14} + c_{i4}\mu_{24} + A_{iw}\mu_w = RHS_i \end{aligned} \quad (C.7)$$

Manipulando algebricamente a Eq. (C.7), explicitando as incógnitas, chega-se a

$$\begin{aligned} & \left(a_{i1} - 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1^2} \right) \mu_{01} + \left(a_{i2} + 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_1} + 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_2} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1^2} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_2} - 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2^2} \right) \mu_{02} + \\ & + (a_{i3} - 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_2} - 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_3} + 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_2} + 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_3} + 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_2} + 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_3} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2^2} - 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_3} + \\ & - 2\frac{b_{i3}}{\Delta c_3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3^2}) \mu_{03} + \left(a_{i4} + 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_3} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_3} - 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_3} + 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_3} + 2\frac{b_{i3}}{\Delta c_3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3^2} \right) \mu_{04} + \\ & + \left(-b_{i1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} + b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} - b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} + b_{i4} \right) \mu_{14} + c_{i4}\mu_{24} + A_{iw}\mu_w = RHS_i. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Assim, a Eq. (C.1) fica da seguinte forma

$$A_{i1}\mu_{01} + A_{i2}\mu_{02} + A_{i3}\mu_{03} + A_{i4}\mu_{04} + A_{i5}\mu_{14} + A_{i6}\mu_{24} + A_{iw}\mu_w = RHS_i, \quad (C.9)$$

no qual os coeficientes para o i -ésimo ponto de controle são dados por

$$\begin{aligned} A_{i1} &= a_{i1} - 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1^2}, \\ A_{i2} &= a_{i2} + 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_1} + 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_2} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1^2} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_2} - 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2^2}, \\ A_{i3} &= a_{i3} - 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_2} - 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_3} + 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_2} + 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_3} + 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_2} + 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_3} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2^2} + \\ &\quad - 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_3} - 2\frac{b_{i3}}{\Delta c_3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3^2}, \\ A_{i4} &= a_{i4} + 2\frac{b_{i1}}{\Delta c_3} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_3} - 2\frac{b_{i2}}{\Delta c_3} + 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_3} + 2\frac{b_{i3}}{\Delta c_3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3^2}, \\ A_{i5} &= -b_{i1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} + b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} - b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} + b_{i4}, \\ A_{i6} &= c_{i4}. \end{aligned}$$

Rearranjando as equações acima, obtêm-se:

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{1}{\Delta c_1} \left(2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} \right), \quad (C.10.a)$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{1}{\Delta c_1} \left(2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} \right) + \frac{1}{\Delta c_2} \left(2b_{i1} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \right), \quad (C.10.b)$$

$$A_{i3} = a_{i3} - \frac{1}{\Delta c_2} \left(2b_{i1} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \right) - \frac{1}{\Delta c_3} \left(2b_{i1} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \right), \quad (C.10.c)$$

$$A_{i4} = a_{i4} + \frac{1}{\Delta c_3} \left(2b_{i1} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \right), \quad (C.10.d)$$

$$A_{i5} = -b_{i1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} + b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} - b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} + b_{i4}, \quad (\text{C.10.e})$$

$$A_{i6} = c_{i4}. \quad (\text{C.10.f})$$

Seja então,

$$R1(i, 1) = 2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1},$$

$$R1(i, 2) = 2b_{i1} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2},$$

$$R1(i, 3) = 2b_{i1} - 2\frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + 2\frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3}.$$

Deste modo,

$$R1(i, 1) = 2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1}, \quad (\text{C.11.a})$$

$$R1(i, 2) = R1(i, 1) - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2},$$

$$R1(i, 3) = R1(i, 2) + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3},$$

onde por analogia, obtêm-se

$$R1(i, j) = R1(i, j-1) + (-1)^{j-1} \left(\frac{c_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} + 2b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right), \quad 2 \leq j \leq N-1. \quad (\text{C.11.b})$$

Outra lei de formação é dada por

$$R2(i) = -b_{i1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} + b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} - b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} + b_{i4},$$

onde por analogia, obtêm-se

$$R2(i) = b_{i4} + \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right), \quad 2 \leq j \leq N-1. \quad (C.12)$$

Os coeficientes A_{ij} , Eqs. (C.10.a, b, c, d,e, f), em função das variáveis auxiliares $R1(i, j)$ e $R2(i)$, são dados por

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{1}{\Delta c_1} R1(i, 1),$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{1}{\Delta c_1} R1(i, 1) + \frac{1}{\Delta c_2} R1(i, 2),$$

$$A_{i3} = a_{i3} - \frac{1}{\Delta c_2} R1(i, 2) - \frac{1}{\Delta c_3} R1(i, 3),$$

$$A_{i4} = a_{i4} + \frac{1}{\Delta c_3} R1(i, 3),$$

$$A_{i5} = R2(i),$$

$$A_{i6} = c_{i4}.$$

Reorganizando, escreve-se

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{1}{\Delta c_1} R1(i, 1), \quad (C.13.a)$$

$$A_{ij} = a_{ij} + (-1)^j \left[\frac{1}{\Delta c_{j-1}} R1(i, j-1) + \frac{1}{\Delta c_j} R1(i, j) \right], \quad (C.13.b)$$

$$A_{iN} = a_{iN} + (-1)^j \left[\frac{1}{\Delta c_{j-1}} R1(i, j-1) \right], \quad (C.13.c)$$

$$A_{iN+1} = R2(i), \quad (C.13.d)$$

$$A_{iN+2} = c_{iN}, \quad (C.13.e)$$

$$A_{iN+3} = A_{iw}. \quad (C.13.f)$$

Como a função de distribuição de singularidades é quadrática, deve-se também discretizar o aerofólio para um número ímpar de painéis, afim de que a lei de formação dos coeficientes A_{ij} seja a mais geral possível. O aerofólio é, portanto, discretizado através de 5 painéis.

Aplicando novamente a condição de impenetrabilidade, Eq. (4.12), aos 5 pontos de controle e a um ponto adicional próximo ao bordo de fuga, obtêm-se

$$\begin{aligned} & a_{i1}\mu_{01} + b_{i1}\mu_{11} + c_{i1}\mu_{21} + a_{i2}\mu_{02} + b_{i2}\mu_{12} + c_{i2}\mu_{22} + a_{i3}\mu_{03} + b_{i3}\mu_{13} + c_{i3}\mu_{23} + \\ & + a_{i4}\mu_{04} + b_{i4}\mu_{14} + c_{i4}\mu_{24} + a_{i5}\mu_{05} + b_{i5}\mu_{15} + c_{i5}\mu_{25} + A_{iw}\mu_w = RHS_i. \end{aligned} \quad (C.14)$$

para $1 \leq i \leq 6$. Este ponto adicional é necessário para que seja possível o fechamento do sistema de equações. Além destas no bordo de fuga há a condição de salto tanto para a derivada quanto para a função de distribuição de dipolos.

Neste ponto pode-se verificar que há 8 equações e 16 incógnitas, estando portanto, o sistema indeterminado. A continuidade da função de distribuição e de sua derivada, Eqs. (4.13.a, b), permitem incorporar as outras 8 equações ao sistema.

Análogo ao procedimento efetuado anteriormente, obtém-se após manipulações algébricas as seguintes equações para as derivadas primeiras e segundas,

$$\mu_{11} = \frac{2}{\Delta c_1}(\mu_{02} - \mu_{01}) - \frac{2}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) - \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) + \mu_{15}, \quad (C.15.a)$$

$$\mu_{12} = \frac{2}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) + \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) - \mu_{15}, \quad (C.15.b)$$

$$\mu_{13} = \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) - \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) + \mu_{15}, \quad (C.15.c)$$

$$\mu_{14} = \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) - \mu_{15}. \quad (C.15.d)$$

$$\begin{aligned} \mu_{21} = \frac{1}{\Delta c_1} \left[-\frac{1}{\Delta c_1}(\mu_{02} - \mu_{01}) + \frac{2}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) - \mu_{15} \right], \end{aligned} \quad (C.16.a)$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\Delta c_2} \left[-\frac{1}{\Delta c_2}(\mu_{03} - \mu_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) - \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) + \mu_{15} \right], \quad (C.16.b)$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{\Delta c_3} \left[-\frac{1}{\Delta c_3}(\mu_{04} - \mu_{03}) + \frac{2}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) - \mu_{15} \right], \quad (C.16.c)$$

$$\mu_{24} = \frac{1}{\Delta c_4} \left[-\frac{1}{\Delta c_4}(\mu_{05} - \mu_{04}) + \mu_{15} \right]. \quad (C.16.d)$$

Substituindo as Eqs. (C.15) e (C.16) em (C.14), obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \left(a_{i1} - \frac{2b_{i1}}{\Delta c_1} + \frac{c_{i1}}{\Delta c_1^2} \right) \mu_{01} + \left(a_{i2} + \frac{2b_{i1}}{\Delta c_1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1^2} + \frac{2b_{i1}}{\Delta c_2} - \frac{2b_{i2}}{\Delta c_2} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2^2} \right) \mu_{02} + \\ & + \left(a_{i3} - \frac{2b_{i1}}{\Delta c_2} - \frac{2b_{i1}}{\Delta c_3} + \frac{2b_{i2}}{\Delta c_2} + \frac{2b_{i2}}{\Delta c_3} + \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_2} + \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_3} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2^2} - \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_3} - \frac{2b_{i3}}{\Delta c_3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3^2} \right) \mu_{03} + \\ & (a_{i4} + \frac{2b_{i1}}{\Delta c_3} + \frac{2b_{i1}}{\Delta c_4} - \frac{2b_{i4}}{\Delta c_4} + \frac{2b_{i3}}{\Delta c_4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4^2} - \frac{2c_{i3}}{\Delta c_3 \Delta c_4} + \frac{2b_{i3}}{\Delta c_3} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_3} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_4} - \frac{2b_{i2}}{\Delta c_3} - \frac{2b_{i2}}{\Delta c_4} + \\ & + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_3} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_4} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3^2}) \mu_{04} + (a_{i5} - \frac{2b_{i1}}{\Delta c_4} + \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1 \Delta c_4} + \frac{2b_{i2}}{\Delta c_4} - \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2 \Delta c_4} - \frac{2b_{i3}}{\Delta c_4} + \frac{2c_{i3}}{\Delta c_3 \Delta c_4} + \\ & + \frac{2b_{i4}}{\Delta c_4} - \frac{c_{i4}}{\Delta c_4^2}) \mu_{05} + \left(b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} - b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4} + b_{i5} \right) \mu_{15} + c_{i5} \mu_{25} + A_{iw} \mu_w = RHS_i. \end{aligned} \quad (C.17)$$

Assim, a Eq. (C.14) fica da seguinte forma

$$A_{i1} \mu_{01} + A_{i2} \mu_{02} + A_{i3} \mu_{03} + A_{i4} \mu_{04} + A_{i5} \mu_{05} + A_{i6} \mu_{15} + A_{i7} \mu_{25} + A_{iw} \mu_w = RHS_i, \quad (C.18)$$

no qual os coeficientes para o i -ésimo ponto de controle são dados por

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{1}{\Delta c_1} \left(2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} \right), \quad (\text{C.19.a})$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{1}{\Delta c_1} \left(2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} \right) + \frac{1}{\Delta c_2} \left(2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \right), \quad (\text{C.19.b})$$

$$A_{i3} = a_{i3} - \frac{1}{\Delta c_2} \left(2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \right) - \frac{1}{\Delta c_3} \left(2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \right), \quad (\text{C.19.c})$$

$$A_{i4} = a_{i4} + \frac{1}{\Delta c_3} \left(2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \right) + \frac{1}{\Delta c_4} \left(2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{2c_{i3}}{\Delta c_3} - 2b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4} \right), \quad (\text{C.19.d})$$

$$A_{i5} = a_{i5} - \frac{1}{\Delta c_4} \left(2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{2c_{i3}}{\Delta c_3} - 2b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4} \right), \quad (\text{C.19.e})$$

$$A_{i6} = b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} - b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4} + b_{i5}, \quad (\text{C.19.f})$$

$$A_{i7} = c_{i5}. \quad (\text{C.19.g})$$

Seja então,

$$R1(i,1) = 2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1}$$

$$R1(i,2) = 2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2}$$

$$R1(i, 3) = 2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3}$$

$$R1(i, 4) = 2b_{i1} - \frac{2c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{2c_{i3}}{\Delta c_3} - 2b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4}$$

Deste modo,

$$R1(i, 1) = 2b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} \quad (\text{C.20.a})$$

$$R1(i, 2) = R1(i, 1) - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - 2b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2}$$

$$R1(i, 3) = R1(i, 2) + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + 2b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3}$$

$$R1(i, 4) = R1(i, 3) - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} - 2b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4}$$

onde por analogia e comparação com a Eq. (C.11.b), obtêm-se

$$R1(i, j) = R1(i, j-1) + (-1)^{j-1} \left[\frac{c_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} + 2b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right], \quad 2 \leq j \leq N-1. \quad (\text{C.20.b})$$

A outra lei de formação é dada por

$$R2(i) = b_{i1} - \frac{c_{i1}}{\Delta c_1} - b_{i2} + \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} + b_{i3} - \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} - b_{i4} + \frac{c_{i4}}{\Delta c_4} + b_{i5},$$

onde por analogia e comparação com a Eq. (C.12), obtêm-se

$$R2(i) = b_{iN} + \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+N} \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right), \quad \text{para } 2 \leq j \leq N-1. \quad (\text{C.21})$$

Deste modo, demonstrou-se o exposto na Tabela 4.2.

Apêndice D

Lei de Formação para Distribuição Quadrática de Vórtices dos Coeficientes $A_{i,j}$

Como a condição de salto para a derivada da função de distribuição quadrática de vórtices, Eq. 4.15, não apresenta significado físico, deve-se obter um outro meio de fechar o sistema de equações algébricas. Sendo assim, propõe-se utilizar uma distribuição quadrática ao longo de todo o aerofólio, exceto no bordo de fuga, onde se adota uma distribuição linear.

Seja, por exemplo, um aerofólio discretizado com apenas 4 painéis, deseja-se determinar a lei de formação dos coeficientes $A_{i,j}$. Para isso, deve-se aplicar a condição de contorno de impenetrabilidade, Eq. (4.19), nos 4 pontos de controle, obtendo-se

$$a_{i1}\gamma_{01} + b_{i1}\gamma_{11} + a_{i2}\gamma_{02} + b_{i2}\gamma_{12} + c_{i2}\gamma_{22} + a_{i3}\gamma_{03} + b_{i3}\gamma_{13} + c_{i3}\gamma_{23} + a_{i4}\gamma_{04} + b_{i4}\gamma_{14} = RHS_i, \quad (D.1)$$

para $1 \leq i \leq 4$. Neste ponto pode-se verificar que há 4 equações a 10 incógnitas, estando portanto, o sistema indeterminado.

Devido à hipótese de continuidade da função de distribuição, assim como de sua derivada, deve-se impor o acoplamento entre os painéis j e $j+1$. Como a ordem das funções de distribuição de vórtices são diferentes nos painéis 1 e 2, obtêm-se

$$\gamma_{01} + \gamma_{11}\Delta c_1 = \gamma_{02}, \quad (D.2.a)$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{12}, \quad (D.2.b)$$

para os demais painéis j e $j+1$, onde $2 \leq j \leq N-1$, têm-se

$$\gamma_{0j} + \gamma_{1j}\Delta c_j + \gamma_{2j}\Delta c_j^2 = \gamma_{0j+1}, \quad (D.3.a)$$

$$\gamma_{1j} + 2\gamma_{2j}\Delta c_j = \gamma_{1j+1}. \quad (\text{D.3.b})$$

Resta, portanto, aplicar a condição de Kutta no bordo de fuga do aerofólio, obtendo-se

$$\gamma_{01} + \gamma_{0N} + \gamma_{1N}\Delta c_N = 0. \quad (\text{D.4})$$

As equações de continuidade da função de distribuição, de sua derivada e a condição de Kutta, descritas acima, fornecem 7 equações adicionais. Assim, o sistema de equações já se encontra sobredeterminado com 11 equações a 10 incógnitas, sendo resolvido através do Método dos Mínimos Quadrados.

Manipulando algebricamente as Eqs. (D.2.a, b) e (D.3.a, b), chega-se as seguintes fórmulas para derivadas primeiras,

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\Delta c_1}(\gamma_{02} - \gamma_{01}), \quad (\text{D.5.a})$$

$$\gamma_{12} = \frac{2}{\Delta c_2}(\gamma_{03} - \gamma_{02}) - \gamma_{13}, \quad (\text{D.5.b})$$

$$\gamma_{13} = \frac{2}{\Delta c_3}(\gamma_{04} - \gamma_{03}) - \gamma_{14}, \quad (\text{D.5.c})$$

e para derivadas segundas,

$$\gamma_{22} = \frac{1}{2\Delta c_2}(\gamma_{13} - \gamma_{12}), \quad (\text{D.6.a})$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{2\Delta c_3}(\gamma_{14} - \gamma_{13}). \quad (\text{D.6.b})$$

Novamente manipulando as Eqs. (D.5.a, b, c), chega-se

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\Delta c_1}(\gamma_{02} - \gamma_{01}), \quad (D.7.a)$$

$$\gamma_{12} = \frac{2}{\Delta c_2}(\gamma_{03} - \mu_{02}) - \frac{2}{\Delta c_3}(\gamma_{04} - \gamma_{03}) + \gamma_{14}, \quad (D.7.b)$$

$$\gamma_{13} = \frac{2}{\Delta c_3}(\gamma_{04} - \gamma_{03}) - \gamma_{14}, \quad (D.7.c)$$

o mesmo sendo feito para as Eqs.(D.6.a, b), no qual se obtêm

$$\gamma_{22} = \frac{1}{\Delta c_2} \left[-\frac{1}{\Delta c_2}(\gamma_{03} - \gamma_{02}) + \frac{2}{\Delta c_3}(\gamma_{04} - \gamma_{03}) - \gamma_{14} \right], \quad (D.8.a)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{\Delta c_3} \left[-\frac{1}{\Delta c_3}(\gamma_{04} - \gamma_{03}) + \gamma_{14} \right]. \quad (D.8.b)$$

Substituindo as Eqs. (D.7.a, b, c) e (D.8.a, b) na Eq. (D.1), obtêm-se

$$A_{i1}\gamma_{01} + A_{i2}\gamma_{02} + A_{i3}\gamma_{03} + A_{i4}\gamma_{04} + A_{i5}\gamma_{14} = RHS_i, \quad (D.9)$$

onde:

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} \quad (D.10.a)$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} - \frac{1}{\Delta c_2} \left(2b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \right) \quad (D.10.b)$$

$$A_{i3} = a_{i3} + \frac{1}{\Delta c_2} \left(2b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \right) + \frac{1}{\Delta c_3} \left(2b_{i2} - \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} - 2b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \right) \quad (D.10.c)$$

$$A_{i4} = a_{i4} - \frac{1}{\Delta c_3} \left(2b_{i2} - \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} - 2b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} \right) \quad (\text{D.10.d})$$

$$A_{i5} = b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} - b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} + b_{i4} \quad (\text{D.10.e})$$

Introduzindo a variável auxiliar $R3(i, j)$, afim de determinar a lei de formação dos coeficientes A_{ij} , cujos valores são

$$R3(i, 1) = 0,$$

$$R3(i, 2) = 2b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2},$$

$$R3(i, 3) = 2b_{i2} - \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} - 2b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3},$$

o que nos permite extrapolar para $R3(i, 4)$ o seguinte valor

$$R3(i, 4) = 2b_{i2} - \frac{2c_{i2}}{\Delta c_2} - 2b_{i3} + \frac{2c_{i3}}{\Delta c_3} + 2b_{i4} - \frac{c_{i4}}{\Delta c_4}.$$

Portanto, a lei de formação para $R3(i, j)$ é dada por

$$R3(i, 1) = 0 \quad (\text{D.11.a})$$

$$R3(i, 2) = 2b_{i2} - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} \quad (\text{D.11.b})$$

$$R3(i, 3) = R3(i, 2) - \frac{c_{i2}}{\Delta c_2} - 2b_{i3} + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3}$$

$$R3(i, 4) = R3(i, 3) + \frac{c_{i3}}{\Delta c_3} + 2b_{i4} - \frac{c_{i4}}{\Delta c_4}$$

$$R3(i, j) = R3(i, j-1) + (-1)^j \left(\frac{c_{ij-1}}{\Delta c_{j-1}} + 2b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right), \text{ para } 3 \leq j \leq N-1. \quad (\text{D.11.c})$$

Substituindo a variável auxiliar nas Eqs. (D.10) que determinam os coeficientes A_{ij} , obtêm-se

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1},$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} - \frac{1}{\Delta c_2} R3(i, 2),$$

$$A_{i3} = a_{i3} + \frac{1}{\Delta c_2} R3(i, 2) + \frac{1}{\Delta c_3} R3(i, 3),$$

$$A_{i4} = a_{i4} - \frac{1}{\Delta c_3} R3(i, 3),$$

$$A_{i5} = b_{i4} + \sum_{j=2}^3 (-1)^j \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right).$$

Deste modo, a lei de formação dos coeficientes A_{ij} é dada por

$$A_{i1} = a_{i1} - \frac{b_{i1}}{\Delta c_1}, \quad (\text{D.12.a})$$

$$A_{i2} = a_{i2} + \frac{b_{i1}}{\Delta c_1} - \frac{1}{\Delta c_2} R3(i, 2), \quad (\text{D.12.b})$$

$$A_{ij} = a_{ij} + (-1)^{j-1} \left[\frac{R3(i, j-1)}{\Delta c_{j-1}} + \frac{R3(i, j)}{\Delta c_j} \right], \text{ para } 3 \leq j \leq N-1. \quad (\text{D.12.c})$$

$$A_{iN} = a_{i4} - \frac{1}{\Delta c_3} R3(i, N-1), \quad (\text{D.12.d})$$

$$A_{iN+1} = b_{iN} + \sum_{j=2}^{N-1} (-1)^j \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{\Delta c_j} \right). \quad (\text{D.12.e})$$

Deste modo, demonstrou-se o exposto na Tabela 4.3.

Apêndice E

Integração Numérica

E.1 Fórmula de Simpson 1/3

Esta fórmula resulta de se efetuar uma interpolação de $f(x)$ por um polinômio $p(x)$ do 2º grau, nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$ do intervalo $[a, b]$, onde $h = \frac{b-a}{2}$.

De modo análogo a fórmula dos trapézios, pode-se demonstrar que a integral $\int_a^b f(x)dx$ é aproximada por

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (\text{E.1})$$

O erro de truncamento no cálculo da integral pela fórmula de Simpson é dado pela fórmula

$$E_s = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c), \quad \text{para } a \leq c \leq b. \quad (\text{E.2})$$

E.2 Fórmula de Simpson 1/3 composta ($n \geq 4$) :

Aplicando-se a Eq. (E.1) a cada conjunto de três pontos (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , (x_{i+2}, y_{i+2}) , para $i = 0, \dots, n-2$, no intervalo $[a, b]$, com $h = \frac{b-a}{2}$, onde n é um número natural par, obtemos a fórmula de Simpson 1/3 composta

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-1} + y_n), \quad (\text{E.3})$$

com erro de truncamento $E_s = -\frac{nh^5}{180}f^{(4)}(c)$, para $a \leq c \leq b$. Se $M = \max |f^{(4)}(x)|$

para $x \in [a, b]$, então

$$|E_s| \leq \frac{(b-a)h^4 M}{180} . \quad (E.4)$$

Uma fórmula prática para a estimativa do erro é dada por

$$|E| \cong \frac{(b-a)}{180} \max_i |\Delta^4 y_i| . \quad (E.5)$$

Para o cálculo de uma integral definida de uma função $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$ por uma fórmula de integração numérica, para um dado valor de n , deve-se calcular o valor de $h = \frac{b-a}{n}$ e os pontos $x_i = a + ih$. Daí, calculamos $y_i = f(x_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$ e substituir na fórmula de integração para obter o valor de I .

O erro de truncamento pode ser estimado pela fórmula prática que envolve diferenças finitas, pois em geral, não é fácil determinar o ponto de máximo de uma função definida num intervalo fechado. Além disto, para valores crescentes de n , os valores obtidos pela aplicação de uma fórmula de integração numérica se aproximam do valor exato da integral. Mas, devido aos erros de arredondamento cometidos nos cálculos, existe um n ótimo a partir do qual não é mais possível melhorar o resultado da aproximação e o valor obtido pela integração numérica começa a se afastar do valor exato da integral.