

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE VÓRTICES AO ESCOAMENTO
INCOMPRESSÍVEL AO REDOR DE CORPOS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO
ACURADAS NA PAREDE

Helaine Crispim dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Rio de Janeiro
Dezembro de 2010

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE VÓRTICES AO ESCOAMENTO
INCOMPRESSÍVEL AO REDOR DE CORPOS COM CONDIÇÕES DE
CONTORNO ACURADAS NA PAREDE

Helaine Crispim dos Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Manuel Ernani de Carvalho Cruz, Ph.D.

Prof. Leonardo Santos de Brito Alves, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2010

Santos, Helaine Crispim dos

Aplicação do Método de Vórtices ao Escoamento Incompressível ao Redor de Corpos com Condições de Contorno Acuradas na Parede/ Helaine Crispim dos Santos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XX, 193 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 185-193.

1. Método de Vórtices. 2. Método dos Painéis. 3. Cilindro Circular. 4. Condições de Contorno. I. Bodstein, Gustavo César Rachid. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE VÓRTICES AO ESCOAMENTO
INCOMPRESSÍVEL AO REDOR DE CORPOS COM CONDIÇÕES DE
CONTORNO ACURADAS NA PAREDE

Helaine Crispim dos Santos

Dezembro/2010

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho, aplica-se um modelo numérico para simular escoamentos bidimensionais, incompressíveis e não-permanentes ao redor de uma placa plana paralela ao escoamento e de um cilindro de seção circular.

As simulações numéricas são realizadas utilizando-se o Método de Vórtices. O corpo é modelado através do Método dos Painéis, onde a representação do corpo é realizada com a aplicação de painéis e uma camada adicional de vórtices, o que permite que se imponham simultaneamente as condições de impenetrabilidade e não-deslizamento na superfície. O processo de difusão viscosa da vorticidade é modelado pelos métodos do Avanço Randômico (MAR) e do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), associado a um algoritmo de aglomeração de vórtices com excessivo grau de recobrimento de seus núcleos, com o intuito de diminuir o número de vórtices. O processo de convecção tem o seu custo computacional enormemente reduzido neste trabalho, pela aplicação do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA). O desenvolvimento de camada limite em placa plana é simulado para validar o modelo, o qual é empregado por último em simulações do escoamento ao redor de um cilindro circular, para diferentes valores do número de Reynolds. Os resultados numéricos obtidos apresentam boa concordância com outros resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

APPLICATION OF THE VORTEX METHOD TO THE INCOMPRESSIBLE FLOW
AROUND BODIES WITH ACCURATE WALL BOUNDARY CONDITIONS

Helaine Crispim dos Santos

December/2010

Advisor: Gustavo César Rachid Bodstein

Department: Mechanical Engineering

In this work we apply a numerical model to simulate the two-dimensional, incompressible and unsteady flat plate parallel to the uniform flow around a cylindrical bluff body, with circular cross-section. Numerical simulations are carried out using the Vortex Method. The body is modeled using the Panel Method, where the body is represented by vortex panels and an additional layer of vortices, which satisfy simultaneously the no-penetration and the non-slip conditions on the surface. The vorticity viscous diffusion process is modeled by two methods, the Random Walk Method (RWM) and the Corrected Core Spread Method (CCSM), in association with a merging algorithm used in order to replace groups of vortices with intense overlapping by a single one, reducing the computational cost of the model. The convection step takes advantage of the Fast Adaptive Multipole Method (FAMM), which reduces enormously the computational cost.

The flat plate boundary layer development is simulated to validate the model, which is used again to simulate the flow around a circular cylinder, for different Reynolds numbers. Numerical results present good agreement when compared to other numerical and experimental results available in literature.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação	6
1.2. Descrição do Problema Físico	9
1.3. Descrição do Trabalho a Ser Desenvolvido	14
1.4. Objetivos	16
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1. Trabalhos Experimentais	18
2.2. Trabalhos Analíticos	20
2.3. Trabalhos Numéricos	21
2.3.1. Método dos Painéis	24
2.3.2. Método de Vórtices	24
2.3.3. Convecção – Métodos de Expansão em Multipolos	31
2.3.4. Difusão Viscosa	32
CAPÍTULO 3 – MODELO MATEMÁTICO	36
3.1. Hipóteses Simplificadoras	36
3.2. Problema de Valor de Contorno	38
3.3. Equação de Transporte da Vorticidade	40
3.4. Relação Velocidade – Vorticidade: A Lei de Biot-Savart	41
3.4.1. Velocidade Induzida por um Segmento de Vórtice em Linha Reta	44
3.5. Modelagem da Vorticidade	48
3.5.1. Folha de Vorticidade	51
3.6. Escoamento Potencial e Formulação do Problema	53
3.7. Solução Geral da Equação de Laplace Bidimensional	55
3.8. Condição de Contorno – Utilização Simultânea de Painéis e Vórtices Para Discretização do Corpo	61
3.9. Difusão da Vorticidade na Superfície Sólida e	

Nascimento de Novos Vórtices	63
3.10. Condição de Conservação de Circulação	69
3.11. Carregamentos Sobre o Corpo	70
3.11.1. Metodologia de Lewis	70
3.11.2. Metodologia de Wu	71
 CAPÍTULO 4 – MÉTODO NUMÉRICO	 73
4.1. Método de Vórtices	73
4.1.1. Equacionamento e algoritmo do Método de Vórtices	74
4.2. Solução Potencial – Método dos Painéis	76
4.2.1. Escolha de Singularidades	78
4.2.2. Implementação Numérica	81
4.2.2.1. Distribuição de Vorticidade Constante	83
4.2.2.2. Distribuição de Vorticidade Linear	86
4.3. Condição de Contorno – Utilização Simultânea de Painéis e Vórtices	91
4.4. Difusão da Vorticidade na Superfície Sólida e	
Nascimento de Novos Vórtices	94
4.5. Convecção dos Vórtices	95
4.5.1. Método de Expansão em Multipolos Adaptativo – MEMA	98
4.6. Processo Difusivo	99
4.6.1. Método do Avanço Randômico – MAR	100
4.6.2. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido – MCNC	101
4.7. Avanço Temporal	102
4.8. Mecanismos de Redução do Número de Vórtices	103
4.8.1. Aglomeração Direta	103
4.8.2. Aglomeração Utilizando a Hierarquia de Caixas do MEMA	108
4.8.3. Corte	108
4.9. Correção do Campo de Vorticidade	
Para Vórtices que Cruzam a Superfície	109
4.10. Correção Para Vórtices que Penetram no Corpo	110
4.11. Suavização da Velocidade Induzida por	
Vórtices Muito Próximos aos Pontos de Controle	111
4.12. Atualização das Condições de Contorno	112

CAPÍTULO 5 – PLACA PLANA – RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO	113
5.1. Análise de Convergência	115
5.2. escoamento em Placa Plana – Validação	131
CAPÍTULO 6 – CILINDRO CIRCULAR – ANÁLISE DE RESULTADOS	136
6.1. Verificação dos Parâmetros Numéricos e Análise de Convergência	136
6.2. Apresentação e Análise dos Resultados	148
6.3. Coeficiente de Arrasto em Função do Número de Reynolds	174
6.4. Número de Strouhal em Função do Número de Reynolds	175
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES	178
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	185

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Esteira de Von Karman para $Re = 140$	8
Figura 1.2 – Escoamento em torno de um cilindro circular para $Re = 1.54$	10
Figura 1.3 – Escoamento em torno de um cilindro circular para $Re = 26$	10
Figura 1.4 – Escoamento em torno de um cilindro circular para $Re = 55$	11
Figura 1.5 – Número de Strouhal para a rua de Von Karman em função do número de Reynolds para o cilindro de seção circular	13
Figura 3.1 – Problema em estudo: escoamento externo ao redor de um corpo bidimensional de geometria arbitrária	37
Figura 3.2 – Comprimento característico (diâmetro)	38
Figura 3.3 – Velocidade no ponto P devido à distribuição de vorticidade	43
Figura 3.4 – Velocidade no ponto P induzida por um segmento de vórtice	43
Figura 3.5 – Filamentos de velocidade	44
Figura 3.6 – Linhas de corrente e de potencial constante para um vórtice bidimensional situado na origem	45
Figura 3.7 – Variação radial da componente tangencial de velocidade induzida por um vórtice	46
Figura 3.8 – Distribuição de vorticidade e velocidade induzida para um vórtice potencial, de Chorin e de Rankine	49
Figura 3.9 – Distribuição de vorticidade e velocidade induzida para um vórtice de Lamb	50
Figura 3.10 – Velocidade induzida pelo ponto P por uma folha de vorticidade de intensidade $\gamma[x_1 - x_2]$, obtida em KATZ e PLOTKIN (2001)	52
Figura 3.11 – Problema de fluxo potencial	56
Figura 3.12 – Potencial de velocidade perto de uma fronteira sólida S_C , obtido por KATZ e PLOTKIN (2001)	59
Figura 3.13 – Utilização simultânea de vórtices e painéis	62
Figura 3.14 – Espessura de difusão δ_n	65
Figura 4.1 – Algoritmo esquemático do Método	76
Figura 4.2 – Distribuição de vorticidade constante ao longo do eixo x	79
Figura 4.3 – Placa plana discretizada	81

Figura 4.4 – Distribuição das singularidades: a) constante; b) linear	82
Figura 4.5 – Sistema de coordenadas global e local do painel	82
Figura 4.6 – Variáveis do sistema de coordenadas do painel	85
Figura 4.7 – Superposição da distribuição de vorticidade constante com a linear pura	87
Figura 4.8 – Painéis e vórtices na discretização do corpo	92
Figura 4.9 – Divisão do vórtice no MCNC	102
Figura 4.10 – Vórtice com raio σ que cruza a placa plana	109
Figura 4.11 – Reflexão do vórtice	111
Figura 4.12 – Utilização de subpainéis	111
Figura 5.1 – Convergência do perfil de velocidade variando-se τ para: a) $x/C = 0.25$ b) $x/C = 0.50$ c) $x/C = 0.75$	118
Figura 5.2 – Convergência do perfil de velocidade variando-se α_{MCNC} para: a) $x/C = 0.25$ b) $x/C = 0.50$ c) $x/C = 0.75$	121
Figura 5.3 – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 para: a) $x/C = 0.25$ b) $x/C = 0.50$ c) $x/C = 0.75$	123
Figura 5.4 – Convergência do perfil de velocidade variando-se N para: a) $x/C = 0.25$ b) $x/C = 0.50$ c) $x/C = 0.75$	126
Figura 5.5 – Convergência do perfil de velocidade variando-se $\Delta\tau$ para: a) $x/C = 0.25$ b) $x/C = 0.50$ c) $x/C = 0.75$	129
Figura 5.6 – Convergência das espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento	130
Figura 5.7 – Convergência do coeficiente de atrito	131
Figura 5.8 – Resultado convergido para o perfil de velocidade em: a) $x/C = 0.25$ b) $x/C = 0.50$ c) $x/C = 0.75$	133
Figura 5.9 – Resultados convergidos para as espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento	134
Figura 5.10 – Resultado convergido para o coeficiente de atrito	135
Figura 6.1 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 40$ e $\tau = 0.25$	139
Figura 6.2 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 200$ e $\tau = 0.25$	141
Figura 6.3 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 1000$ e $\tau = 0.25$	142
Figura 6.4 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 550$ e $\tau = 3.0$	144
Figura 6.5 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 1000$ e $\tau = 5.0$	146
Figura 6.6 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 3000$ e $\tau = 5.0$	147

Figura 6.7 – Linhas de corrente para $Re = 10^3$ e $\tau = 25.0$	149
Figura 6.8 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 10^3$ e $\tau = 25.0$	150
Figura 6.9 – Distribuição de pressão para $Re = 10^3$ e $\tau = 25.0$	153
Figura 6.10 – Linhas de corrente para $Re = 5.10^3$ e $\tau = 25.0$	154
Figura 6.11 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 5.10^3$ e $\tau = 25.0$	155
Figura 6.12 – Distribuição de pressão para $Re = 5.10^3$ e $\tau = 25.0$	157
Figura 6.13 – Linhas de corrente para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$	159
Figura 6.14 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$	160
Figura 6.15 – Distribuição de pressão para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$	163
Figura 6.16 – Linhas de corrente para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$	164
Figura 6.17 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$	166
Figura 6.18 – Distribuição de pressão para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$	168
Figura 6.19 – Linhas de corrente para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$	169
Figura 6.20 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$	171
Figura 6.21 – Distribuição de pressão para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$	173
Figura 6.22 – Gráfico $C_d \times Re$	175
Figura 6.23 – Gráfico $St \times Re$	176

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Parâmetros físicos e numéricos que controlam a simulação	114
Tabela 5.2 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de τ	116
Tabela 5.3 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de α_{MCNC}	119
Tabela 5.4 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de h/σ_0	122
Tabela 5.5 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de N	124
Tabela 5.6 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de $\Delta\tau$	127
Tabela 6.1 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso I	138
Tabela 6.2 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso II	140
Tabela 6.3 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso III	142
Tabela 6.4 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso IV	143
Tabela 6.5 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso V	145
Tabela 6.6 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso VI	147
Tabela 6.7 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso VII	149
Tabela 6.8 – Valores do número de Strouhal para o Caso VII	151
Tabela 6.9 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso VII	151
Tabela 6.10 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso VII	152
Tabela 6.11 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por BLEVINS (1984) para o Caso VII	152
Tabela 6.12 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso VIII	154
Tabela 6.13 – Valores do número de Strouhal para o Caso VIII	156
Tabela 6.14 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso VIII	156
Tabela 6.15 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso VIII	156

Tabela 6.16 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por ROSHKO (1961) para o Caso VIII	157
Tabela 6.17 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso IX	158
Tabela 6.18 – Valores do número de Strouhal para o Caso IX	161
Tabela 6.19 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso IX	161
Tabela 6.20 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso IX	162
Tabela 6.21 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por BLEVINS (1984) para o Caso IX	162
Tabela 6.22 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso X	164
Tabela 6.23 – Valores do número de Strouhal para o Caso X	166
Tabela 6.24 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso X	167
Tabela 6.25 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso X	167
Tabela 6.26 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por ROSHKO (1961) para o Caso X	167
Tabela 6.27 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso XI	169
Tabela 6.28 – Valores do número de Strouhal para o Caso XI	171
Tabela 6.29 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso XI	172
Tabela 6.30 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso XI	172
Tabela 6.31 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por BLEVINS (1984) para o Caso XI	172
Tabela 6.32 – Valores numéricos e experimentais do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds	174
Tabela 6.33 – Valores numéricos e experimentais do número de Strouhal em função do número de Reynolds	176

LISTA DE SÍMBOLOS

Acrônimos

MAR – Método do Avanço Randômico

MCNC – Método do Crescimento do Núcleo Corrigido

MEMA – Método de Expansão em Multipolos

MRV – Método de Redistribuição de Vorticidade

MTIP – Método de Troca de Intensidade entre Partículas

MVD – Método da Velocidade de Difusão

Acrônimos em língua inglesa

CCSM – Corrected Core Spread Method

FAMM – Fast Adaptive Multipole Method

MPI – Message Passing Interface

PSE – Particle Strength Exchange

RWM – Random Walk Method

Símbolos latinos

A – Área do contorno

$\mathbf{a}$ – Matriz de influência para os painéis com distribuição linear de vorticidade

$\mathbf{A}$ – Matriz de influência para os painéis com distribuição constante de vorticidade

A – Coeficientes de influência para os painéis com distribuição constante de vorticidade

A' – Coeficiente de influência para os painéis com distribuição linear de vorticidade

A^- – Área acima da superfície

A^{**} – Área abaixo da superfície

a_{ij} – Elemento da matriz de influência para os painéis com distribuição linear de vorticidade

A_{ij} – Elemento da matriz de influência para os painéis com distribuição constante de vorticidade

A_C – Área ocupada pelo corpo no plano

A_d – Área do disco

A_E – Área dos vórtices na esteira

A_T – Área total do núcleo do vórtice

b – Vetor independente

B – Coeficientes de influência para os dipolos

B – Campo vetorial arbitrário

b_i – Elemento do vetor independente

b_{IMP} – Elemento do vetor independente para a condição de contorno de impenetrabilidade

b_{NE} – Elemento do vetor independente para a condição de contorno de não-eskorregamento

c – Comprimento característico

C_C – Área das folhas de vorticidade

C_d – Coeficiente de arrasto

C_f – Coeficiente de atrito

C_l – Coeficiente de sustentação

C_p – Coeficiente de pressão

d – Diâmetro do cilindro

dl – Elemento infinitesimal linear

$d\mathbf{l}$ – Direção no filamento de vorticidade

dS – Elemento infinitesimal de área

dV – Elemento infinitesimal volumétrico

e – Erro máximo no processo de aglomeração

$e(\mathbf{x})$ – Erro introduzido no campo de vorticidade

$erfc$ – Função erro complementar

f – Frequência associada ao número de Strouhal

f – Vetor força na superfície

g – Aceleração da gravidade
 h – Distância entre os centros dos vórtices gerados
 $\frac{h}{\sigma_0}$ – Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices e o raio do vórtice
 H_l – Altura do líquido em um reservatório
 h_{li} – Altura do líquido ideal
 k – Constante de proporcionalidade
 L – Número de vórtices por painel
 l_m – Resolução mínima da simulação
 l_M – Resolução máxima da simulação
 m – Número de partículas
 M – Número de vórtices discretos na esteira
 m_c – Massa do corpo sólido
 N – Número de painéis
 N_{sub} – Número de subpainéis
 $\mathbf{n}$ – Vetor normal à superfície do corpo
 p – Pressão estática absoluta
 P, Q – Números randômicos entre 0 e 1
 P_{IMP} – Coeficientes de influência dos painéis escritos para condição de contorno de impenetrabilidade
 p_{li} – Pressão do líquido ideal
 P_{NE} – Coeficientes de influência dos painéis escritos para condição de contorno de não-escorregamento
 q_i – Intensidade das partículas
 r – Coordenada do sistema polar
 $\mathbf{r}$ – Vetor posição
 r_1, r_2 – Variáveis auxiliares
 R – Razão de aspecto
 R_c – Resistência do corpo sólido
 R_f – Região ocupada pelo fluido
 R_j – Região ocupado pelo corpo j

Re – Número de Reynolds
 s – Direção superficial
 S – Superfície de integração
 S_C – Superfície de integração do corpo
 S_E – Superfície de integração da esteira
 St – Número de Strouhal
 t – Tempo
 $\mathbf{t}$ – Vetor tangencial à superfície do corpo
 U – Componente x da velocidade característica
 $\mathbf{u}$ – Campo vetorial de velocidade
 u_c – Componente x da velocidade induzida devido à presença do corpo
 u_p – Componente x da velocidade induzida pelo painel no sistema local
 $\mathbf{u}_r$ – Componente de velocidade no sistema de coordenadas polares
 u_v – Componente x da velocidade induzida pelos vórtices
 $\mathbf{u}_\theta$ – Componente de velocidade no sistema de coordenadas polares
 V – Volume de integração
 v_c – Componente y da velocidade induzida devido à presença do corpo
 v_{cs} – Velocidade do corpo sólido
 V_{IMP} – Coeficientes de influência relativos aos vórtices escritos para condição de contorno de impenetrabilidade
 v_l – Velocidade do líquido
 v_{li} – Velocidade do líquido ideal
 V_{NE} – Coeficientes de influência relativos aos vórtices escritos para condição de contorno de não-eskorregamento
 v_p – Componente y da velocidade induzida pelo painel no sistema local
 v_v – Componente y da velocidade induzida pelos vórtices
 x – Coordenada do sistema cartesiano do painel (local)
 X – Coordenada do sistema cartesiano global
 $\mathbf{x}$ – Posição do vórtice
 x/C – Posição na placa plana

y – Coordenada do sistema cartesiano do painel (local)

Y – Coordenada do sistema cartesiano global

$\mathbf{z}$ – Região do domínio

Símbolos gregos

α – Ângulo de ataque

α_i – Primeiro momento de inércia

α_{MCNC} – Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC

β – Ângulo formado entre o painel e o sistema de coordenadas global

δ_n – Distância de difusão

δA – Área de difusão

Δl – Comprimento do painel

Δr – Deslocamento radial do vórtice

Δt – Discretização do tempo

Δx_C – Deslocamento convectivo do vórtice na direção x

Δx_D – Deslocamento difusivo do vórtice na direção x

Δy_C – Deslocamento convectivo do vórtice na direção y

Δy_D – Deslocamento difusivo do vórtice na direção y

$\Delta \theta$ – Deslocamento polar do vórtice

$\Delta \tau$ – Passo de tempo adimensional

ε – Raio da esfera

ε_C – Tolerância ou acurácia estabelecida

ϕ – Potencial de velocidade

ϕ_i – Potencial interno de velocidade

ϕ_p – Arco dentro da placa

γ – Intensidade dos vórtices

$\gamma(S)$ – Intensidade da folha de vorticidade espúria

$\gamma(x)$ – Distribuição de vorticidade

η – Variável de similaridade

Γ – Circulação dos vórtices

Γ_C – Circulação de vórtices no corpo
 Γ_{corte} – Parâmetro numérico estabelecido para a etapa do cut off
 Γ_E – Circulação de vórtices na esteira
 λ – Intensidade de uma fonte
 μ – Intensidade de um dipolo
 μ_f – Viscosidade dinâmica do fluido
 ν – Viscosidade cinemática
 θ – Coordenada do sistema polar
 ρ – Massa específica
 σ – Raio do núcleo dos vórtices
 σ_{min} – Raio mínimo do núcleo dos vórtices
 σ_{max} – Raio máximo do núcleo dos vórtices
 τ – Tempo adimensional de simulação
 Ω – Velocidade angular de rotação
 ω – Vorticidade
 $\boldsymbol{\omega}$ – Vetor vorticidade
 ξ – Variável auxiliar de integração não dimensionável

Subscritos

i, j, k, n, p – Índices
 0,1 – Relativos à origem ou ao instante inicial
 1,2,a,b – Relativos aos pontos nodais
 ∞ – Relativo ao escoamento incidente

Sobrescritos

* – Variáveis adimensionais
 $\wedge$ – Relativo a velocidades induzidas por um painel com vorticidade unitária
 — – Valor médio
 k – Índice

Operadores

$\frac{D}{Dt}$ – Derivada material

$\frac{d}{dt}$ – Derivada ordinária

$\frac{\partial}{\partial t}$ – Derivada parcial

$\nabla \cdot$ – Divergente

∇ – Gradiente

$\| \parallel$ – Módulo

$\nabla \times$ – Rotacional

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A Mecânica dos Fluidos, por sua riqueza e complexidade, sempre exerceu um forte fascínio sobre grandes físicos e matemáticos. A seguir, será abordada sua evolução histórica, baseado em TEIXEIRA *et al.* (2005).

Arquimedes, no século III a.C., foi talvez o primeiro a examinar a estrutura interna dos líquidos. Ele chegou a afirmar que os fluidos não podem ter espaços vazios internamente, significando que eles devem ser contínuos (TOKATY, 1994). Ele teve também noção da pressão hidrostática de um fluido e de sua transmissão em todos os sentidos. No tratado de Arquimedes intitulado “Sobre os Corpos Flutuantes”, ele apresenta o princípio atualmente chamado de Princípio de Arquimedes. Na realidade, o trabalho de Arquimedes é consequência de várias proposições que ele faz no tocante ao comportamento dos sólidos em um fluido.

No século XVII, Simon Stevin procurou encontrar provas experimentais para as proposições de Arquimedes. Para isso ele propôs o chamado princípio de solidificação, onde um sólido de qualquer configuração, mas de mesma densidade que o fluido pode permanecer nesse fluido em completo equilíbrio, qualquer que seja sua posição, sem, contudo, perturbar a pressão no resto do fluido. Com base neste princípio, ele estabelece que a pressão seja independente da configuração do corpo e depende apenas do peso da coluna de líquido acima dele. Este princípio é conhecido como Princípio Fundamental da Hidrostática: a pressão sofrida pelo fundo de um vaso contendo um fluido depende apenas da área horizontal do fundo e da profundidade abaixo da superfície, mas não depende da forma do vaso.

Galileu Galilei, tentando entender o princípio de funcionamento do sifão, utiliza o conceito de velocidade virtual: uma pequena massa de líquido (contida num tubo estreito) pode ficar em equilíbrio com uma grande massa de líquido (contida num grande recipiente), pois uma pequena descida do nível do líquido no recipiente corresponde a uma grande subida do líquido no tubo. Estas observações e inferências permitiram Galileu apresentar

uma nova abordagem para os conceitos da hidrostática de Arquimedes, pois o próprio Arquimedes usara outro procedimento, ou seja, ele partiu de considerações estáticas, propriamente ditas, ao passo que Galileu, trabalhando com o conceito de velocidade virtual, utiliza um raciocínio com base na cinemática (DUGAS, 1988).

Em Florença, na corte do Grão-Duque, Galileu participa em 1611 de uma reunião amigável entre filósofos e cientistas de orientações diversas, que foram convidados por Cosimo II. O tema da conversa era a flutuação dos corpos e suas possíveis explicações. Galileu expôs e defendeu a tese de Arquimedes, segundo a qual o corpo flutua ou não dependendo de sua densidade ser menor ou maior que a do meio. Outros, ao contrário, defendiam a tese de Aristóteles, segundo a qual era a forma do corpo que determinaria seu comportamento no meio. Dessa discussão nasceria o “Discorso intorno alle cose che stanno in su l’acqua o che in quella si muovonno”, publicado em maio de 1612, onde além de trabalhar com os conceitos de peso absoluto e peso relativo, define e faz uso do conceito de momento. Como ainda não dispunha do conceito de massa, Galileu não concebia a grandeza peso como o produto da massa pela aceleração gravitacional, como a mecânica newtoniana posteriormente estabeleceria.

Benedetto Castelli foi autor de um tratado sobre medições de água corrente “Della misura dell’acque correnti”, em 1628. Desde a Antiguidade, e, em particular nos últimos séculos da Idade Média, a opinião mais aceita era que na natureza o vácuo seria impossível. Alguns fenômenos conhecidos, tais como o funcionamento de um sifão ou a subida de um líquido por um canudo, quando sugado, pareciam confirmar o princípio de que a natureza tinha um *horror vacui* (aversão pelo vácuo). As bombas hidráulicas pareciam funcionar segundo este princípio. Entretanto foi casualmente observado que estas bombas não podiam elevar a água a uma altura superior a 10 m. Galileu tentou explicar o fenômeno, mas a conclusão a que chegou foi apenas que parecia que o *horror vacui* da natureza era limitado. Na época de Galileu, um construtor projetou, para os jardins do duque de Toscana, uma bomba aspirante muito elevada, mas verificou-se que a água não podia ser aspirada a uma altura superior a 10 m. A explicação foi dada por um estudante de Galileu, Evangelista Torricelli, que foi seu sucessor na Academia de Florença. Torricelli afirmou: “Vivemos no fundo de um oceano de ar que, conforme mostra a experiência, sem dúvida tem peso”,

devendo, portanto, exercer sobre um corpo uma pressão atmosférica (NUSSENZVEIG, 2002).

NUSSENZVEIG (2002) e MARTINS (1989) afirmam que a experiência, hoje conhecida como “experiência de Torricelli”, foi, na realidade, realizada pelo seu colega Vincenzo Viviani em 1643. O importante é que foi constatado que, quando um tubo de mais ou menos um metro de comprimento era totalmente cheio com mercúrio e cuidadosamente vertido sobre uma cuba também contendo mercúrio, nem todo o metal acabava escorrendo, permanecendo no tubo uma coluna de 760 mm acima do nível do mercúrio na cuba. Constataram que qualquer que fosse o tamanho do tubo, desde que maior que 760 mm, no fim do processo descrito, sempre permanecia no tubo uma coluna de 760 mm de mercúrio. Em termos do princípio do *horror vacui*, era como se esta aversão da natureza pelo vácuo tivesse um limite, pois qualquer que fosse o caso, na parte superior do tubo parecia ter sido formado um vácuo. Entretanto, a explicação que estes pesquisadores deram para o fenômeno foi outra. Segundo eles, o responsável por este comportamento do mercúrio era a própria atmosfera, que deveria exercer uma pressão capaz de sustentar esta coluna de mercúrio de 760 mm e nada mais. Coube a Torricelli o mérito de ter obtido uma expressão relacionando a altura H_l de um líquido em um reservatório e a velocidade v_l com que o líquido deveria sair de um orifício pequeno feito na parte inferior de uma das paredes do reservatório: $v_l = (2gH_l)$.

Blaise Pascal desenvolveu os experimentos de Torricelli, utilizando água, em lugar do mercúrio. Mas como a água é 13.6 vezes menos densa que o mercúrio, a coluna de água num tubo de Torricelli deveria ser 13.6 vezes mais alta. De fato, as experiências de Pascal mostraram que a coluna de água media cerca de 10.30 m. Coube também a Pascal o mérito de ter desenvolvido os estudos feitos por Stevin no âmbito da hidrostática.

No século XVIII, Isaac Newton postulou que todo fluido consiste de esferas perfeitamente elásticas, situadas a igual distância uma da outra. Um corpo sólido de massa m_c e velocidade v_{cs} que move num tal meio deve transmitir quantidade de movimento ($m_c v_{cs}$) a todas as partículas do fluido com as quais ele tem contato durante o movimento. Segundo a teoria de Newton, a resistência experimentada por um corpo sólido com a forma

de um disco de área A_d , que se move com a velocidade v_{cs} num fluido de densidade será dada por: $R_c = \rho A_d (v_{cs})^2$.

Daniel Bernoulli, em seu livro “Hydrodynamica” publicado em 1738, estuda a relação entre a pressão e a velocidade num líquido ideal (viscosidade nula e incompressível), ao longo de um tubo horizontal, que parte do fundo de um reservatório. Depois de algumas considerações físicas, ele chega à seguinte expressão matemática conhecida como Equação de Bernoulli, isto é, a expressão: $p_{li} + \rho \frac{(v_{li})^2}{2} + \rho g h_{li} = \text{constante}$. Conta-se que esta expressão não foi obtida diretamente por Bernoulli, mas muito provavelmente por Joseph Louis Lagrange, com base na integração das equações diferenciais de Leonhard Euler, utilizando uma matemática mais avançada. Assim, TOKATY (1994) atribui a Euler o título de grande arquiteto da Mecânica dos Fluidos. A Equação de Bernoulli pode ser considerada a equação fundamental da hidrodinâmica dos escoamentos laminares de fluidos ideais não-compressíveis.

O físico italiano Giambattista Venturi combinou as leis de Leonardo da Vinci e de Bernoulli-Lagrange com o manômetro de Torricelli, construindo um dispositivo chamado tubo de Venturi. Com este dispositivo pode-se medir a velocidade da água em um tubo horizontal de área de seção reta, desde que seja provocado um estrangulamento no tubo.

Em fins do século XVIII, a hidrodinâmica havia chegado a um ponto, a partir do qual qualquer desenvolvimento posterior do assunto exigiria a introdução da viscosidade em suas equações.

Jean le Rond d'Alembert, estudando a resistência experimentada por um corpo sólido que se move com velocidade constante num fluido ideal e incompressível (fluido ao qual se aplica a Equação de Bernoulli) ficou surpreso ao constatar, depois de rigorosa análise matemática do problema, que esta resistência seria nula. Este resultado é um paradoxo, pois experimentalmente constata-se que, apesar de tudo, esta resistência existe e cresce com a velocidade com o que o corpo se move em relação ao fluido.

Durante o século XIX e início do século XX, a Mecânica dos Fluidos teve seu maior crescimento. No século XIX, Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes desenvolveram um conjunto de equações, as famosas Equações de Navier-Stokes, que descreveriam o movimento das substâncias fluidas tais como líquidos e gases. Estas equações estabelecem

que mudanças na quantidade de movimento e aceleração de uma partícula fluida são simplesmente o resultado das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas atuando no interior do fluido. No entanto, devido ao grau de complexidade destas equações, a obtenção da solução analítica é fechada apenas para uma pequena classe de problemas, onde diversas simplificações são necessárias.

Em 1904, Prandtl a partir de algumas considerações teóricas e de vários experimentos simples, mostrou que o escoamento ao redor de um corpo pode ser dividido em duas regiões: uma camada fina ao redor do corpo chamada de camada limite, onde as forças viscosas são importantes, e uma região externa ao corpo onde as forças viscosas podem ser desprezadas. Com este artifício, Prandtl pôde deduzir um conjunto de equações mais simples que as Equações de Navier-Stokes, as Equações da Camada Limite.

Mesmo com as simplificações de Prandtl, e com a utilização da hipótese de efeitos viscosos desprezíveis, que originou as equações de Euler, as Equações de Navier-Stokes ainda não possuem solução analítica geral. Neste contexto é que surgem as soluções numéricas, auxiliadas enormemente pelo concomitante progresso da computação eletrônica. A transformação de equações diferenciais parciais em sistemas de equações algébricas e as consequentes soluções aproximadas obtidas possibilitam a análise e a melhor compreensão dos escoamentos complexos que ocorrem em problemas reais de Engenharia.

Os métodos numéricos conhecidos atualmente podem ser classificados como aproximados, pois se originam do Método dos Resíduos Ponderados. Dentre estes, um dos mais difundidos, possuindo inclusive grande aplicação em programas computacionais comerciais, é o Método dos Volumes Finitos, apresentado em PATANKAR (1980) e em MALISKA (2004). Este método, juntamente com o Método das Diferenças Finitas, o qual se baseia na formulação original do Método dos Resíduos Ponderados e o Método dos Elementos Finitos, baseado nas formulações fracas do Método de Resíduos Ponderados, pertence a uma classe de métodos numéricos conhecidos como métodos Eulerianos, que possuem como característica principal a discretização da região fluida com auxílio de uma malha computacional, onde as grandezas de interesse são avaliadas.

Este trabalho utiliza uma combinação do Método de Vórtices, também denominado Método de Vórtices Discretos ou Método de Elementos de Vórtices, que é um caso particular do Método de Partículas (COTTET e KOUMOUTSAKOS, 2000), com o Método

dos Painéis, uma subclasse do Método de Elementos de Contorno, descrito detalhadamente em KATZ e PLOTKIN (2001), onde o primeiro se encarrega de simular a evolução da dinâmica do escoamento através da discretização do campo de vorticidade, tendo as leis de Helmholtz como base teórica, e o Método dos Painéis se encarrega de resolver o escoamento potencial, satisfazendo as condições de contorno no sólido.

Diferentemente do Método de Diferenças Finitas e do Método dos Elementos Finitos, os quais utilizam a abordagem Euleriana e discretizam o meio fluido em pontos de uma malha de cálculo, o Método de Vórtices emprega uma abordagem Lagrangiana e não discretiza o fluido em pontos de uma malha auxiliar, sendo, portanto, livre dos problemas inerentes aos métodos que utilizam malhas, como a dificuldade para representação de geometrias complexas e o problema da difusão numérica associada.

Esta metodologia, que não é restrita à análise de mecânica dos fluidos, se adequa naturalmente à simulação de escoamentos externos, incompressíveis e não-permanentes que se desenvolvem ao redor de corpos esbeltos, como aerofólios, e rombudos, como cilindros de seção circular ou retangular. Este tipo de escoamento ocorre em inúmeros problemas reais de diversas Engenharias, tais como a Engenharia Mecânica (escoamento em torno de corpos rombudos, bancos de trocadores de calor, pás de rotores de turbomáquinas), Aeronáutica (aerofólios de superfícies de sustentação e controle de aeronaves), Naval (*risers* e estruturas de plataformas *off-shore*, hélices de propulsores, aerofólios de superfícies de sustentação e de controle de embarcações submersas), dentre outras.

1.1. Motivação

Em aplicações de Engenharia há a necessidade do conhecimento das forças, momentos e distribuição de pressão devido ao escoamento de um fluido sobre um ou mais corpos. O escoamento ao redor da maioria dos corpos presentes nas aplicações conhecidas (veículos terrestres, aéreos e aquáticos, grandes estruturas como plataformas de prospecção de petróleo, torres de transmissão de energia elétrica, prédios e cabos da rede elétrica, etc.) é complexo, apresentando uma série de aspectos ainda não calculados. Estes corpos normalmente possuem formas rombudas, e são denominados de corpos rombudos.

O escoamento ao redor de corpos rombudos tem sido objeto de intensa pesquisa ao longo dos anos. Muitos trabalhos analíticos, numéricos e experimentais têm sido realizados.

Devido à sua simplicidade geométrica, o corpo rombudo mais estudado é o cilindro de seção circular, pois a simetria apresentada pela seção proporciona maior facilidade para a montagem de um aparato experimental ou mesmo para a construção de um modelo matemático. Em muitas situações práticas da Engenharia, como as citadas anteriormente, observa-se que a razão de aspecto, definida como a razão entre o comprimento e o diâmetro do cilindro, é muito elevada, e que os efeitos de compressibilidade são desprezíveis. Estes fatos motivam a modelagem teórica do escoamento como bidimensional e incompressível.

Os fenômenos observados no escoamento em torno de corpos rombudos possuem uma série de características complexas como consequência da interação de três camadas cisalhantes: a camada limite que se desenvolve na superfície do corpo, a camada cisalhante formada a partir dos pontos de separação e a esteira que se desenvolve à jusante do corpo. Neste caso, pode-se identificar duas regiões distintas: uma região essencialmente irrotacional e outra rica em vorticidade. O estabelecimento de uma região de gradiente de pressão adverso na superfície do cilindro provoca a separação da camada limite nas superfícies superior e inferior, e a consequente formação de camadas cisalhantes. As perturbações existentes no escoamento real promovem o desenvolvimento de instabilidades nas camadas cisalhantes, provocando o espiralamento destas e a formação de grandes vórtices. Para números de Reynolds suficientemente altos, estes vórtices se desprendem das superfícies superior e inferior do cilindro alternadamente, formando uma esteira constituída de pares de vórtices conectados entre si por folhas de vorticidade. A característica oscilatória desta esteira produz flutuações de pressão na superfície do cilindro, que resultam no aparecimento de forças aerodinâmicas (de arrasto e de sustentação) periódicas na direção transversal ao escoamento que podem causar ruídos e vibrações estruturais, podendo provocar até a ruptura do corpo. A clássica configuração resultante é denominada Esteira de Von Karman, ilustrada na Fig. 1.1.

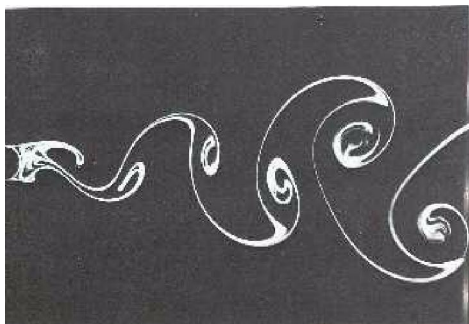


Figura 1.1 – Esteira de Von Karman para $Re = 140$

A característica não-permanente e a complexidade dos fenômenos físicos associados ao escoamento em torno de um cilindro circular impõem severas dificuldades para a sua análise teórica. Para escoamentos de baixo número de Reynolds, as teorias de Stokes e Oseen proporcionam modelos teóricos, resultantes da utilização de várias hipóteses simplificadoras. Extensões matemáticas destes modelos ampliam sua validade para números de Reynolds até 10 (ROSHKO, 1961). Além desta faixa de Reynolds, não existe solução analítica para corpo rombudo. Portanto, experimentações e simulações numéricas são as melhores formas de tratar problemas da aerodinâmica desses corpos. Os estudos experimentais visam não só o entendimento e análise dos fenômenos variados envolvidos no problema, como também permitem a medição do valor das forças aerodinâmicas desenvolvidas.

A característica que o escoamento em torno de corpos rombudos possui de concentrar toda a vorticidade do escoamento em uma região limitada do espaço (camada limite, camada cisalhante e esteira) propicia a aplicação do Método de Vórtices, que utiliza uma descrição Lagrangiana, livre de malhas auxiliares de cálculo, para simular a dinâmica do escoamento com um todo, a partir da evolução de uma nuvem de vórtices discretos, evitando, assim, alguns problemas relativos à utilização de malha, os quais são inerentes aos métodos Eulerianos, como o de Diferenças, Volumes e Elementos Finitos. Estes fatores motivaram, portanto, a utilização do Método de Vórtices para analisar o escoamento bidimensional, incompressível e não-permanente ao redor de um cilindro circular, no qual vórtices com distribuição linear são dispostos ao longo da superfície do corpo, e se movem por convecção e difusão de acordo com a Equação de Transporte de Vorticidade.

1.2. Descrição do Problema Físico

Os fenômenos físicos que caracterizam o escoamento bidimensional, incompressível e não-permanente ao redor de um cilindro circular imerso em um escoamento uniforme são dependentes do número de Reynolds, interpretado como a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas e definido como:

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho U d}{\mu_f} \quad (1.1)$$

onde d é o comprimento característico relacionado à geometria do corpo (neste caso, o diâmetro do cilindro), U , a velocidade característica (aqui, a velocidade do escoamento incidente no infinito), ρ , a massa específica e μ_f , a viscosidade dinâmica do fluido.

À medida que o número de Reynolds aumenta, observa-se, experimentalmente, a existência de diferentes regimes de escoamento, ilustrados no livro de VAN DYKE (1982) e descritos como:

- Para $\text{Re} < 1$: o escoamento ao redor de um cilindro circular é fortemente dominado pelos efeitos viscosos no regime denominado escoamento lento, onde a vorticidade gerada na superfície do cilindro devido à satisfação da condição de não-deslizamento se difunde para todo o escoamento, e não se observa efeitos inerciais (convectivos), o que resulta na existência de uma simetria tanto em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro do cilindro, como em relação ao eixo vertical.
- Para $1 < \text{Re} < 4$: o campo de vorticidade já apresenta sinais da ocorrência de um transporte convectivo não desprezível, quebrando a simetria em relação ao eixo vertical. A vorticidade é progressivamente confinada atrás do cilindro devido à convecção do escoamento, o que caracteriza o início do processo de formação de vórtices na esteira. O escoamento é totalmente permanente, pois todas as perturbações existentes são amortecidas pelas forças viscosas. A Fig. 1.2 ilustra o escoamento nesta faixa.

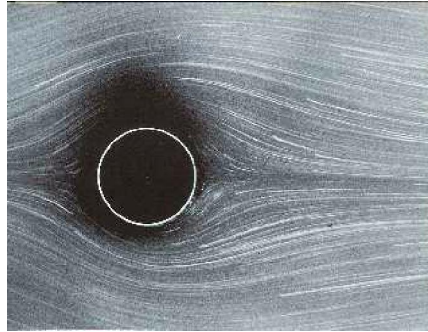


Figura 1.2 – Escoamento em torno de um cilindro circular para $Re = 1.54$

- Para $4 < Re < 40$: devido à forma geométrica do corpo, o escoamento próximo à superfície passa por uma forte desaceleração, formando uma região com gradiente de pressão adverso. O fluido não consegue se manter aderido à superfície do corpo e se divide em dois pontos de separação que se localizam na parte posterior do cilindro, formando uma bolha de recirculação nesta área. À medida que o número de Reynolds aumenta, observa-se o acúmulo de vorticidade devido ao movimento convectivo do fluido. Ocorre, então, a formação de dois vórtices estacionários na esteira, imediatamente atrás do cilindro. Estes vórtices permanecem aderidos à superfície anterior do cilindro, e são simétricos em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro do cilindro. Neste regime, a esteira é totalmente laminar e o escoamento ainda é totalmente permanente, conforme Fig. 1.3 para esta faixa.

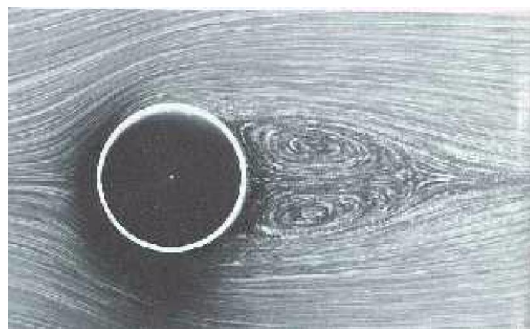


Figura 1.3 – Escoamento em torno de um cilindro circular para $Re = 26$

- Para $40 < Re < 80$: com o aumento relativo das forças inerciais, à medida que o número de Reynolds cresce, observa-se o desenvolvimento de instabilidades e lentas oscilações na esteira à jusante dos vórtices estacionários, que crescem na direção do escoamento incidente, causando um aumento na amplitude de oscilação e o espiralamento da esteira. Ocorre, então, a formação de vórtices posicionados ao longo de duas trilhas na direção do escoamento incidente, que se encontram deslocados uns dos outros ao longo desta linha, e com sentidos de rotação opostos, formando a esteira de Von Karman. Uma vez que, nesta faixa de valores de Reynolds, a trilha de vórtices não interage diretamente com o par de vórtices estacionários que se forma imediatamente atrás do cilindro, o escoamento evolui de um regime ainda essencialmente permanente nas vizinhanças do cilindro para um escoamento não-permanente à jusante dele, conforme representado na Fig. 1.4 extraída de KUNDU e COHEN (2002).



Figura 1.4 – Escoamento em torno de um cilindro circular para $Re = 55$

- Para $80 < Re < 200$: a partir de $Re = 80$, os vórtices estacionários aderidos à superfície do corpo crescem na direção do escoamento incidente até atingirem um comprimento de, aproximadamente, duas vezes o diâmetro do cilindro. Em seguida, a trilha de vórtices começa a se formar nas proximidades do corpo, fazendo com que os estacionários também comecem a oscilar. Finalmente, os vórtices estacionários se desprendem das superfícies superior e inferior do cilindro alternadamente, conforme Fig. 1.1., resultando em um escoamento não-permanente

na superfície do corpo. Este desprendimento alternado de vórtices com circulações de sinais opostos provoca uma força transversal oscilatória. O escoamento neste regime é bidimensional, e qualquer perturbação existente no escoamento é amortecida pela ação da viscosidade.

Para números de Reynolds superiores a 200, aproximadamente, efeitos tridimensionais se tornam importantes, mesmo para cilindros com razão de aspecto elevada. As forças de sustentação e arrasto de cilindros nominalmente bidimensionais sofrem o efeito deste fenômeno, e o coeficiente de arrasto calculado para simulações bidimensionais é maior que o obtido através de experimentos.

A passagem de vórtices regulares com a configuração da rua de Von Karman na esteira de um corpo rombudo causa o aparecimento de uma periodicidade dominante em medições de velocidade na esteira. A frequência associada a esta periodicidade é expressa como um parâmetro adimensional conhecido como número de Strouhal, St , expresso por:

$$St = \frac{fd}{U} \quad (1.2)$$

onde f é a frequência associada.

O número de Strouhal depende apenas do número de Reynolds e esta relação é plotada na Fig. 1.5, extraída de SCHLICHTING e GERSTEN (2000) que expressa os resultados experimentais obtidos por ROSHKO (1961). Os pontos experimentais foram obtidos para cilindros de diferentes diâmetros.

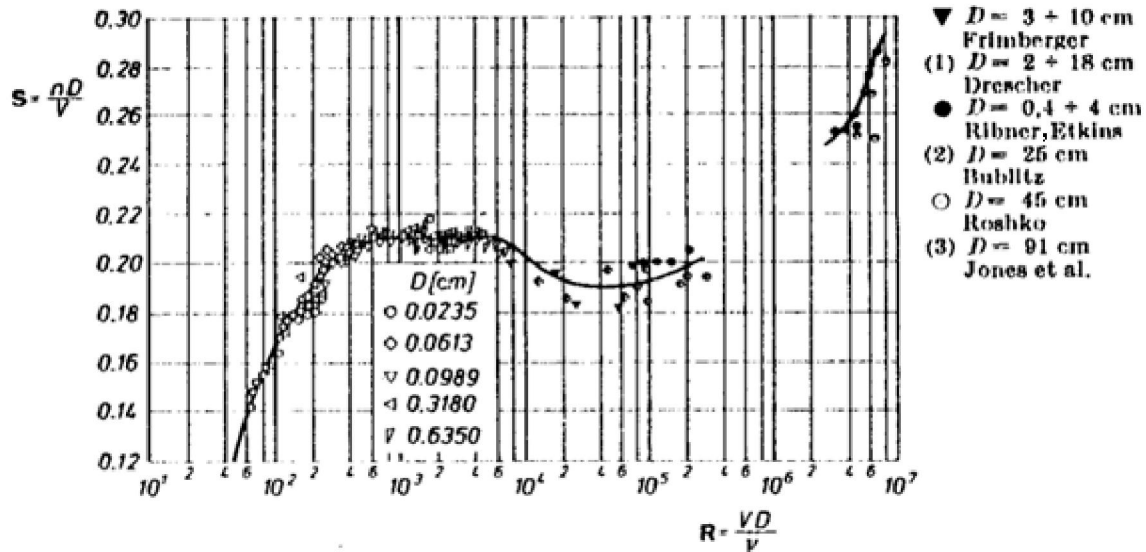


Figura 1.5 – Número de Strouhal para a rua de Von Karman em função do número de Reynolds para o cilindro de seção circular

- Para $200 < Re < 5000$: acima de $Re = 200$, a esteira se torna instável e irregular, e o escoamento no interior dos próprios vórtices se torna caótico. Segundo WILLIAMSON (1996), este fenômeno se deve ao surgimento de efeitos tridimensionais no escoamento, os quais já não são mais amortecidos pela ação da viscosidade e acabam influenciando o escoamento bidimensional dominante. Nesta faixa de Reynolds, a esteira tem uma forte componente de frequência próxima a $St = 0.21$.
- Para $5000 < Re < 2 \cdot 10^5$: para valores de Reynolds nesta faixa, a periodicidade da emissão de vórtices é pouco perceptível, e a esteira pode ser descrita como completamente turbulenta. No entanto, a separação da camada limite é laminar e como consequência, o coeficiente de pressão na superfície posterior do cilindro, à jusante do ponto de separação, permanece aproximadamente constante e mais baixo que a pressão à montante. O coeficiente de arrasto, por sua vez, permanece aproximadamente constante e em torno de 1.2 na faixa compreendida entre $10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$. O grupo adimensional varia muito pouco para esta faixa e seu valor se situa em torno de $St = 0.20$.

- Para $2 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$: a partir de $2 \cdot 10^5$ (BEARMAN, 1969, ROSHKO, 1961), o escoamento sofre uma transição para o regime turbulento. A princípio, há separação no escoamento laminar próximo à parede e o fluido se move na direção dos vórtices estacionários da esteira; ocorre, então, uma transição muito rápida, e o escoamento turbulento resultante recola novamente à parede, a uma pequena distância posterior à região de separação, formando uma bolha de separação laminar. A camada limite turbulenta se separa agora na parte posterior do cilindro (aproximadamente a 120° a partir do ponto de estagnação) reduzindo a zona de baixa pressão. Como a separação ocorre em um ponto mais à jusante que na faixa anterior, a recuperação de pressão é maior, e a distribuição de pressão na região da superfície do cilindro onde não há separação se assemelha à distribuição prevista pela teoria potencial. Como consequência, a esteira diminui sua extensão transversal ao escoamento e o coeficiente de arrasto cai até um valor mínimo em torno de 0.3, em $Re = 5.5 \cdot 10^5$, caracterizando a Crise do Arrasto. A partir deste valor, o coeficiente de arrasto volta a aumentar lentamente. Na região entre $Re = 3 \cdot 10^5$ e $Re = 3 \cdot 10^6$, a regularidade do processo de desprendimento de vórtices diminui, e o número de Strouhal apresenta muita dispersão experimental.
- Para $Re > 3 \cdot 10^6$: acima de $Re = 3 \cdot 10^6$, transição ocorre na própria camada limite, eliminando o processo de separação laminar e recolamento turbulento. Para $Re > 4 \cdot 10^6$, o número de Strouhal varia entre $St = 0.26$ e $St = 0.30$.

A existência de todos estes regimes de escoamento devido à variação do número de Reynolds torna a análise e a simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro circular extremamente complexa.

1.3. Descrição do Trabalho a Ser Desenvolvido

Neste trabalho, realiza-se um estudo numérico do escoamento ao redor de uma placa plana paralela à direção do escoamento incidente e do escoamento ao redor de um cilindro

bidimensional de seção circular. Utiliza-se neste estudo o Método de Vórtices acoplado ao Método dos Painéis.

O Método dos Painéis é um método numérico que discretiza a superfície do corpo sobre o qual o escoamento incide e não a região fluida, como os Métodos de Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos, apresentando grande vantagem pela sua simplicidade de modelagem e exatidão para o cálculo do escoamento potencial ao redor de corpos de geometria arbitrária. Além disso, o Método dos Painéis é bastante rápido em termos de tempo de processamento.

O Método de Vórtices utiliza a abordagem Lagrangiana para acompanhar a evolução da dinâmica do escoamento ao redor do corpo pela superposição da nuvem de vórtices gerada próxima à superfície do corpo. A solução da Equação de Transporte de Vorticidade é aproximada pela utilização de funções de base elementares carregadas pelos vórtices que mantém a dependência entre os campos de vorticidade e de velocidade através da utilização da lei de Biot-Savart.

Vórtices induzem um campo de velocidade singular e, por este motivo, são substituídos por modelos de vórtices com núcleos que tornam a velocidade finita em todos os pontos. A convergência do Método de Vórtices é garantida pelo recobrimento destes núcleos em toda a região rotacional do escoamento, porém, mecanismos de aglomeração de vórtices são utilizados para diminuir o número de vórtices que porventura estejam com excessivo recobrimento de seus núcleos.

De modo a reproduzir bem a física do escoamento, o algoritmo utilizado simula o processo de geração de vorticidade em toda a superfície do corpo, em cada instante de tempo, através da introdução de vórtices de Lamb de forma que as condições de contorno de não-escorregamento e impenetrabilidade na superfície sejam satisfeitas.

Uma vez que o problema intrínseco do Método de Vórtices é o aumento do tempo de computação à medida que a simulação avança no tempo, pode-se contornar este problema utilizando-se o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA) na etapa convectiva, com o intuito de diminuir para M o custo computacional desta etapa, que originalmente, pelo método direto vórtice-vórtice, é da ordem de M^2 , sendo M o número de vórtices presentes na simulação. Dentre os vários métodos disponíveis na literatura para simular o transporte difusivo de vorticidade (BARBA *et al.*, 2005a, BARBA *et al.*, 2005b),

utiliza-se neste trabalho o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), proposto por ROSSI (1996), ou o Método do Avanço Randômico (MAR), na versão proposta por LEWIS (1991), dependendo da aplicação. Os vórtices que entram no corpo são refletidos. Para as simulações finais, utiliza-se o esquema de 2ª ordem de Adams-Bashforth para o avanço dos vórtices no tempo.

O algoritmo de aglomeração de ROSSI (1997) é utilizado para realizar a fusão dos vórtices que se encontram com recobrimento excessivo de seus núcleos. Porém, devido ao seu custo computacional também ser da ordem de M^2 , realiza-se a aglomeração separadamente em cada caixa formada por ocasião da discretização espacial utilizada no MEMA para expansão em multipolos.

A determinação dos carregamentos sobre o corpo é realizada aplicando-se duas metodologias: LEWIS (1991) e WU (1981).

1.4. Objetivos

Este trabalho objetiva, em última análise, simular numericamente escoamentos externos, incompressíveis e não-permanentes que se desenvolvem ao redor de um cilindro de seção circular, utilizando o Método de Vórtices. A modelagem utilizada foi implementada na tese de doutorado de SANTIAGO (2008), sendo que neste trabalho, o esquema de discretização da superfície do corpo que, originalmente, era não uniforme, foi modificado para um esquema uniforme, por ser mais adequado para representar as geometrias dos corpos que serão objetos de estudo desse trabalho.

A seguir, os principais objetivos específicos deste estudo são listados:

- a) Implementar nova geometria para a placa plana, onde a discretização é realizada de maneira uniforme, e realizar simulações para o escoamento de Blasius ao redor desta para validação do método;
- b) Explorar o algoritmo final produzido por SANTIAGO (2008), modificado pelo novo esquema de discretização do corpo, através de sua aplicação à simulação do escoamento laminar ao redor de uma placa plana paralela ao escoamento. Este escoamento, por apresentar solução exata, serve de referência para a

solução numérica obtida. O algoritmo é explorado em termos de convergência e acurácia da solução numérica obtida.

- c) Realizar simulações para o escoamento ao redor de um cilindro circular e comparar os resultados numéricos obtidos com outros resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

Vale ressaltar que o modelo utilizado neste trabalho apresenta uma maneira inédita de implementação das condições de contorno na superfície do corpo, onde ambas as condições de não-penetração e não-escorregamento são impostas simultaneamente e explicitamente.

O trabalho desenvolvido é apresentado nos capítulos que se seguem. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica onde são mencionados e discutidos os trabalhos analíticos, experimentais e numéricos encontrados na literatura para o Método dos Painéis e para o Método de Vórtices. O Capítulo 3 apresenta as equações que constituem o modelo matemático utilizado. O método numérico desenvolvido encontra-se descrito no Capítulo 4, o qual contém as equações e o algoritmo propriamente dito. O Capítulo 5 apresenta a validação do modelo desenvolvido a partir da simulação do escoamento de Blasius ao redor de uma placa plana. No Capítulo 6, apresenta-se e discute-se os resultados da simulação do escoamento ao redor de um cilindro circular, utilizando o modelo computacional descrito nos capítulos anteriores. Comparações com resultados numéricos e experimentais também formam parte desta seção. As principais conclusões sobre o trabalho são listadas no Capítulo 7.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura especializada contém inúmeros artigos técnicos onde são estudados escoamentos em torno de corpos rombudos ou esbeltos utilizando abordagens analíticas, numéricas ou experimentais.

O contínuo interesse na busca de um conhecimento mais profundo sobre o problema, motivado pela simplicidade da configuração e a complexidade dos fenômenos físicos que acontecem no escoamento, reflete-se na evolução das técnicas desenvolvidas.

A seguir, são descritos os principais trabalhos experimentais, analíticos e de simulação numérica desenvolvidos para escoamentos externos ao redor de corpos, que servirão como base teórica para a formulação do modelo numérico proposto neste trabalho e como fonte de dados de comparação e avaliação dos resultados obtidos.

2.1. Trabalhos Experimentais

Devido à enorme complexidade dos fenômenos físicos relacionados ao escoamento ao redor de corpos, é de suma importância que medições experimentais sejam feitas em condições controladas, seja no laboratório ou no campo. As simulações numéricas buscam retratar os fenômenos físicos tão próximos da realidade o quanto possível. Desta forma, a comparação com resultados experimentais adequados é de vital relevância para a validação de um código computacional.

No caso de cilindros circulares, devido a um grande número de trabalhos experimentais realizados, as características físicas dos escoamentos são conhecidas para uma ampla faixa de valores do número de Reynolds, até aproximadamente 10^7 . Uma revisão completa e detalhada pode ser vista em MALTA (1998). Estudos experimentais das características destes escoamentos em função do número de Reynolds trouxeram conhecimentos a respeito da formação da camada limite laminar, sua transição para camada limite turbulenta,

separação, formação de camadas cisalhantes e emissão de vorticidade gerada na superfície do corpo para a esteira viscosa formada à jusante. Os estudos experimentais realizados para cilindros circulares fornecem informações importantes sobre fenômenos físicos que ocorrem em escoamentos ao redor de corpos rombudos. Dentre os inúmeros trabalhos experimentais, vale citar ROSHKO (1961), ACHENBACH (1968), BEARMAN (1969), e WILLIAMSON (1988).

ROSHKO (1961) fez um estudo experimental em túnel de vento variando o número de Reynolds entre 10^6 e 10^7 e mostrou que o coeficiente de arrasto varia de, aproximadamente, 0.4 em $Re = 10^6$, até 0.7 em $Re = 3.5 \cdot 10^6$, permanecendo constante a partir deste ponto. ROSHKO (1961) observou também que, a partir deste número de Reynolds, o número de Strouhal varia entre $St = 0.26$ e $St = 0.30$. Este é um dos estudos experimentais mais completos, pois apresenta gráficos da variação do coeficiente de arrasto e número de Strouhal em função do número de Reynolds, e da distribuição de pressão na superfície do cilindro.

ACHENBACH (1968) fez um estudo experimental onde foram medidos os coeficientes de pressão e de atrito ao longo da superfície do cilindro, bem como o coeficiente de arrasto e a variação do ângulo de separação com o número de Reynolds. Devido a este trabalho, o escoamento passou a ser classificado em subcrítico (onde ocorre a separação laminar da camada limite em $5 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$), crítico (onde ocorre a formação de uma bolha de separação laminar com recolamento turbulento, $2 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$) e supercrítico (zona de transição da camada limite laminar para turbulenta, com separação turbulenta, $Re > 3 \cdot 10^6$).

Estudos experimentais para números de Reynolds dentro do regime crítico foram realizados por BEARMAN (1969) que observou que, quando o coeficiente de arrasto é mínimo, para número de Reynolds de $5.5 \cdot 10^5$, o número de Strouhal tem um valor máximo de 0.46. Dados para os coeficientes de arrasto e sustentação foram apresentados para três outros valores do número de Reynolds dentro da faixa de $1.0 \cdot 10^5$ até $7.5 \cdot 10^5$.

WILLIAMSON (1988) estudou a descontinuidade que existe no gráfico do número de Strouhal em função do número de Reynolds entre $3 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$. Ele mostrou que esta descontinuidade se deve à presença de efeitos tridimensionais.

Estas compilações de resultados experimentais constituem referências importantes para a validação de resultados numéricos obtidos a partir de simulações computacionais.

2.2.Trabalhos Analíticos

A revisão bibliográfica a seguir tem o objetivo de descrever cronologicamente a evolução dos trabalhos analíticos que têm sido desenvolvidos para estudar o problema do escoamento de um fluido ao redor de corpos rombudos (cilindros circulares, especificamente) imersos em um escoamento.

SARPKAYA (1963) realizou um dos trabalhos analíticos mais importantes a respeito do escoamento sobre um cilindro circular. Expressões gerais para os coeficientes de arrasto e sustentação foram calculadas e os efeitos do escoamento incidente, dipolo (fonte e sumidouro de intensidades iguais dispostos a uma distância infinitesimal), vórtices discretos e suas imagens foram incluídos. No entanto, a imagem no centro introduzida em seus cálculos foi omitida em trabalhos posteriores por afetar as condições de contorno no infinito.

O estudo teórico do escoamento em torno de um cilindro circular para valores de números de Reynolds finitos foi realizado por WANG (1967), expandindo as variáveis do escoamento, da região rotacional e potencial, para satisfazer as condições de contorno na superfície do corpo nas regiões interna e externa do escoamento, através de uma série de potências de tempo. A formulação de WANG (1967) foi composta a partir da soma das soluções das duas expansões, a interna e a externa, e subtraindo a parte comum. O autor derivou analiticamente as duas primeiras aproximações, nas quais a pressão é constante através da camada limite. Na terceira aproximação, a pressão inicia uma variação através desta camada viscosa.

COLLINS e DENNIS (1973b) estudaram o escoamento ao redor de um cilindro circular iniciado impulsivamente a partir do repouso através de uma expansão em série de potências de tempo. Os autores formularam o problema em variáveis da camada limite, derivando soluções unicamente para a região interna ou rotacional sem considerar a região potencial. As primeiras aproximações da expansão foram obtidas analiticamente e as posteriores, até a sétima ordem, foram calculadas numericamente. Seus resultados mostraram uma boa

aproximação do instante em que o fluido começa a separar do cilindro para os casos desde $Re = \infty$ a $Re = 200$. O resultado do coeficiente de arrasto, nos instantes iniciais, mostrou que os arrastos por fricção e pressão são iguais para todos os números de Reynolds.

A teoria de camada limite foi apresentada de forma detalhada por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) e especificamente para a camada limite laminar, por ROSENHEAD (1963).

2.3.Trabalhos Numéricos

DENNIS e CHANG (1970) utilizaram o Método de Diferenças Finitas para simular o escoamento bidimensional de um fluido que escoa de maneira incompressível ao redor de um cilindro circular para números de Reynolds compreendidos na faixa de 5 a 100. Neste trabalho foram calculados valores para o coeficiente de arrasto, ângulo de separação e distribuições de vorticidade e pressão sobre a superfície do cilindro, em uma simulação para tempos pequenos.

CHORIN (1973) introduziu o Método de Vórtices para a solução das Equações de Navier-Stokes aplicadas ao escoamento ao redor de corpos rombudos. Este algoritmo foi utilizado em particular para simular o escoamento ao redor de um cilindro circular. Ele propôs o primeiro algoritmo completo do Método de Vórtices, o qual é constituído por três partes: a primeira consiste em satisfazer a condição de escorregamento nulo na parede; na segunda parte, o processo de convecção não-viscoso é resolvido, utilizando a lei de Biot-Savart, e por último, o transporte dos vórtices discretos por difusão viscosa é simulado através do Método de Avanço Randômico. Para $Re = 10^4$, o valor do coeficiente de arrasto obtido foi $C_D = 0.87$, aproximadamente 2/3 do valor experimental, e para $Re = 10^5$, este valia $C_D = 0.27$, muito inferior ao obtido experimentalmente. O autor supôs que a representação grosseira da camada limite provocou uma ocorrência prematura da Crise do Arrasto.

COLLINS e DENNIS (1973a) apresentaram um algoritmo numérico, que consistia no emprego do método implícito de Crank-Nicolson, para solução das Equações de Navier-Stokes, válido somente enquanto a esteira se comportava de maneira simétrica. Os autores

simularam o crescimento da esteira à jusante do cilindro para $Re = 40$, 100 e 200 . O cálculo da distribuição de pressão para $Re = 500$ apresentou concordância razoável quando comparado com os dados experimentais.

KUWAHARA (1978) utilizou vórtices discretos para simular um escoamento bidimensional no qual ocorria emissão de vórtices nos pontos de separação de um cilindro circular. No instante inicial, 64 vórtices pontuais estavam presentes no escoamento e 2 vórtices foram introduzidos na parte superior e inferior do cilindro a cada passo de tempo. Cálculos feitos para $Re = 10^4$ produziram resultados para o coeficiente de arrasto ao redor da metade dos obtidos experimentalmente.

PORTHOUSE e LEWIS (1981) desenvolveram um algoritmo para simular escoamentos bidimensionais ao redor de cilindros circulares e placas planas. Para o corpo rombudo, a geração de vórtices foi localizada em pontos de separação fixos e foram obtidos resultados para a frequência de desprendimento dos vórtices, e forças de sustentação e arrasto para números de Reynolds entre 200 e $2 \cdot 10^4$. Os resultados obtidos para a placa plana, reconstruindo o perfil de Blasius, forneceram uma explicação para a separação do escoamento e mostraram qualitativamente a turbulência bidimensional que acontece na camada limite.

KAMEMOTO e KAWAMATA (1986) utilizaram o Método dos Painéis com distribuição de singularidades do tipo vórtices. O algoritmo utilizado permitia apenas que a condição de impenetrabilidade na superfície do cilindro circular fosse satisfeita.

SMITH e STANSBY (1988) utilizaram um algoritmo de Método de Vórtices (isento de malhas) associado ao Método do Vórtice em Célula, o que determinou o emprego de uma abordagem híbrida (Lagrangiana-Euleriana) para solucionar a Equação de Transporte da Vorticidade. Os resultados apresentaram boa concordância quando foram introduzidos 20 vórtices ao redor do cilindro a cada passo no tempo. As simulações foram realizadas para números de Reynolds entre $2.5 \cdot 10^2$ e 10^5 e apenas para tempos adimensionais pequenos.

Em MUSTTO *et al.* (1997), MUSTTO (1998) e MALTA (1998) foi apresentado um novo algoritmo para simular o escoamento ao redor de um cilindro circular com e sem rotação, utilizando o Método de Vórtices associado ao Teorema do Círculo, que permitiu a satisfação das condições de impenetrabilidade e não-escorregamento na superfície do corpo simultaneamente. Os vórtices foram deslocados por convecção e difusão, sendo que os

efeitos difusivos foram simulados através do Método de Avanço Randômico. Em MUSTTO (1998) foram mostrados resultados para a simulação do escoamento incompressível ao redor do cilindro circular e número de Reynolds de 10^5 , bem como um estudo da influência dos parâmetros numéricos do algoritmo implementado por MUSTTO *et al.* (1997) e MALTA (1998). MALTA (1998) realizou um estudo variando o número de Reynolds entre 10^3 e 10^6 . Os resultados das simulações mostraram boa concordância com resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura.

GUO *et al.* (1998) apresentaram um Modelo de Diferenças Finitas aplicado à Equação de Navier-Stokes bidimensional na formulação vorticidade – função corrente para números de Reynolds da ordem de $10^3 - 10^4$. Os autores utilizaram um novo esquema misto de terceira ordem avançado com quarta ordem centralizado para a discretização da Equação de Transporte da Vorticidade e segunda ordem centralizada para a função corrente. Foram apresentados resultados para cilindro circular e elíptico, e as influências da condição inicial, da discretização espacial e temporal aplicadas foram discutidas.

PEREIRA (1999) apresentou uma nova maneira de calcular a Lei de Biot-Savart a fim de reduzir o tempo computacional. Utilizando o Método dos Painéis com distribuição de vórtices constante associado ao Método de Vórtices, o autor obteve resultados com boa concordância com resultados experimentais para escoamentos de altos números de Reynolds ao redor de um cilindro circular. Neste algoritmo, as condições de impenetrabilidade, não-eskorregamento e conservação de vorticidade são atendidas a cada passo no tempo.

Em GUEDES *et al.* (1999a), o Método de Expansão em Multipolos foi aplicado ao algoritmo desenvolvido por MUSTTO (1998) e MALTA (1998) a fim de reduzir o custo computacional do método desenvolvido. Uma simulação de alta resolução foi realizada com a criação de 64 vórtices a cada passo no tempo (o máximo utilizado em MUSTTO (1998) e MALTA (1998) foi 32 vórtices). O escoamento ao redor de um cilindro circular foi simulado até um tempo adimensional igual a 40 para número de Reynolds de 10^5 .

2.3.1. Método dos Painéis

Soluções analíticas para o escoamento potencial, como a Transformada Conforme, são encontradas na literatura. No entanto, a dificuldade em se lidar com geometrias arbitrárias faz com que seja necessário recorrer à utilização de soluções numéricas.

Existe uma classe de métodos numéricos com grande uso em Mecânica dos Fluidos que se baseia na discretização da superfície de contorno, chamado de Método dos Elementos de Contorno. O Método dos Painéis é uma particularização desse método e se destaca pela sua larga aplicação na indústria para a análise de escoamentos potenciais ao redor de corpos rombudos e esbeltos.

LEWIS (1981) apresentou a combinação do Método de Vórtices com o Método dos Painéis, facilitando a aplicação do Método dos Vórtices a problemas que envolvam o escoamento ao redor de geometrias complexas. Uma revisão histórica e características detalhadas do método podem ser vistas em HESS (1990).

Para a satisfação da condição de contorno nos painéis, o Método dos Painéis fornece a intensidade das singularidades que são dispostas na superfície do corpo. Estas singularidades são representadas por funções básicas que, devido ao seu decaimento, satisfazem implicitamente a condição de contorno no infinito.

Vários tipos de singularidades podem ser utilizados, com diversos tipos de distribuição sobre a superfície. PEREIRA *et al.* (2004) analisaram sistematicamente algumas possibilidades de escolha de singularidades, restritas a distribuições de ordem constante e linear. No mesmo ano, PEREIRA e BODSTEIN (2004) ampliaram esta análise, implementando os métodos com função de distribuição quadrática.

Neste trabalho, o Método dos Painéis é utilizado para calcular a contribuição do corpo no escoamento, com intuito de possibilitar a simulação de uma geometria arbitrária.

2.3.2. Método de Vórtices

A literatura com respeito a métodos Lagrangianos é consideravelmente extensa, sobretudo no contexto do Método de Vórtices. Este pode ser dividido em dois tipos básicos, de acordo com a maneira que o campo de velocidade é calculado. O primeiro, denominado

vórtice em célula, calcula o valor da função corrente nos nós de uma malha auxiliar de cálculo, e a partir deste ponto, a velocidade é calculada por diferenças finitas nesta malha. O segundo pode ser classificado como completamente livre de malhas pelo fato de calcular o campo de velocidade a partir do campo de vorticidade, utilizando, para isto, a lei de Biot-Savart.

A primeira tentativa de simular um escoamento através da modelagem do campo de vorticidade por meio de vórtices discretos foi feita por ROSENHEAD (1931), cujos cálculos manuais utilizando vórtices potenciais já mostravam resultados que apresentavam uma grande semelhança com o escoamento estudado. Porém, a simulação tornava-se rapidamente instável, gerando um movimento caótico dos vórtices após alguns passos de tempo. Mesmo com o advento da computação científica, que permitiu a discretização da vorticidade em um número maior de vórtices, as simulações conduzidas por este modelo ainda não convergiam, uma vez que este esquema gerava altas velocidades induzidas.

Posteriormente, passou-se a utilizar vórtices com núcleos finitos, onde as velocidades dentro do núcleo são suavizadas por alguma função especial, permitindo, assim, uma simulação mais real dos efeitos viscosos do escoamento. Vários esquemas para limitação do campo de velocidade dos vórtices em simulações bidimensionais têm sido propostos. SPREITER e SACKS (1951) utilizaram o vórtice de Rankine para desingularizar a velocidade induzida pelo vórtice pontual, por este ser uma primeira aproximação do núcleo de um vórtice real. KUWAHARA e TAKAMI (1973) usaram o vórtice de Lamb de núcleo variável, com o argumento que este descreve a solução exata para a difusão de vorticidade de um único vórtice em um fluido viscoso. CHORIN e BERNARD (1973), utilizaram o vórtice de Lamb de núcleo fixo.

Segundo KAMEMOTO (1994), o Método de Vórtices é dividido em três classes, de acordo com a maneira pela qual a vorticidade gerada no corpo é transportada para o meio fluido. A primeira libera vórtices apenas nos pontos de separação que são supostamente conhecidos; a segunda utiliza uma aproximação da camada limite para calcular os pontos de separação sobre a geometria considerada e os vórtices são gerados a partir da espessura de deslocamento da camada limite; a terceira classe modela a vorticidade presente na camada limite por vórtices, que são gerados em toda a camada limite da superfície do corpo e são transportados por convecção e difusão para todo o escoamento, fazendo com que a

separação ocorra como um resultado natural da simulação. Ainda neste artigo, propôs um modelo para geração da vorticidade na superfície, baseado na aproximação de camada limite. Segundo este modelo, uma folha de vorticidade é transferida inicialmente ao fluido, ficando livre para se movimentar por ação da difusão e convecção, sendo transformada em um vórtice pontual ao atingir uma determinada distância do corpo. Foram apresentados resultados para cilindro retangular e esfera. Este esquema de geração demonstra a grande preocupação de se obter uma boa representação da vorticidade nas proximidades da superfície, uma vez que a influência desta região no cálculo das forças e na determinação da vorticidade gerada no corpo é fundamental para a obtenção de bons resultados.

CLARKE e TUTTY (1994) desenvolveram uma metodologia para simular escoamentos impulsivos ao redor de corpos de geometria arbitrária, associando o Método de Vórtices com o Método dos Painéis, empregando painéis curvos, e simulando os efeitos viscosos com uma combinação do Método do Avanço Randômico com o Método da Velocidade de Difusão (MVD). O custo computacional da etapa convectiva foi diminuído a partir de um algoritmo de decomposição. Os autores validaram o código computacional utilizando dados experimentais e numéricos dispostos na literatura, comprovando que o método desenvolvido possuía acurácia semelhante à encontrada por códigos de diferenças finitas, sem, no entanto, apresentar a difusão numérica relacionada à utilização de malha.

WALTHER e LARSEN (1997) utilizaram o Método de Vórtices para simular o escoamento bidimensional incompressível viscoso sobre uma placa plana de espessura e comprimento finitos. Os autores empregaram uma nova abordagem para correlacionar os campos de velocidade e de vorticidade, e para determinar a vorticidade na superfície da placa, assim como utilizaram uma eficiente técnica de matriz de influência para o cálculo da convecção via multipolos. Os resultados numéricos encontrados foram comparados com a solução de Blasius para placa plana e, para o caso não viscoso, com a solução de Theodorsen para placa plana oscilatória, apresentando boa concordância com resultados experimentais e numéricos obtidos na literatura.

PEREIRA (1999) simulou o escoamento ao redor de um cilindro circular e ao redor de um aerofólio NACA 0012 para o ângulo de ataque de 5° , limitando o número de vórtices com um esquema de eliminação e realizando a conservação da circulação conforme

proposto por LEWIS (1991). Devido a limitações computacionais, ainda foi utilizado o esquema de eliminação de vórtices, o que reduz a resolução do campo de vorticidade.

COTTET *et al.* (2000) apresentaram uma metodologia para aproximação das equações de Navier-Stokes, utilizando vórtices pontuais com tamanho de núcleos diferenciados, com o objetivo de se obter diferentes níveis de discretização para diferentes regiões do escoamento, como a camada limite e a esteira viscosa, aumentando a eficiência computacional quando comparada aos métodos que utilizam vórtices com tamanho de núcleo fixo. Os resultados foram validados através da implementação de problemas de escoamentos ao redor de cilindros e interações de vórtices com paredes.

PLOUMHANS e WINCKELMANS (2000) desenvolveram um modelo para redistribuir as partículas no escoamento ao redor de um corpo de geometria arbitrária. O Método de Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP) foi alterado para as partículas próximas ao corpo para evitar fluxo anômalo de vorticidade durante a etapa difusiva. A convergência quadrática do esquema foi verificada matematicamente e por diversas simulações conduzidas e a validação obtida através da comparação com o problema do escoamento impulsivo ao redor de cilindro.

ROUVREAU e PERAULT (2001) simularam o escoamento bidimensional e incompressível ao redor de um cilindro circular através de um código numérico baseado no Método de Vórtices, onde a condição de não-deslizamento foi satisfeita a partir da consideração da espessura do elemento de superfície, parâmetro desprezado nas metodologias usuais. A etapa difusiva foi calculada através da utilização de um método determinístico baseado na solução da Equação do Calor. Os autores apresentaram resultados para os coeficientes de sustentação e arrasto, campos de velocidade e de vorticidade e o número de Strouhal, que foram concordantes com a literatura disponível.

YANG *et al.* (2003) aplicaram o Método de Vórtices para simular o escoamento ao redor de uma placa plana e de um cilindro, satisfazendo as condições de contorno de impenetrabilidade e não-escorregamento simultaneamente. Para tanto, os autores utilizaram singularidades do tipo fonte e vórtice na superfície, que formam as incógnitas do sistema linear a ser resolvido, onde a primeira satisfaz a condição de Neumann para impenetrabilidade e a segunda, a condição de Dirichlet para não-escorregamento. Os autores também apresentaram uma formulação para determinação da distância de

nascimento dos vórtices, na qual a condição de não-escorregamento continuava sendo válida. Os resultados foram comparados com valores experimentais e analíticos, apresentando boa concordância.

ZHU e KAMEMOTO (2003) apresentaram uma metodologia baseada no Método de Vórtices para simular o escoamento ao redor de corpos, onde os campos de velocidade e pressão foram obtidos através de formulações integrais. Utilizaram, ainda, o Método do Crescimento do Núcleo com um algoritmo de aglomeração para simular a etapa difusiva do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro circular, que foi validado por experimentos e simulações de outros autores.

BARBA *et al.* (2005a) desenvolveram uma modificação do Método de Vórtices, tornando-o completamente livre de malhas, diferentemente dos métodos que utilizam técnicas de troca de intensidade entre partículas. No trabalho apresentado, foi empregado o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) na etapa difusiva, e a adaptação espacial foi realizada utilizando-se a interpolação de funções básicas radiais, controlando automaticamente o tamanho do núcleo dos vórtices e, dessa forma, garantindo a convergência. Esta metodologia proporcionou um ganho considerável nas simulações com vórtices na descrição Lagrangiana, ao mesmo tempo em que permitiu simulações em múltiplas escalas com várias resoluções.

BARBA *et al.* (2005b) citaram como deficiências do Método de Vórtices, o custo computacional da utilização da lei de Biot-Savart, o tratamento da difusão na descrição Lagrangiana e a perda de acurácia devido à distorção Lagrangiana dos elementos computacionais. A primeira limitação citada foi resolvida pela utilização de aceleradores multipolos e a segunda, através dos diferentes métodos desenvolvidos para lidar com a difusão viscosa. Em relação à terceira limitação, os autores sugeriram a interpolação com funções radiais básicas, permitindo o controle do tamanho do núcleo dos vórtices quando se aplica o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido, ou quando se busca uma resolução variável no domínio físico.

BOUFERROUK e CHERNYSHENKO (2005) utilizaram a regularização de Tikhonov no Método de Vórtices para simular um escoamento bidimensional não-viscoso em placa plana, que sem esse artifício, se torna instável, e em um cilindro de seção circular, que teve seu ruído diminuído pela regularização proposta.

ROSSI (2005) utilizou funções básicas Gaussianas elípticas e deformáveis, para representar o campo bidimensional de uma grandeza escalar, em um escoamento incompressível. Estas funções se movimentam e se deformam para simular a evolução do escoamento em estudo, de acordo com um equacionamento para a velocidade, rotação, extensão e deformação dos elementos. O autor conseguiu acurácia espacial de quarta ordem, ajustando o centróide das funções básicas com o resíduo do método numérico por ele apresentado.

ROSSI (2006a) comparou os resultados de simulações de escoamentos bidimensionais e incompressíveis, utilizando funções básicas Gaussianas e axisimétricas, com os resultados obtidos com funções básicas Gaussianas elípticas e deformáveis. Os resultados para um problema de deformação e difusão em uma distribuição elipsóide de um escalar imerso em um escoamento com linhas de corrente circulares e fechadas apontaram diversas vantagens para a abordagem com elementos deformáveis, como a utilização em problemas cuja resolução requerida seja significativamente maior, e a menor necessidade de correção devido a sua inconsistência.

ROSSI (2006b) apresentou duas técnicas para aproximação da integral de Biot-Savart na avaliação de funções Gaussianas elípticas e deformáveis, através da aplicação de uma pequena perturbação na função corrente, a qual somente é aplicável para interações diretas entre os elementos computacionais. O autor também apresentou um estudo da aplicação de aceleradores multipolos para as funções elípticas Gaussianas deformáveis, introduzindo uma nova escala computacional e limitando a eficiência da expansão em multipolos. Esta deficiência foi minimizada através da imposição de um limite inferior para o tamanho das caixas, permitindo uma aproximação acurada a partir de uma tolerância estabelecida.

WEE e GHONIEM (2006) apresentaram um método, o Método de Redistribuição de Vorticidade (MRV), que realiza simultaneamente a difusão da vorticidade e a reordenação da malha de cálculo no Método de Vórtices. O escoamento evolui no tempo realizando dois subpassos, sendo que o primeiro é fruto da convecção dos vórtices de acordo com o campo de velocidade, enquanto o segundo se encarrega da difusão viscosa e da reordenação da malha através do uso da interpolação. A estabilidade e o erro da semente de interpolação foram avaliados, demonstrando que o esquema pode ser utilizado com sucesso inclusive em problemas complexos com difusão não-linear.

COCLE *et al.* (2007) apresentaram uma modelagem do Método de Vórtices que permitiu reduzir a região de malha dos métodos tradicionais de vórtice em célula, uma vez que esta é super dimensionada se comparada à região rotacional do escoamento, devido a necessidade de se garantir a satisfação da condição de contorno para o escoamento não perturbado, imposição que acarreta um custo computacional muitas vezes inviável. Deste modo, os autores trabalharam com uma região estritamente rotacional, dividindo este domínio em sub-regiões, onde as condições de contorno são satisfeitas utilizando-se o método paralelo de multipolos. Esta combinação dos métodos de vórtice em célula e paralelo de multipolos conduziu a uma solução mais acurada e com menor custo computacional.

ELDREDGE (2007) apresentou uma metodologia para o Método de Vórtices que utiliza um avanço no tempo intermediário para avaliar a intensidade de folhas de vorticidade que devem satisfazer a condição de não-deslizamento ao terem sua vorticidade transmitida para os vórtices adjacentes. O autor utilizou uma malha cartesiana para calcular os valores de vorticidade a cada passo no tempo, forçando a satisfação do teorema de Kelvin pela redistribuição da vorticidade gerada na superfície para os vórtices, durante a etapa da difusão das folhas de vorticidade. Foram feitas diversas análises quanto à estabilidade e convergência para os parâmetros numéricos utilizados, em particular, a avaliação da velocidade de deslizamento residual. O método apresentou boa concordância com dados experimentais e numéricos.

ZHAO *et al.* (2007) introduziu um novo modelo do Método de Vórtices, denominado Método de Transporte de Vórtices Generalizado, que consiste em utilizar uma descrição híbrida Lagrangiana-Euleriana, onde o campo de vorticidade é determinado através do transporte de circulação em um campo de velocidade artificial, recorrendo-se à Equação de Poisson para se estabelecer o campo de velocidade na descrição Lagrangiana. O Processo de Transporte Generalizado leva em conta o movimento e a variação da área de circulação dos vórtices, ou seja, considera simultaneamente os fenômenos de convecção e difusão viscosa. O método se mostrou capaz de simular escoamentos em cilindros, capturando fenômenos na proximidade da parede como separação e variação de velocidade tangencial.

2.3.3. Convecção – Métodos de Expansão em Multipolos

Cada etapa do Método de Vórtices tem sido trabalhada individualmente por diversos pesquisadores, com o intuito de produzir um método numérico mais preciso e com menor custo computacional. Os métodos de multipolos foram desenvolvidos a fim de acelerar a etapa convectiva do Método de Vórtices, que possui um custo computacional da ordem de M^2 , onde M é o número de vórtices necessários para uma boa discretização da região rotacional do escoamento, a partir do cálculo do campo de velocidade induzido por pólos, hierarquizando-se a influência de acordo com a distância e com a densidade de vórtices presentes em cada região. BARNES e HUT (1986) apresentaram um esquema partícula-caixa que promoveu a redução do custo computacional para $M \log M$, enquanto GREENGARD e ROKHLIN (1987) e CARRIER *et al.* (1988) propuseram um esquema caixa-caixa que reduziu esta para ordem de M .

STRICKLAND *et al.* (1999) desenvolveram um algoritmo de multipolos com aplicação em problemas de radiação tridimensional e problemas de escoamentos tridimensionais. Este algoritmo foi desenvolvido para computação paralela, o que resultou em um custo computacional de ordem menor que M^2 e maior que M ou $M \log M$.

IHLER (2004) mostrou os resultados alcançados pela utilização de um método de expansão em multipolos que se baseia em aproximações matriciais de bandas baixas, discutindo o método heurístico de aproximações matriciais em bloco e a formação das expansões analíticas que formam a base dos métodos de expansão em multipolos. O algoritmo permitiu a redução do custo computacional para a ordem de M .

SANTIAGO *et al.* (2006) realizaram simulações ao redor de corpos, aplicando o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA) na etapa convectiva, proporcionando a redução do tempo de processamento para a ordem M , a cinco nuvens de vórtices diferentes, que representam possíveis configurações geométricas instantâneas de esteiras viscosas.

2.3.4. Difusão Viscosa

Em CHORIN (1973), a difusão viscosa foi simulada através do Método do Avanço Randômico (MAR), baseado na concepção do movimento Browniano de Einstein, para aplicação em escoamentos com alto número de Reynolds. Este é o primeiro modelo de Método de Vórtices que considera os efeitos viscosos e possui a vantagem de possuir baixo custo computacional e facilidade de implementação, porém seu caráter estocástico ocasiona regiões sem recobrimento dos vórtices, causando ruídos no campo de velocidade.

PORTHOUSE e LEWIS (1981) incluíram o Método do Avanço Randômico no modelo de Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis, formando a base para o livro de LEWIS (1991) que trata da geração de vorticidade na superfície do corpo e seu subsequente desprendimento e transporte na esteira.

OGAMI e AKAMATSU (1991) apresentaram o Método da Velocidade de Difusão (MVD), no qual a difusão de vorticidade foi simulada pelo movimento induzido nos vórtices pela denominada velocidade de difusão, proporcional ao gradiente da vorticidade e à viscosidade cinemática, e inversamente proporcional à vorticidade. Os autores mostraram que o método é válido para valores de número de Reynolds inferiores àqueles abrangidos pelo Método do Avanço Randômico, sendo dispensável a utilização de teoria de camada limite, pois este pode lidar diretamente com o seu desenvolvimento, separação e recolamento.

KEMPKA e STRICKLAND (1993) apresentaram um método numérico para a simulação da difusão viscosa da vorticidade baseado no MVD. Diferentemente dos trabalhos anteriores, os autores consideraram os efeitos do divergente da velocidade de difusão, que mantém relação com a área na qual a vorticidade é difundida, resultando em cálculos mais acurados, quando comparados com outros resultados numéricos e analíticos.

KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995) apresentaram uma nova metodologia de simulação da difusão denominada Método da Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP ou “Particle Strength Exchange – PSE”). As simulações obtiveram resultados acurados para o escoamento ao redor de um cilindro circular.

SHANKAR e VAN DOMMELEN (1996) propuseram um novo modelo para simular a difusão da vorticidade em uma descrição puramente Lagrangiana. Este modelo baseou-se

na troca de intensidade entre os vórtices, o que foi feito mantendo-se os momentos de ordem zero, um e dois, ou seja, a conservação da circulação, do momento linear e do momento angular, respectivamente. As trocas satisfaziam um sistema linear formado quando se minimiza a norma máxima das quantidades trocadas, utilizando-se a técnica de programação linear e o método simplex para solução. A metodologia foi testada no problema de difusão de um vórtice pontual e na iteração de um par de vórtices, apresentando boa concordância com demais trabalhos numéricos e experimentais.

ROSSI (1996) realizou uma alteração no Método de Crescimento do Núcleo, que havia sido abandonado desde que GREENGARD (1985) mostrou que este aproximava incorretamente as equações de Navier-Stokes, que ficou conhecido como Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Através de um refinamento espacial que consistia na divisão de vórtices, mantendo-se inalterados os momentos correspondentes, obteve-se uma metodologia determinística eficiente e de fácil implementação para utilização no Método de Vórtices, com custo computacional semelhante ao Método do Avanço Randômico, porém com resultados mais acurados.

ROSSI (1997) apresentou um algoritmo de aglomeração, a fim de baixar o custo computacional do MCNC, diminuindo o número de vórtices na simulação, sem implicar, no entanto, em perda de recobrimento, diminuição da acurácia ou atraso na convergência. Dessa forma, o erro da aglomeração foi mantido sob controle e a aglomeração foi efetivada mantendo-se os momentos de ordem zero (conservação da circulação), ordem um (momento linear) e ordem dois (momento angular).

TAKEDA *et al.* (1997) realizaram um estudo comparativo com quatro diferentes métodos de difusão viscosa: o Método do Avanço Randômico (MAR), o Método da Velocidade de Difusão (MVD), o Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), utilizando o Método dos Painéis para satisfazer a condição de contorno na superfície e o Método de Multipolos para acelerar a etapa convectiva. Os autores simularam o escoamento ao redor de cilindro circular com número de Reynolds variando de 100 a 9500 e apresentaram dados comparativos quanto à acurácia, à eficiência computacional e à aplicabilidade para computação paralela. Concluíram que o MAR apresentou soluções com excessivo ruído e pouca sensibilidade quanto à sequência numérica randômica, ao passo que o MVD mostrou melhora

significativa quanto à convergência, se comparado ao MAR, que, no entanto, foi afetada drasticamente quando o recobrimento dos vórtices foi perdido. A formulação do MRV garantia o controle do erro, sendo que a adição de novos vórtices para obtenção de sistemas possíveis, tendia a aumentar o número de vórtices de maneira linear, podendo ser controlada por algum tipo de processo de aglomeração. Finalmente, o MCNC apresentou ganho em acurácia, porém, o crescimento exponencial do número de vórtices foi um fator limitante deste método, o que implicou na utilização de algoritmos de aglomeração e consequente inclusão de parâmetros e erros numéricos.

KIDA e NAKAJIMA (1998) obtiveram uma equação integral para a vorticidade, do tipo Fredholm, partindo da Equação de Navier–Stokes, a qual é implementada no Método de Crescimento do Núcleo com função Gaussiana e com função Gaussiana alternativa para simular o escoamento com alto número de Reynolds e condição inicial suavizada. Os autores mostraram que o método com função Gaussiana foi válido para resolver escoamentos com alto número de Reynolds presentes em muitas aplicações de Engenharia, contrariando as críticas apresentadas por GREENGARD (1985).

PLOUHAMS *et al.* (2002) simularam o escoamento ao redor de uma esfera com número de Reynolds de 300 a 1000, utilizando o Método da Troca de Intensidade entre Partículas. Os autores apresentaram resultados para os coeficientes de arrasto e de sustentação, bem como suas amplitudes de flutuação, e o número de Strouhal, que mostraram ser bem concordantes com outros trabalhos numéricos.

LEE *et al.* (2002) compararam o Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV) com o Método de Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP) quanto à acurácia e ao custo computacional, para o caso da difusão de um vórtice de Lamb e para um escoamento impulsivo ao redor de um cilindro circular, com número de Reynolds igual a 60. Para o primeiro caso, a acurácia e o custo computacional foram praticamente os mesmos para os dois métodos comparados, porém, para o cilindro circular, o MTIP mostrou-se mais acurado e com menor custo computacional do que o MRV.

LAN *et al.* (2005) apresentaram uma revisão dos avanços no Método de Vórtices nas últimas décadas, incluindo o estudo do Método de Troca de Intensidade entre Partículas (MTIP), do Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), do método de partículas determinístico e do método de vórtices híbrido. Os autores incluíram, também,

um esquema de método de vórtices eficiente, desenvolvido para altos números de Reynolds e para computação paralela de escoamentos ao redor de corpos rombudos, permitindo a eliminação de limites nas resoluções espacial e temporal.

SANTIAGO e BODSTEIN (2006) apresentaram um estudo comparativo de quatro diferentes métodos de difusão viscosa, dos pontos de vista de acurácia e custo computacional visando a aplicação destes ao Método de Vórtices, a saber: Método do Avanço Randômico (MAR), Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV), Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) e Método da Velocidade de Difusão (MVD). A solução analítica para a difusão de um vórtice pontual permitiu que os autores concluíssem que o MCNC apresentou acurácia superior aos demais, além da facilidade de implementação numérica, e que seu alto custo computacional, comparado ao MAR, pôde ser facilmente contornado utilizando-se um algoritmo de aglomeração de vórtices.

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

Para a solução de qualquer problema real de Engenharia é necessário que a formulação e o equacionamento do problema matemático representem o problema físico em estudo e, ainda, forneçam uma relação satisfatória entre a qualidade da solução, ou seja, o nível de acurácia desejado, o custo computacional relacionado e as ferramentas disponíveis.

Este trabalho apresenta a modelagem do escoamento externo, bidimensional, incompressível e não permanente que se desenvolve ao redor de corpos imersos em um meio fluido infinito. O modelo matemático apresentado neste capítulo consiste em atender ao modelo numérico desenvolvido, ou seja, a aplicação conjunta do Método dos Painéis com o Método de Vórtices, onde o primeiro tratará da solução do escoamento potencial e o segundo, da evolução da dinâmica da vorticidade.

No entanto, devido à complexidade da modelagem dos fenômenos físicos envolvidos no problema, faz-se necessário adotar hipóteses simplificadoras que visam proporcionar uma formulação matemática que conduza a resultados satisfatórios, tendo em vista as ferramentas para solução atualmente disponíveis e, para o caso em estudo, origina o Problema de Valor de Contorno descrito posteriormente.

3.1. Hipóteses Simplificadoras

O problema em estudo pode ser exemplificado por um corpo bidimensional de geometria arbitrária imerso em uma região infinita (livre de fronteiras sólidas) totalmente preenchida por um fluido que inicia seu escoamento uniforme impulsivamente, ou seja, este assume velocidade constante em todo o seu domínio instantaneamente. Tal problema pode ser visualizado na Fig. 3.1, onde Q_{∞} representa a velocidade do escoamento que incide sobre o corpo.

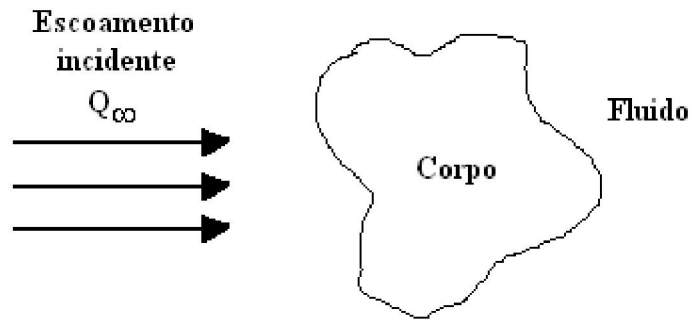


Figura 3.1 – Problema em estudo: escoamento externo ao redor de um corpo bidimensional de geometria arbitrária

Deste modo, são listadas a seguir as hipóteses simplificadoras que serão utilizadas na formulação matemática do problema em estudo:

- a dimensão do corpo no plano normal ao do escoamento é infinita, de forma que o escoamento pode ser considerado como bidimensional;
- o escoamento se inicia do repouso de forma impulsiva;
- a região fluida é infinita e sem influência de barreiras ou outros fenômenos interfaciais;
- existe apenas um único corpo imerso no fluido;
- o fluido é homogêneo, newtoniano, com propriedades constantes e seu escoamento ocorre de maneira incompressível, considerando que as velocidades envolvidas são muito menores que a velocidade do som no meio;
- a força de campo gravitacional é desprezada.

A hipótese de regime permanente não foi considerada, pois a dinâmica do escoamento provoca consideráveis oscilações temporais no campo de velocidades, as quais deverão ser representadas no modelo matemático formulado.

O equacionamento do problema em estudo, levando em consideração as hipóteses simplificadoras, conduz a um Problema de Valor de Contorno que será apresentado no próximo item.

3.2. Problema de Valor de Contorno

Os campos de velocidade e pressão de um escoamento incompressível de um fluido newtoniano, não sujeito a forças de campo, são relacionados através das Equações da Continuidade e de Navier-Stokes, as quais tomam a forma respectivamente das Eqs. (3.1) e (3.2), dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidade vetorial e dimensional, t é o tempo, p é a pressão estática absoluta, ν é a viscosidade cinemática do fluido e ρ sua massa específica.

A fim de normalizar os resultados obtidos, as variáveis são reunidas em grupos adimensionais, os quais guardam relação com as propriedades do fluido e as grandezas físicas de interesse, a saber:

- a velocidade característica, Q_∞ ;
- o comprimento característico, c (diâmetro do círculo), ilustrado na Fig. 3.2;
- o tempo característico, c/Q_∞ , determinado em função das variáveis anteriores.

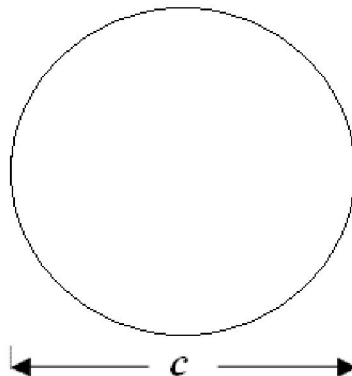


Figura 3.2 – Comprimento característico (diâmetro)

Desta forma, a partir do seguinte conjunto de variáveis adimensionais que são inseridas nas Eqs. (3.1) e (3.2), obtém-se as Equações da Continuidade e de Navier-Stokes na forma adimensional, ou seja,

$$\mathbf{u}^* \equiv \frac{\mathbf{u}}{Q_\infty}, \quad x^* \equiv \frac{x}{c}, \quad t^* \equiv \frac{tQ_\infty}{c} \text{ e } p^* \equiv \frac{p}{\rho Q_\infty^2}. \quad (3.3)$$

$$\text{Então, } \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{e } \frac{D\mathbf{u}^*}{Dt} = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^*, \quad (3.5)$$

onde $Re \equiv \frac{Q_\infty c}{\nu}$ é o número de Reynolds.

O sistema de Equações Diferenciais Parciais (3.4) e (3.5) está sujeito às seguintes condições de contorno:

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na superfície do corpo, que reflete as condições de impenetrabilidade e não escorregamento para um corpo estacionário;
- $\|\mathbf{u}\| = 1$, no infinito.

E a condição inicial é:

- $\|\mathbf{u}\| = 0$ em $t < 0$;
- $\|\mathbf{u}\| = 1$, em $t \geq 0$, para toda a região fluida.

3.3. Equação de Transporte da Vorticidade

A representação de um escoamento em função do seu campo de vorticidade torna-se útil no estudo em questão, devido à possibilidade de interpretar o movimento de um fluido em um escoamento incompressível através da criação e subsequente evolução do campo de vorticidade no tempo. Assim, conhecendo-se os fenômenos físicos que relacionam a geração da vorticidade na superfície do corpo, pode-se resolver o escoamento transportando esta informação para o restante do domínio.

Particularmente, é indispensável que o campo de pressão seja expresso em função do campo de vorticidade, pois esta grandeza irá representar a evolução do escoamento e permitirá a avaliação recorrente do campo de velocidade e a determinação dos carregamentos na superfície do corpo.

Assim, uma vez que o vetor vorticidade é definido como o rotacional do vetor velocidade, ou seja, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, a Equação de Transporte de Vorticidade é então obtida tomando-se o rotacional da Eq. (3.2) na forma completa,

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* = -\frac{\nabla p^*}{\rho} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^* \right]. \quad (3.6)$$

Assim, a equação fica:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}^* \quad (3.7)$$

A interpretação para cada termo desta equação pode ser descrita como (BATCHELOR (1967)):

- $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^*}{\partial t}$ representa a taxa de variação local de vorticidade;
- $\mathbf{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}^*$ representa o transporte convectivo (ou advectivo) de vorticidade;
- $\boldsymbol{\omega}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^*$ representa o esticamento e a deformação das linhas de vorticidade;

- $\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}^*$ representa o transporte difusivo de vorticidade devido à ação da viscosidade.

No caso bidimensional, o vetor vorticidade torna-se um escalar, possuindo apenas a componente normal ao plano do escoamento. Logo, a Eq. (3.7) se torna uma equação escalar, dada por:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \omega^* = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega^*. \quad (3.8)$$

É importante observar que o termo $\boldsymbol{\omega}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^*$ é identicamente nulo no escoamento bidimensional. Este fato representa uma limitação desta modelagem para a simulação de escoamentos turbulentos, pois o fenômeno da turbulência em fluidos está intimamente ligado à deformação das linhas de vorticidade, como discutido em SARPKEYA (1994), e é intrinsecamente tridimensional.

3.4. Relação Velocidade–Vorticidade: A Lei de Biot–Savart

O Método de Vórtices prevê a solução da Equação de Transporte da Vorticidade (Eq. 3.8) a qual resolve o campo de vorticidade do escoamento. Deve-se, portanto, buscar uma formulação que relacione os campos de vorticidade e velocidade, este último de maior interesse, pois possibilita resolver o escoamento e determinar os carregamentos no corpo.

A Equação da Continuidade para o fluido incompressível é dada por: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. O problema consiste, então, em determinar o campo de velocidade como uma distribuição de vorticidade conhecida. Assim, o campo de velocidade pode ser expresso como o rotacional de um campo vetorial $\mathbf{B}$, tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.9)$$

Como o rotacional do gradiente de um vetor é nulo, pode-se escolher $\mathbf{B}$, tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.10)$$

Substituindo as Eqs. (3.9) e (3.10) na expressão que define o vetor vorticidade, tem-se

$$\begin{aligned} \omega &= \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ \omega &= -\nabla^2 \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A Eq. (3.11) é denominada Equação de Poisson para o vetor potencial e a sua solução, utilizando o Teorema de Green (conforme KARAMCHETI (1980)), é dada por

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\omega}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} dV, \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{B}$ é avaliado no ponto P (distante $\mathbf{r}_0$ da origem, conforme Fig. 3.3, extraída de KATZ e PLOTKIN (2001)) e é resultado da integração da vorticidade ω no volume V . A partir da definição da Eq. (3.9), obtém-se:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \left(\frac{\omega}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \right) dV. \quad (3.13)$$

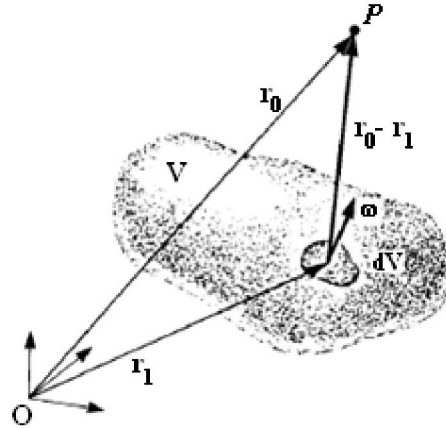


Figura 3.3 – Velocidade no ponto P devido à distribuição de vorticidade

Considerando uma parte infinitesimal do filamento de vorticidade ω como mostrada na Fig. 3.4 a seguir, obtida em KATZ e PLOTKIN (2001),

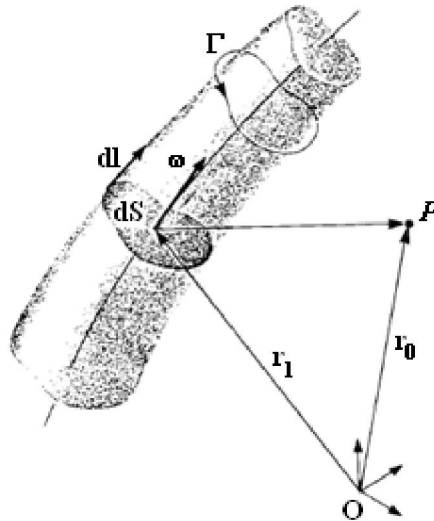


Figura 3.4 – Velocidade no ponto P induzida por um segmento de vórtice

a área dS é escolhida tal que seja normal a ω . A direção $d\mathbf{l}$ no filamento é $d\mathbf{l} = (\omega / \omega)dl$, a circulação é definida por $\Gamma = \omega dS$ e $dV = dSdl$. Dessa forma, substituindo essas expressões na Eq. (3.13) e mantendo $\mathbf{r}_1$ e $d\mathbf{l}$ constantes, obtém-se a expressão para o campo de velocidade incompressível, induzido pela vorticidade concentrada em uma região finita por

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} dV. \quad (3.14)$$

A Eq. (3.14) é a Lei de Biot–Savart, desenvolvida inicialmente na teoria de campos eletromagnéticos. Nesta equação, V representa o volume da região rotacional, ou seja, da região onde a vorticidade está distribuída.

3.4.1. Velocidade Induzida por um Segmento de Vórtice em Linha Reta

Um filamento de vorticidade é definido como um tubo de vorticidade, onde toda a vorticidade está concentrada em um núcleo finito. Quando a área da seção transversal do núcleo tende a zero e esta é infinita, o filamento é denominado filamento singular de vorticidade, conforme ilustram as Figs. 3.5(a) e 3.5(b). Caso o filamento singular de vorticidade seja uma linha reta, este é chamado vórtice – linha e, no caso bidimensional, de vórtice pontual, singular ou potencial, conforme Figs. 3.5(c) e 3.5(d).

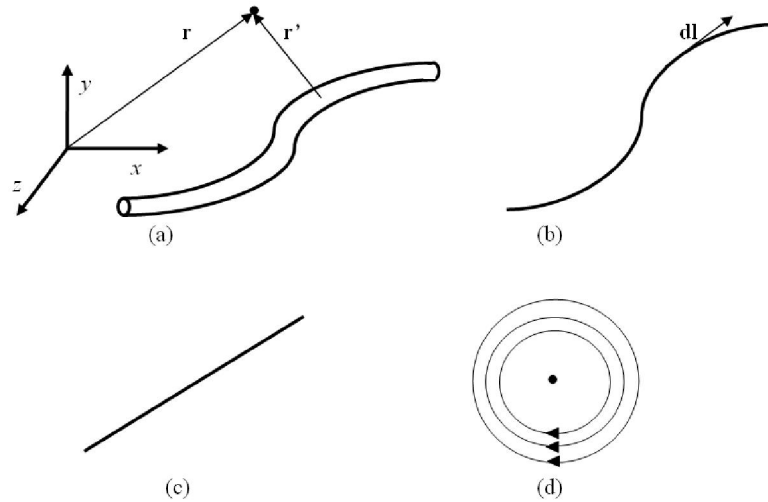


Figura 3.5 – Filamentos de velocidade

Será formulado, aqui, o potencial de velocidade e suas derivadas para um vórtice pontual. Desta forma, faz-se necessário estabelecer um elemento de singularidade com apenas um componente de velocidade tangencial, como mostrado na Fig. 3.6, por KATZ e

PLOTKIN (2001), cuja magnitude irá decair de maneira similar a da componente radial da velocidade de uma fonte bidimensional, isto é, de $1/r$. Então, $u_r = 0$ e $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$.

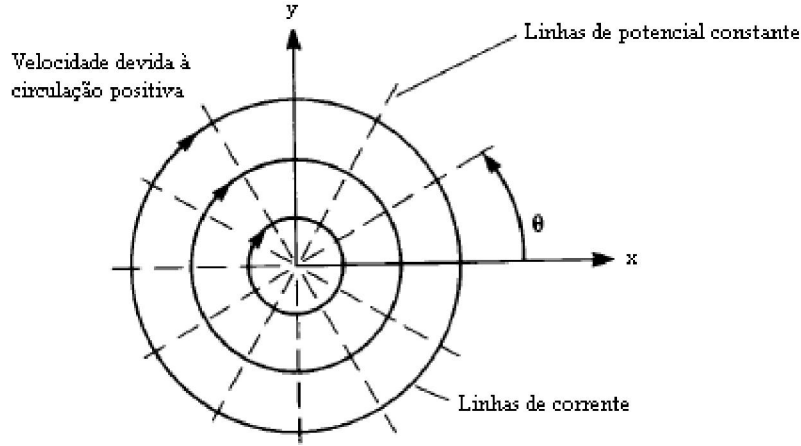


Figura 3.6 – Linhas de corrente e de potencial constante para um vórtice bidimensional situado na origem

Substituindo essas componentes de velocidade na Equação da Continuidade,

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (3.15)$$

$$u_\theta = u_\theta(r)$$

Para fluido irrotacional, substituindo essas relações na expressão da vorticidade,

$$\omega_y = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \right] = 0,$$

$$r u_\theta = cte = A$$

a magnitude da velocidade varia com $1/r$, assim como a componente de velocidade radial de uma fonte. O valor da constante A pode ser calculado usando a definição da circulação,

por $\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2\pi}^0 u_\theta r d\theta = -2\pi A$, onde Γ é definido como positivo no sentido horário.

Assim, no plano $X - Y$, conforme figura anterior, a integral de linha deve ser realizada na direção oposta de aumento de θ . A constante A , então, fica $A = -\Gamma/2\pi$ e as coordenadas do campo de velocidade,

$$u_r = 0 \text{ e} \quad (3.16)$$

$$u_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (3.17)$$

Como esperado, a componente tangencial da velocidade decai a uma taxa de $1/r$, conforme Fig. 3.7, extraída de KATZ e PLOTKIN (2001).

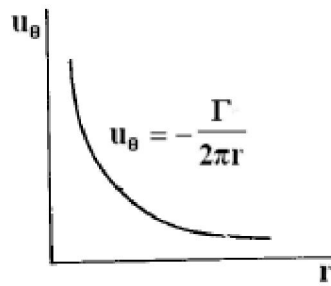


Figura 3.7 – Variação radial da componente tangencial de velocidade induzida por um vórtice

O potencial da velocidade, para um elemento de vórtice na origem, pode ser obtido pela integração das Eqs. (3.16) e (3.17) por

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C, \quad (3.18)$$

onde C é uma constante, onde seu valor foi arbitrado como nulo.

Para um vórtice localizado em um ponto $P(x_0, y_0)$, a Eq. (3.18) pode ser escrita em coordenadas cartesianas como

$$\theta = \arctg \frac{y-y_0}{x-x_0}; \cos\theta = \frac{x-x_0}{r}; \sin\theta = \frac{y-y_0}{r},$$

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{y-y_0}{x-x_0}. \quad (3.19)$$

Analogamente, para o campo de velocidade,

$$u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = u_\theta \sin\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{y-y_0}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y-y_0}{r^2} \text{ e} \quad (3.20)$$

$$v = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_\theta \cos\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{x-x_0}{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x-x_0}{r^2}. \quad (3.21)$$

Como $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, as Eqs. (3.20) e (3.21) ficam, respectivamente, para as direções x e y ,

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \text{ e} \quad (3.22)$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (3.23)$$

Nas Eqs. (3.17), (3.22) e (3.23) pode-se observar a existência de uma singularidade na velocidade induzida para um ponto que se aproxima do centro do próprio vórtice, onde as velocidades induzidas tendem a valores infinitos. Entretanto, a observação de situações físicas reais revela que estas velocidades não crescem indiscriminadamente ao se aproximar do centro do vórtice, sugerindo a necessidade da utilização de um modelo que represente melhor as velocidades nesta região, como será apresentado na próxima seção.

3.5. Modelagem da Vorticidade

De acordo com SAFFMAN (1992), um vórtice pode ser definido, em escoamentos bidimensionais, como uma região finita no plano, que possui vorticidade não-nula e que é circundada por um escoamento irrotacional.

A vorticidade presente no escoamento é modelada através da utilização de elementos de vorticidade discretos, cujas intensidades são determinadas por ocasião da solução do Problema de Valor de Contorno.

A discretização do campo de vorticidade, necessária para que se obtenha uma modelagem matemática que torne possível uma solução numérica acurada, deve ser feita com elementos de vorticidade discretos que guardem boa relação entre a qualidade da solução e o custo computacional envolvido. Os modelos disponíveis para discretização da vorticidade em duas dimensões incluem os vórtices singular (potencial), de Chorin, de Rankine e de Lamb.

Um vórtice pontual possui um núcleo de área zero, onde se concentra a vorticidade. A velocidade sobre qualquer ponto no espaço localizado a uma distância radial r obedece à fórmula derivada da Lei de Biot-Savart dada por

$$u_{\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (3.24)$$

Para vórtices muito próximos entre si, o valor do raio r é muito pequeno, e a velocidade induzida por um vórtice sobre outro tende para infinito, acarretando problemas de instabilidade numérica. Para remover as singularidades apresentadas pelo vórtice singular, a primeira alternativa seria a utilização do modelo de Chorin. No entanto, este se comporta como um vórtice pontual fora do núcleo e, no interior deste, apresenta uma velocidade induzida constante, apresentando, dessa forma, uma singularidade na origem e na derivada para a distribuição de velocidade, no limite do núcleo do raio σ_0 . Por esse motivo, os dois modelos mais utilizados para a representação de vórtices reais são os modelos de Rankine e Lamb (SARPKAYA (1994)). Ambos os modelos suavizam as velocidades induzidas a partir de uma distância ao centro do vórtice.

O modelo de Rankine sugere que o vórtice gire internamente como um corpo rígido na região do seu núcleo e assuma o comportamento do vórtice potencial fora deste. Este possui um valor constante de vorticidade no núcleo, de modo a produzir uma distribuição contínua e linear de u_θ nesta região, porém introduz uma descontinuidade na derivada do campo da velocidade induzida na circunferência do núcleo. A Fig. 3.8 mostra a distribuição de vorticidade e velocidade para os três modelos mencionados.

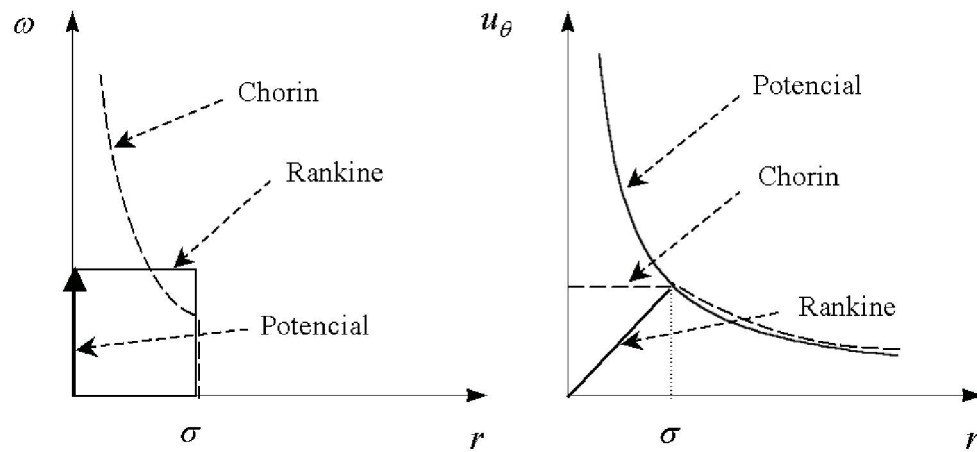


Figura 3.8 – Distribuição de vorticidade e velocidade induzida para um vórtice potencial, de Chorin e de Rankine

O modelo de Lamb, também denominado de Oseen, contorna as singularidades mais eficientemente que os anteriores, pois possui uma distribuição Gaussiana de vorticidade, que é uma solução exata da Equação de Navier-Stokes para um vórtice viscoso em um domínio infinito. A velocidade é finita para qualquer r , conforme Fig. 3.9. Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (3.25)$$

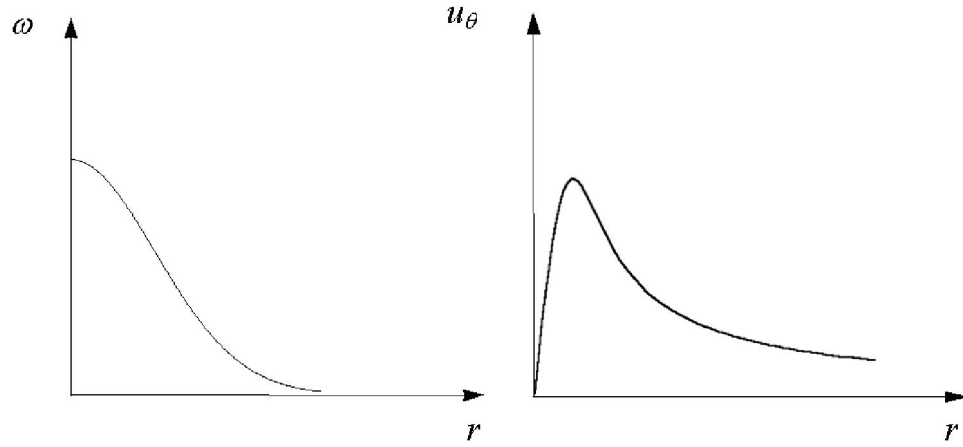


Figura 3.9 – Distribuição de vorticidade e velocidade induzida para um vórtice de Lamb

onde a solução para este problema de decaimento é expressa por

$$\omega(r, t) = -\frac{\Gamma}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right), \quad (3.26)$$

e a velocidade induzida, dada por

$$u_\theta(r, t) = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right]. \quad (3.27)$$

Nas Eqs. (3.26) e (3.27), r é distância radial entre o centro do vórtice e o ponto do escoamento onde a velocidade induzida é calculada, sendo definida como

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, e σ é uma escala de comprimento viscoso, expressa por

$$\sigma = \sqrt{4\nu t}. \quad (3.28)$$

Adimensionalizando a Eq. (3.28), esta fica

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{4t^*}{\text{Re}}} . \quad (3.29)$$

O campo de velocidade escrito em coordenadas cartesianas é descrito pelas equações

$$u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = u_\theta \sin\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right] e \quad (3.30)$$

$$v = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_\theta \cos\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right] . \quad (3.31)$$

3.5.1. Folha de Vorticidade

Outro elemento de vorticidade utilizado para discretizar o campo de vorticidade é a folha de vorticidade. Elas tendem a suavizar as velocidades induzidas em uma direção paralela a sua orientação principal, porém introduzem uma descontinuidade na velocidade induzida ao se cruzar transversalmente a folha.

As componentes de velocidades induzidas por uma folha de vorticidade com distribuição constante de velocidade por unidade de comprimento γ são obtidas integrando-se as Eqs. (3.22) e (3.23) ao longo da folha de vorticidade, onde $\gamma(x_0) = \gamma_0$ que ficam

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad e$$

$$v = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 .$$

Resolvendo as integrais acima, tem-se

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} [\theta_2 - \theta_1] \quad e$$

$$v = \frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

onde θ_1, θ_2, r_1 e r_2 podem ser vistos na Fig. 3.10 e são definidos como

$$\theta_1 = \arctg \left[\frac{y}{x-x_1} \right]; \theta_2 = \arctg \left[\frac{y}{x-x_2} \right]; r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}; r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}$$

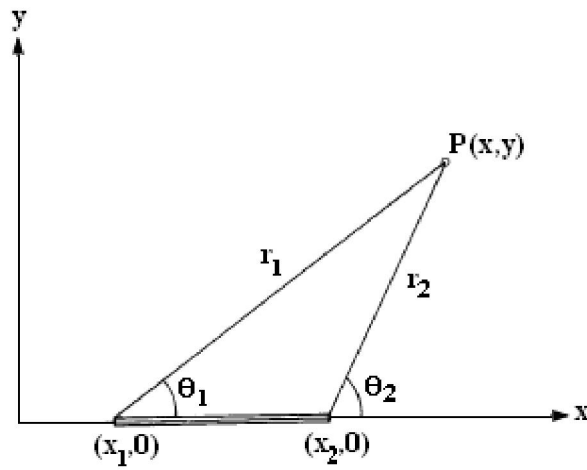


Figura 3.10 – Velocidade induzida pelo ponto P por uma folha de vorticidade de intensidade $\gamma[x_1 - x_2]$, obtida em KATZ e PLOTKIN (2001)

Assim, obtém-se

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\arctg \left(\frac{y}{x-x_2} \right) - \arctg \left(\frac{y}{x-x_1} \right) \right] \text{ e} \quad (3.32)$$

$$v = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2}. \quad (3.33)$$

Para o caso de distribuição linear, onde $\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_1)$,

$$u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \text{ e}$$

$$v = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0.$$

Analogamente,

$$u = -\frac{\gamma_1}{4\pi} \left[y \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} - 2x(\theta_2 - \theta_1) \right] \text{ ou}$$

$$u = -\frac{\gamma_1}{4\pi} \left\{ y \ln \frac{(x - x_1)^2 + y^2}{(x - x_2)^2 + y^2} - 2x \left[\arctg \left(\frac{y}{x - x_2} \right) - \arctg \left(\frac{y}{x - x_1} \right) \right] \right\} \text{ e} \quad (3.34)$$

$$v = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left[\frac{x}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + (x_1 - x_2) + y(\theta_2 - \theta_1) \right] \text{ ou}$$

$$v = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left\{ \frac{x}{2} \ln \frac{(x - x_1)^2 + y^2}{(x - x_2)^2 + y^2} + (x_1 - x_2) + y \left[\arctg \left(\frac{y}{x - x_2} \right) - \arctg \left(\frac{y}{x - x_1} \right) \right] \right\}. \quad (3.35)$$

3.6. Escoamento Potencial e Formulação do Problema

O escoamento incompressível ao redor de corpos imersos num fluido Newtoniano pode ser dividido em duas regiões distintas com relação à influência da viscosidade. A região próxima ao corpo, a camada limite, e a região à jusante do corpo, a esteira, são profundamente influenciadas pela viscosidade e caracterizadas pela existência de vorticidade não-nula. Fora dessas regiões, a influência da viscosidade torna-se desprezível e o escoamento caracteriza-se por possuir um campo de vorticidade nulo.

Considerando a integral de linha numa região simplesmente conexa, ao longo de uma linha arbitrária C, a circulação ao longo de C pode ser definida como

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_C (u dx + v dy + w dz). \quad (3.36)$$

Pelo Teorema de Stokes, pode-se escrever

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.37)$$

onde o vetor vorticidade é expresso por $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Para a região onde a influência da viscosidade é desprezível, o escoamento é considerado irrotacional, isto é, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$. Logo, ao se aplicar esta condição na Eq. (3.37), pode-se mostrar que a integral de linha torna-se uma derivada de ponto. Deste modo, o campo de velocidade pode ser descrito através do gradiente de uma função escalar ϕ , denominada potencial de velocidade, tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \quad (3.38)$$

A Equação da Continuidade para escoamentos incompressíveis é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.39)$$

Assim, substituindo a Eq. (3.38) na Eq. (3.39) obtém-se a Equação de Laplace, expressa por

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0. \quad (3.40)$$

Esta equação diferencial parcial requer duas condições de contorno, uma na superfície do corpo e outra no infinito. Para um corpo imerso no fluido, a componente da velocidade normal à superfície do corpo deve ser nula, satisfazendo, portanto, a condição de impenetrabilidade da fronteira sólida por

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (3.41)$$

A segunda condição de contorno requer que a perturbação criada pelo movimento deva decair com o distanciamento do corpo, ou seja, para $r \rightarrow \infty$. A velocidade tenderá, portanto, à velocidade do escoamento incidente, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\nabla \phi - \mathbf{Q}_\infty) = 0. \quad (3.42)$$

Assim, sendo o campo de velocidade de um escoamento potencial definido como $\mathbf{u} = \nabla \phi$, onde ϕ é a função potencial de velocidade, e considerando então o escoamento potencial, bidimensional e incompressível ao redor de um corpo rígido em repouso, pode-se formular o seguinte Problema de Valor de Contorno para o potencial de velocidade, escrito na forma adimensional:

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ no fluido} \quad (3.43)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ na superfície do corpo} \quad (3.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\nabla \phi(\mathbf{r}, t)| = 1, \text{ no infinito} \quad (3.45)$$

3.7. Solução Geral da Equação de Laplace Bidimensional

Para um corpo bidimensional de superfície S_C imerso numa região V com superfície exterior S_∞ , como ilustrado por KATZ e PLOTKIN (2001) e representado na Fig. 3.11, as condições de contorno expressas pelas Eqs. (3.44) e (3.45) são aplicáveis a S_C e S_∞ , respectivamente. A normal $\mathbf{n}$ é exterior ao volume de interesse V , limitado pelas superfícies S_C e S_∞ .

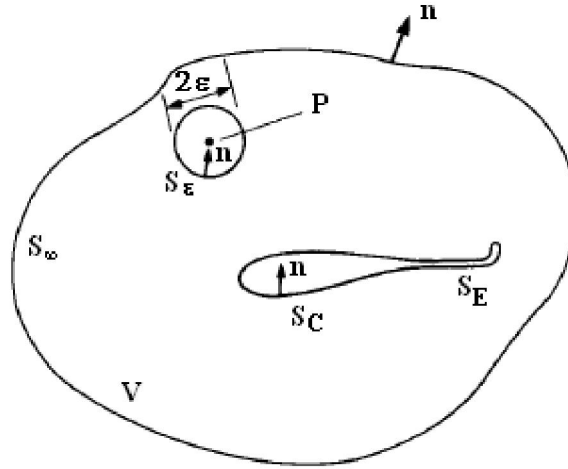


Figura 3.11 – Problema de fluxo potencial

Substituindo o vetor $\mathbf{u}$ pela função $\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1$ no Teorema da Divergência, expresso por $\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$, obtém-se

$$\int_S (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV, \quad (3.46)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções escalares da posição. Esta equação é uma das identidades de Green.

A integral de superfície é realizada ao longo de toda fronteira S , incluindo um modelo de esteira (superfície S_E) que representa uma descontinuidade no campo irrotacional, onde $S = S_C + S_E + S_\infty$.

Definindo $\phi_1 = 1/r$ e $\phi_2 = \phi$, para o caso em que o ponto P se situa externamente à V , ambos ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem à Equação de Laplace e a Eq. (3.46) torna-se

$$\int_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.47)$$

Para o caso particular em que P se encontra no interior da região de interesse, este deve agora ser excluído da região de integração e envolto por uma pequena esfera de raio ε . Fora da esfera, na região remanescente, os potenciais satisfazem à Equação de Laplace, ou seja, $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ e $\nabla^2\phi_2 = 0$. Assim, a Eq. (3.46) fica

$$\int_{S+esfera\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.48)$$

Para resolver a integral sobre a esfera, faz-se necessário introduzir um sistema de coordenadas esféricas em P , e uma vez que o vetor $\mathbf{n}$ aponta para dentro da esfera:

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{e} \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \left(-\frac{1}{r^2} \right) \mathbf{e}_r. \quad \text{A Eq. (3.48) se torna}$$

$$\int_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS - \int_{esfera\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) dS = 0. \quad (3.49)$$

Na vizinhança da esfera P , $\int_S dS = 4\pi\varepsilon^2$ (onde $r = \varepsilon$), e quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (supondo que o potencial e suas derivadas são funções bem postas e não variam muito na esfera), o primeiro termo da integral na esfera ε desaparece e o segundo termo fica expresso por

$$- \int_{esfera\varepsilon} \left(\frac{\phi}{r^2} \right) dS = -4\pi\phi(P) \quad (3.50)$$

Assim, a Eq. (3.49) fica, então,

$$\begin{aligned} \int_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS &= 4\pi\phi(P) \\ \phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.51)$$

Se o ponto P situa-se na fronteira S_C , de forma a excluir o ponto a partir de V , a integração é realizada apenas no hemisfério que o circunda com raio ε , tornando a Eq. (3.51)

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.52)$$

Para a situação em que o fluido de interesse se situa no interior da fronteira de S_C , resultando em um “potencial interno” ϕ_i , o ponto P (que está na região V) é exterior a S_C . Assim, aplicando à Eq. (3.51), esta fica

$$0 = \int_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi_i - \phi_i \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.53)$$

onde $\mathbf{n}$ aponta para fora de S_C . Considerando a influência do potencial interno e somando a Eq. (3.51) com a Eq. (3.53) e acrescentando a contribuição de S_∞ , obtém-se

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left[\frac{1}{r} \nabla (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_E + S_\infty} \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.54)$$

onde a contribuição da integral sobre S_∞ pode ser definida como

$$\phi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.55)$$

Este potencial geralmente depende da seleção do sistema de coordenadas e, por exemplo, em um sistema inercial onde um corpo se move através de um fluido estacionário, ϕ_∞ torna-se uma constante na região. Além disso, a superfície da esteira é supostamente

final de forma que $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$ é contínua através dela. A partir dessas hipóteses e da substituição da Eq. (3.55) na Eq. (3.54), tem-se

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left[\frac{1}{r} \nabla(\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_E} \left[\phi \mathbf{m} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \phi_\infty(P). \quad (3.56)$$

Considerando, agora, um segmento da fronteira S_C , como mostrado na Fig. 3.12, então a diferença entre os potenciais externo e interno pode ser definida como: $-\mu = \phi - \phi_i$ e a diferença entre as derivadas na direção normal como: $-\lambda = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n}$. Estes elementos são denominados dipolo (μ) e fonte (λ) e o sinal negativo é resultante do vetor normal apontando na direção de S_C . Com essas definições, a Eq. (3.56) pode ser reescrita como

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left[\lambda \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \mathbf{m} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_E} \left[\mu \mathbf{m} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \phi_\infty(P), \quad (3.57)$$

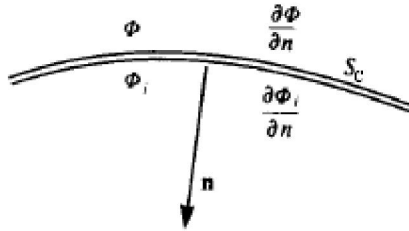


Figura 3.12 – Potencial de velocidade perto de uma fronteira sólida S_C , obtido por KATZ e PLOTKIN (2001)

onde μ , que aparece na segunda integral (sobre S_E), é a diferença do potencial entre as superfícies superior e inferior da esteira (ou seja, se a espessura da mesma é nula, então

$\mu = -\Delta\phi$ em S_E). O vetor $\mathbf{n}$ é a normal local à superfície, que aponta na direção do dipolo. É conveniente substituir $\mathbf{n} \cdot \nabla$ por $\partial/\partial n$. Assim,

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_C} \left[\lambda \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_E} \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \phi_\infty(P). \quad (3.58)$$

Ambas as soluções para fonte e dipolo decrescem para $r \rightarrow \infty$ e, automaticamente, satisfazem a condição de contorno expressa pela Eq. (3.42).

Para determinar o potencial de velocidade na região V , a intensidade da distribuição dos dipolos e fontes deve ser obtida. Estabelecendo $\partial\phi_i/\partial n = \partial\phi/\partial n$ e $\phi_i = \phi$ em S_C , os termos da fonte e dipolo desaparecem e o problema é modelado por uma distribuição de fonte na fronteira e, no caso bidimensional, as funções ficam: $\phi_1 = \ln r$ e $\phi_2 = \phi$.

No ponto P , a integração será ao redor de um círculo com raio ε , e a Eq. (3.49) fica

$$\int_S [\ln r \nabla \phi - \phi \nabla (\ln r)] \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\text{círculo } \varepsilon} \left[\ln r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \phi \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS = 0. \quad (3.59)$$

A circunferência do círculo ao redor de P é $2\pi\varepsilon$ (equivalente a $4\pi\varepsilon^2$, no caso tridimensional) e a Eq. (3.51), para o caso bidimensional, fica

$$\phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_S [\ln r \nabla \phi - \phi \nabla (\ln r)] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.60)$$

Se o ponto P se situa na fronteira S_C , então a integração é realizada sobre um semicírculo com raio ε e a Eq. (3.60) torna-se $\phi(P) = -\frac{1}{\pi} \int_S [\ln r \nabla \phi - \phi \nabla (\ln r)] \cdot \mathbf{n} dS$ e quando este se encontra no interior de S_C , a versão bidimensional da Eq. (3.53) fica

$$0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_C} (\ln r \nabla \phi_i - \phi_i \nabla \ln r) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Finalmente, com a definição do potencial ϕ_∞ e dos elementos μ e λ , a Eq. (3.58) para o caso bidimensional fica

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_C} \left[\lambda(\ln r) - \mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_E} \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS + \phi_\infty(P). \quad (3.61)$$

A Eq. (3.61) revela que se pode chegar à solução do problema distribuindo-se singularidades ao longo do corpo e da esteira, pois estes são os contornos que definem a região onde a Equação de Laplace é válida. Estas singularidades, que podem ser do tipo vórtices, dipolos ou fontes, representam as funções de transferência que permitem resolver o escoamento no domínio fluido, a partir do contorno.

O tipo de singularidade deve ser escolhido visando a obtenção da melhor representatividade da física do problema possível e, uma vez que não é possível obter seu valor analiticamente, é necessário discretizar o contorno para a solução numérica que, neste trabalho, será feito a partir da utilização do Método dos Painéis.

3.8. Condição de Contorno – Utilização Simultânea de Painéis e Vórtices Para Discretização do Corpo

A imposição da condição de contorno na superfície sólida permite determinar a intensidade das singularidades distribuídas no contorno. Assim, satisfazendo-se a condição de impenetrabilidade, o campo de velocidade é unicamente determinado (KOUMOUTSAKOS *et al.* (1994)). No entanto, surge na superfície do corpo uma folha de vorticidade espúria, que gera velocidade de deslizamento não-nula sobre o painel.

A modelagem desenvolvida utiliza uma combinação de vórtices e painéis e consiste em eliminar essa folha de vorticidade espúria, acrescentando uma camada de L vórtices discretos nas vizinhanças dos painéis, conforme mostrado na Fig. 3.13. A intensidade $\gamma(S)$ da folha de vorticidade $\gamma(S)$ é determinada simultaneamente à intensidade Γ do vórtice. Este procedimento permite formar um sistema onde são impostas explícita e simultaneamente as condições de contorno de impenetrabilidade e de não-deslizamento, de

maneira a melhorar a representação da superfície e do processo de difusão de vorticidade na parede do corpo.

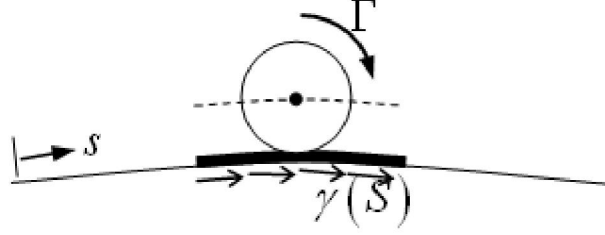


Figura 3.13 – Utilização simultânea de vórtices e painéis

A circulação da folha de vorticidade espúria se expressa por

$$\Gamma = \int_C \gamma(s) ds . \quad (3.62)$$

BATCHELOR (1967) mostrou que a variação de circulação em um escoamento real viscoso, barotrópico e com forças de corpo conservativas é dada por

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \int_C \nabla^2 \mathbf{u} ds = -\nu \int_C \nabla \times \boldsymbol{\omega} ds = -\nu \int_C \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial n} ds . \quad (3.63)$$

A Eq. (3.63) é uma generalização do teorema de Kelvin para escoamentos viscosos. Integrando-a no tempo, obtém-se

$$\Gamma = \int_C \int_t^{t+dt} \left(-\nu \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial n} \right) dt' ds . \quad (3.64)$$

Comparando a Eq. (3.64) com a Eq. (3.62), sujeita à hipótese de que o fluxo de vorticidade na parede é constante no intervalo de tempo dt , pode-se escrever

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{\gamma(s)}{\delta t}. \quad (3.65)$$

A Eq. (3.65), obtida por KOUMOUTSAKOS *et al.* (1994), é a Equação de Contorno de Neumann para a vorticidade, que permite relacionar o fluxo de vorticidade normal à superfície com o aparecimento da folha de vorticidade espúria.

3.9. Difusão da Vorticidade na Superfície Sólida e Nascimento de Novos Vórtices

No modelo para o nascimento dos vórtices proposto neste trabalho, a imposição da condição de impenetrabilidade é possível devido à utilização conjunta de vórtices e painéis, baseado na hipótese de que uma folha de vorticidade espúria surge na superfície do corpo, após um intervalo de tempo Δt . Porém, esta folha de vorticidade, por ação do processo puramente difusivo, dá origem a uma camada de vórtices de Lamb, os quais passam a satisfazer a condição de não-escorregamento. É pressuposto que ambas as distribuições de vorticidade co-existem de modo a satisfazer as condições de impenetrabilidade e não-escorregamento simultaneamente, respeitada também a condição de conservação de circulação.

Para a modelagem em questão, necessita-se determinar a quantidade de vórtices por painel L , e de sua exata posição de nascimento, o que é feito tomando-se como base o processo difusivo na superfície, ou seja, quando $y = 0$. Neste caso, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na parede, e o termo convectivo é nulo, o que permite escrever a Equação de Transporte da Vorticidade como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (3.66)$$

Pelas definições de ω e da Equação da Continuidade para o caso bidimensional, tem-se

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.68)$$

Então,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.69)$$

Na superfície, $y = 0$ e $v = 0$. Então, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Assim,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0. \quad (3.70)$$

Substituindo a Eq. (3.70) na Eq. (3.66), obtém-se um modelo de difusão aproximado, válido para as proximidades da parede, conforme o Problema de Valor de Contorno a seguir:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (3.71)$$

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial y} (x, y = 0, t > 0) = -\frac{\gamma(x)}{\delta t} \quad (3.72)$$

$$\omega(x, y \rightarrow \infty, t > 0) = 0 \quad (3.73)$$

$$\omega(x, y > 0, t = 0) = 0 \quad (3.74)$$

O fluxo de vorticidade no ponto $(x, y = 0, t)$, dado pela Eq. (3.72), é determinado em função da intensidade $\gamma(x)$ da folha de vorticidade que se cria nas vizinhanças da superfície do corpo ao se impor a condição de contorno de impenetrabilidade. O valor de $\gamma(x)$ é obtido pela distribuição de painéis sobre a superfície.

Uma vez que o Problema de Valor de Contorno não possui escalas de comprimento e tempo e como o meio fluido é semi-infinito, este pode ser resolvido por similaridade. Define-se, então,

$$\eta \equiv \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad \text{e} \quad (3.75)$$

$$F(\eta) \equiv \frac{\omega(x, y, t)}{\frac{\gamma(s)}{\delta_n}}, \quad (3.76)$$

onde δ_n é a profundidade de difusão e é definida como $\delta_n = \delta A / \Delta l$, conforme Fig. 3.14.

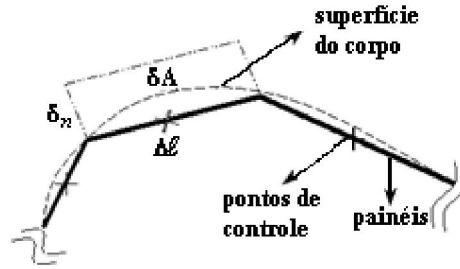


Figura 3.14 – Espessura de difusão δ_n

Realizando as derivadas parciais, obtém-se

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{y}{4\nu^{1/2}t^{3/2}}, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma}{\delta_n} F(\eta) \right) = \frac{\gamma}{\delta_n} \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\gamma}{\delta_n} F'(\eta) \frac{y}{4\nu^{1/2}t^{3/2}}, \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma}{\delta_n} F(\eta) \right) = \frac{\gamma}{\delta_n} \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = \frac{\gamma}{\delta_n} F'(\eta) \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \quad \text{e} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma}{\delta_n} F'(\eta) \frac{1}{2\sqrt{vt}} \right) = \\
&= \frac{\gamma}{\delta_n} \frac{1}{2\sqrt{vt}} \frac{dF'(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\gamma}{\delta_n} \frac{1}{4vt} F''(\eta)
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Da Eq. (3.72) tem-se que

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \frac{\gamma(x)}{\delta t} . \tag{3.82}$$

Substituindo a Eq. (3.77) no PVC, tem-se

$$F''(\eta) = -2\eta F'(\eta) , \tag{3.83}$$

e aplicando a Eq. (3.80) na Eq. (3.82) chega-se a

$$\nu \frac{\gamma(x)}{\delta_n} F'(\eta) \frac{1}{2\sqrt{vt}} = - \frac{\gamma(x)}{\delta t} .$$

Para $y = 0$, $\eta = 0$.

Então,

$$\begin{aligned}
\nu \frac{F'(0)}{\delta_n} \frac{1}{2\sqrt{vt}} &= - \frac{1}{\delta t} \\
F'(0) &= -2 \frac{\sqrt{vt}}{\nu \delta t} \delta_n
\end{aligned} \tag{3.84}$$

A partir da Eq. (3.76), tem-se que $F(\infty) = 0$, pois $\omega = 0$ se $y \rightarrow \infty$. Logo, utilizando as relações anteriores, o PVC pode ser reescrito como:

$$F''(\eta) = -2\eta F'(\eta)$$

$$F'(0) = -2 \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t} \delta_n$$

$$F(\infty) = 0$$

Resolvendo analiticamente, a solução é dada por

$$\begin{aligned} F(\eta) &= \sqrt{\pi} \delta_n \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t} \operatorname{erfc}(\eta) \\ \operatorname{erfc}(\eta) &= \frac{F(\eta)}{\sqrt{\pi} \delta_n \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t}}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi$

Substituindo a Eq. (3.85) na Eq. (3.76), chega-se a uma expressão para a vorticidade que integrada no intervalo $[0, \infty[$ fornece um valor total de

$$\bar{\omega} \delta_n \delta s = \int_0^\infty \omega(x, y, t) dy \delta s = \sqrt{\pi} \gamma(x) \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu \delta t} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) dy \delta s. \quad (3.86)$$

Porém, da Eq. (3.75), $dy = d\eta 2\sqrt{\nu t}$. Logo, a Eq. (3.86) ganha a forma de:

$$\bar{\omega} d\eta ds = 2\sqrt{\pi} \gamma(x) \frac{t}{\delta t} \partial s \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta = \gamma(x) \delta s. \quad (3.87)$$

Sabendo-se que $\int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta = \frac{1}{\pi}$, a Eq. (3.86) pode ser reescrita como

$$t = \frac{\delta t}{2} \quad (3.88)$$

A Eq. (3.88) representa uma restrição sobre t , que permite determinar a distância de difusão δ_n , fazendo-se $y = \delta_n$ na Eq. (3.75), com η estimado pela Eq. (3.85), ou seja, $\text{erfc}(\eta)$ passa a monitorar a precisão do processo de difusão de vorticidade na parede.

A escolha da determinação da distância de difusão é arbitrária. Dessa forma, neste trabalho, será definido $\text{erfc}(\eta) = 0.47\%$ e, conseqüentemente, $\eta_{0.47\%} = 2.0$, pois esses valores inserem no modelo um satisfatório grau de precisão para o cálculo da distância de difusão, a partir da Eq. (3.89) dada por:

$$\delta_n|_{99.53\%} = 2.83\sqrt{\nu\delta t} \quad (3.89)$$

A equação acima, ainda, permite determinar a área de difusão δA da Fig. 3.14, bem como serve de base para o cálculo do raio do vórtice de Lamb nascente, como será visto posteriormente.

Finalmente, pode-se escrever para a vorticidade no limite quando $y \rightarrow 0$,

$$\omega\left(x, y, \frac{\delta t}{2}\right) = \sqrt{\pi}\gamma(x) \frac{\sqrt{\nu\frac{\delta t}{2}}}{\nu\delta t} \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu\frac{\delta t}{2}}}\right), \quad (3.90)$$

$$\omega\left(x, y, \frac{\delta t}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\gamma(x)}{\sqrt{\nu\delta t}} \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu\delta t}}\right)$$

$$\text{onde, na parede, } \omega\left(x, y, \frac{\delta t}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma(x)}{\sqrt{\nu\delta t}} \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu\delta t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu\delta t}} \gamma(x). \quad (3.91)$$

3.10. Condição de Conservação de Circulação

A condição de conservação da circulação, ou teorema de Kelvin, apresenta uma forte relação com a situação física simulada, uma vez que o Método de Vórtices se baseia na evolução do escoamento a partir da vorticidade gerada no contorno. Assim, esta pode ser escrita como

$$\frac{d\Gamma_{total}}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{d\Gamma_C}{dt} = 0, \quad (3.92)$$

onde Γ_C é a circulação no corpo, definida como

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{A_C} \omega dA = \frac{d}{dt} \int_{A_C} 2\Omega(t) dA = 2 \frac{d\Omega}{dt} A_C, \quad (3.93)$$

onde $\omega = 2\Omega$, e $\Omega(t)$ e A_C são, respectivamente, a velocidade angular de rotação e a área ocupada pelo corpo no plano. Substituindo a Eq. (3.93) na Eq. (3.92), obtém-se

$$\frac{d\Gamma}{dt} + 2 \frac{d\Omega}{dt} A_C = 0, \quad (3.94)$$

ou, após a integração no tempo,

$$\Gamma = -2A_C [\Omega(t + \Delta t) - \Omega(t)]. \quad (3.95)$$

No entanto, por definição,

$$\Gamma = \int_C \gamma(s) ds = \int_{C_C} \gamma(s) ds + \int_{A_C} \omega dA + \int_{A_E} \omega dA, \quad (3.96)$$

onde a primeira integral do lado direito refere-se às folhas de vorticidade, a segunda, aos vórtices nascentes, e a terceira corresponde aos vórtices livres na esteira. Então,

$$\int_{C_C} \gamma(s) ds + \int_{A_C} \omega dA = - \int_{A_E} \omega dA - 2A_C [\Omega(t + \Delta t) - \Omega(t)]. \quad (3.97)$$

Como no instante inicial não existem vórtices livres na esteira e, uma vez que o corpo é livre de rotação, a condição de conservação de circulação pode ser reescrita como

$$\int_{C_C} \gamma(s) ds + \int_{A_C} \omega dA = 0. \quad (3.98)$$

3.11. Carregamentos Sobre o Corpo

A solução do escoamento resulta na determinação do campo de velocidade. No entanto, o interesse maior em aplicações de Engenharia continua sendo a determinação do carregamento sobre o corpo imerso no meio fluido.

Normalmente, utiliza-se a Equação de Bernoulli transiente para o cálculo da pressão sobre o corpo, o que faz com que seja necessário o cálculo do termo dependente do tempo, integrando a pressão na superfície.

Neste trabalho, para o cálculo do coeficiente de atrito na parede $C_f = \frac{2}{Re_L} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$,

utiliza-se uma aproximação de primeira ordem para o perfil de velocidade na parede, ou

$$\text{seja, } \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \cong \frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

3.11.1. Metodologia de Lewis

A metodologia proposta por LEWIS (1991) baseia-se na integração da pressão na parede e parte da Equação de Navier-Stokes avaliada sobre a superfície, resultando em

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*}. \quad (3.99)$$

3.11.2. Metodologia de Wu

WU (1981) apresenta uma metodologia que considera o escoamento como um todo. Dessa forma, o autor propõe uma avaliação da força de superfície, expressa por

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d\alpha_i}{dt} + \rho \sum_{j=1}^{N_j} \frac{d}{dt} \int_{R_j} \mathbf{u} dr, \quad (3.100)$$

onde α_i é definido como o primeiro momento de inércia, expresso por

$$\alpha_i = \int_{R_\infty} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR. \quad (3.101)$$

Aqui, $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor campo de vorticidade, $\mathbf{u}$ o vetor velocidade do corpo j , $\mathbf{r}$ o vetor posição do campo de vorticidade, R_j a região ocupada pelo corpo j e $R_\infty = R_f + \sum_j R_j$,

onde R_f é a região ocupada apenas pelo fluido.

A Eq. (3.100) estabelece que $\mathbf{f}$ é a soma da força de inércia devido o deslocamento do fluido para contornar o corpo, acrescida de um termo proporcional à taxa de variação temporal do primeiro momento de vorticidade.

Substituindo a Eq. (3.101) na Eq. (3.100) tem-se, para apenas um corpo,

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{R_f} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho \frac{d}{dt} \int_{R_j} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR + \rho \frac{d}{dt} \int_{R_j} \mathbf{u} dr. \quad (3.102)$$

A equação acima define a força de contato para um corpo em movimento relativo a um fluido qualquer. Os dois primeiros termos referem-se às forças devido à vorticidade

presente no escoamento e no corpo, enquanto a terceira integral expressa um balanço de massa virtual na superfície.

Para um corpo em repouso e imerso em um escoamento uniforme com velocidade constante U_∞ , a Eq. (3.102) fica

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{R_f} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho \frac{d}{dt} \int_{R_j} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho \frac{dU_\infty}{dt} R_j, \quad (3.103)$$

uma vez que $U_j = -U_\infty$ e $\rho U_j \frac{\partial R_j}{\partial t} = 0$ (corpo indeformável).

Para um escoamento que se inicia impulsivamente, pode-se escrever

$$\left. \frac{dU_\infty}{dt} \right|_{t \leq \Delta t} = \frac{U_\infty}{\Delta t} \Big|_{t \leq \Delta t}, \quad (3.104)$$

onde a expressão acima representa a força infinita necessária a mover impulsivamente o escoamento ou o corpo, partindo-se do repouso.

Substituindo-se a Eq. (3.104) na Eq. (3.103), obtém-se

$$\mathbf{f} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{R_f} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho \frac{d}{dt} \int_{R_j} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dR - \rho R_j \frac{U_\infty}{\Delta t} \Big|_{t \leq \Delta t}. \quad (3.105)$$

CAPÍTULO 4

MODELO NUMÉRICO

Este capítulo apresenta o método numérico utilizado para resolver o escoamento ao redor de corpos, fundamentado na utilização conjunta do Método de Vórtices e do Método dos Painéis.

Para a etapa convectiva do Método de Vórtices, será utilizado o método de aceleração de cálculo conhecido como Método de Expansão em Multipolos Adaptativo – MEMA e para a etapa difusiva, o Método do Avanço Randômico (MAR) ou o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Estes métodos são aplicados ao problema puramente difusivo do vórtice de Lamb, uma vez que a solução para este problema é conhecida.

Este capítulo ainda fornece as equações discretizadas para a solução numérica, assim como os detalhes para a implementação e o algoritmo geral do método. A escolha dos parâmetros numéricos utilizados também é comentada, dando ênfase àqueles que apresentam maior influência no método.

4.1. Método de Vórtices

O Método de Vórtices se apresenta como uma excelente ferramenta numérica utilizada na modelagem de escoamentos internos e externos, pois utiliza a descrição Lagrangiana, livre de malhas auxiliares de cálculo, para simular a evolução da dinâmica do escoamento como um todo, a partir da evolução de uma nuvem de vórtices discretos.

Seu desenvolvimento foi possível a partir da observação, por Helmholtz (1858), que as linhas de vorticidade em um escoamento não-viscoso permaneciam constituídas pelos mesmos elementos de fluido. Dessa forma, a discretização do campo de vorticidade, através de uma superposição de vórtices, permitia o cálculo da dinâmica do transporte da vorticidade no escoamento, considerado irrotacional em todo o meio, com exceção dos pontos onde se encontram os vórtices.

No entanto, a discretização do campo de vorticidade necessária para se realizar o transporte da vorticidade na descrição Lagrangiana, se realizada com vórtices pontuais, apresenta o inconveniente matemático de indução de um campo de velocidade singular nas proximidades dos vórtices discretos. Para contornar este problema, muitos modelos de vórtices têm sido empregados, como os vórtices de Rankine e de Lamb, apresentados no capítulo anterior, os quais desingularizam o campo de vorticidade com a introdução de um núcleo para os vórtices.

Uma vez desingularizados, os vórtices compõem uma sub-região que deve representar a parte rotacional do escoamento. Para tanto, seus núcleos devem definir áreas que interceptem os núcleos dos vórtices vizinhos. A necessidade de recobrimento do núcleo dos vórtices pela interseção de núcleos adjacentes para permitir a convergência, bem como de um grande número de vórtices para representar a região rotacional do escoamento são as principais desvantagens deste método numérico em relação aos demais utilizados na Mecânica dos Fluidos Computacional.

Pode-se, no entanto, citar como vantagens do Método de Vórtices o fato deste ser um método numérico que dispensa a utilização de malhas auxiliares de cálculos, reduzindo o problema de difusão numérica; sua aplicação a geometrias complexas ser relativamente fácil, permitindo a simulação do escoamento externo ao redor de corpos de diferentes configurações; a facilidade de correlação entre a simulação e a física do problema, permitindo a realização de deduções lógicas referentes aos fenômenos físicos envolvidos, a partir da análise dos resultados obtidos; e a satisfação exata e implicitamente da condição de contorno no infinito.

4.1.1. Equacionamento e Algoritmo do Método de Vórtices

O Método de Vórtices Discretos consiste, fundamentalmente, numa ferramenta numérica extremamente adequada para simular a dinâmica da vorticidade em escoamentos externos. O método baseia-se na modelagem da vorticidade presente no escoamento como uma nuvem de vórtices discretos, cujo campo de velocidade induzido pela nuvem é resultado da dinâmica do escoamento como um todo. A evolução temporal do escoamento se dá devido ao transporte convectivo e difusivo de vorticidade que é regido pela Equação

de Transporte de Vorticidade, deduzida no capítulo anterior, expressa, para o caso tridimensional, por

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} . \quad (4.1)$$

O Método de Vórtices tem se desenvolvido a ponto de já ser possível realizar simulações tridimensionais, modelados pela inclusão do termo de esticamento e deformação das linhas de vorticidade (primeiro termo do lado direito da Eq. (4.1)). A representação de contornos internos é possível a partir da utilização de folhas de vorticidade para o caso não-viscoso, e a partir de modelos com geração de vorticidade por elementos de contorno para o caso viscoso.

No entanto, para o caso de um escoamento idealizado como bidimensional, a Eq. (4.1) pode ser simplificada, pois o primeiro termo do lado direito da equação (termo de esticamento e deformação dos tubos de vorticidade) é nulo e a vorticidade, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, torna-se um escalar. Logo, em escoamentos bidimensionais, $\boldsymbol{\omega}$ possui apenas uma componente não nula, a componente normal ao plano do escoamento. Assim, a Eq. (4.1) reduz-se a

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega . \quad (4.2)$$

Embora os efeitos convectivos e difusivos ocorram simultaneamente, pode-se supor, do ponto de vista numérico, que eles ocorram sucessivamente dentro de um mesmo intervalo de tempo Δt . Com base nessa idéia, CHORIN (1973) propôs que o operador convectivo-difusivo da Eq. (4.2) fosse decomposto em dois operadores, um puramente convectivo e outro puramente difusivo, governados respectivamente, pelas seguintes equações, respectivamente, para a convecção e para a difusão,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \text{ e} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega . \quad (4.4)$$

A simulação é realizada de tal forma que a etapa convectiva é calculada através da Eq. (4.3), ignorando-se os efeitos viscosos e, dentro do mesmo intervalo de tempo, resolve-se a etapa difusiva através da Eq. (4.4), ignorando-se os efeitos convectivos. Assim é estabelecida a relação entre a representatividade do modelo escolhido para se simular estes fenômenos físicos e a discretização no tempo para sua solução, ou seja, quanto mais representativos forem os modelos de convecção e difusão utilizados, e quanto menor for o intervalo de tempo aplicado para esta solução sequencial, mais acurados serão os resultados.

Um diagrama esquemático simplificado do algoritmo básico do método é apresentado:

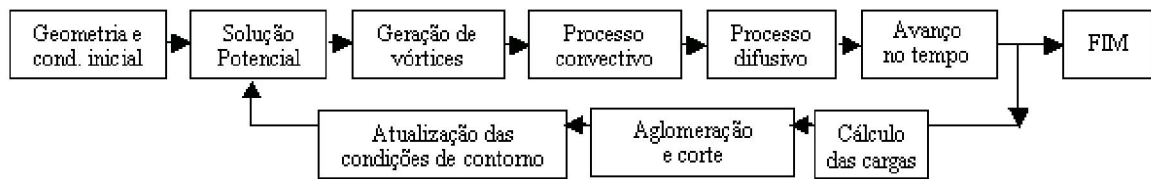


Figura 4.1 – Algoritmo esquemático do Método

As etapas do Método de Vórtices em combinação com o Método dos Painéis, mostradas no diagrama esquemático acima, serão apresentadas nos itens seguintes.

4.2. Solução Potencial – Método dos Painéis

Pode-se classificar muitos dos métodos numéricos conhecidos atualmente como Métodos Aproximados, pois se originam de formulações do Método dos Resíduos Ponderados, tais como o Método de Diferenças Finitas; o Método dos Elementos Finitos, que se baseia em formulações fracas; e o Método de Integral de Contorno ou Método de Elementos de Contorno, baseado na formulação inversa.

Dentre os métodos utilizados para a análise de escoamentos potenciais, pode-se citar os analíticos, tais como o Método de Perturbações (VAN DYKE, 1975) e a Teoria de Variáveis Complexas (CHURCHILL e BROWN, 1984). Esta última aborda a técnica de

Transformação Conforme, utilizada por CARREIRO (2002) e o Teorema do Círculo, empregado por MUSTTO (2004), entre outros dispostos na literatura.

O Método dos Painéis é uma particularização do Método de Elementos de Contorno para aplicação em escoamentos potenciais. Utiliza funções de ponderação, conhecidas como funções elementares, que são soluções fundamentais da Equação de Laplace, as quais eliminam as integrais de domínio e reduzem o problema a formulações que utilizam apenas integrais no contorno. Apesar de ser uma simplificação do Método de Elementos de Contorno, o Método dos Painéis apresenta excelentes resultados, podendo inclusive ser utilizado para discretizar geometrias complexas.

Assim, o escoamento potencial é governado pela Equação de Laplace para o potencial de velocidade, $\nabla^2 \phi = 0$, ao substituir $\mathbf{u} = \nabla \phi$ na Equação da Continuidade para o escoamento incompressível, dado por $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Considerando, então, o escoamento potencial, bidimensional e incompressível ao redor de um corpo em repouso, pode-se formular o seguinte Problema de Valor de Contorno para o potencial de velocidade na forma adimensional, conforme realizado no Capítulo 3 e repetido aqui:

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ no fluido} \quad (4.5)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ na superfície do corpo} \quad (4.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\nabla \phi(\mathbf{r}, t)| = 1, \text{ no infinito} \quad (4.7)$$

Utilizando a identidade de Green, a solução para o PVC acima fica

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_C} \left[\lambda(\ln r) - \mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_E} \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS + \phi_\infty(P), \quad (4.8)$$

onde $-\mu = \phi - \phi_i$ é definido como dipolo e $-\lambda = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n}$ como fonte, sendo $\mathbf{n}$ o vetor normal, com sentido positivo para o interior da superfície de controle.

Para satisfazer a Eq.(4.8), é possível abordar o problema estabelecendo soluções gerais para o caso de escoamento incompressível, ou seja, é possível se obter a solução da Eq. (4.5) distribuindo-se fontes e dipolos (ou vórtices) ao longo do contorno. Estas soluções são conhecidas como soluções elementares, e respeitam automaticamente a condição de contorno no infinito, expressa pela Eq. (4.7), devido ao decaimento de seus campos de velocidade induzidos, dado por r^{-k} , onde $k \geq 1$.

A solução do meio envolve, então, a integração destas soluções elementares no contorno, uma vez que cada elemento estende seu efeito ao escoamento como um todo. Deste modo, o problema se reduz a encontrar a distribuição de funções apropriada de modo que a condição de contorno no infinito seja satisfeita.

Especificando o valor do potencial $\phi(P)$ nos contornos, obtém-se uma formulação conhecida como Formulação Indireta ou Problema de Dirichlet, ao passo que se especificando velocidades induzidas nos contornos, obtém-se a Formulação Direta ou Problema de Neumann. Independentemente do tipo de formulação escolhida, o problema consiste na solução de um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são as intensidades das singularidades aplicadas nos contornos, que serão vistas no próximo item.

4.2.1. Escolha de Singularidades

A escolha das singularidades adequadas para a correta modelagem do problema em estudo deve ser feita de acordo com cada situação física considerada.

Apesar da solução geral da Eq. (4.8) contemplar apenas distribuição de fontes e dipolos, neste trabalho será utilizado um elemento de singularidade do tipo vórtice com distribuição linear de vorticidade, baseado no potencial de velocidade induzido por um vórtice potencial ou pontual, o que para o caso de três dimensões se baseia na Lei de Biot-Savart.

A distribuição de vorticidade linear pode ser decomposta na soma de uma distribuição constante e de uma distribuição linear pura. A distribuição de vorticidade constante $\gamma(x) = \gamma = \text{cte.}$ localiza-se ao longo do eixo x conforme Fig. 4.2:

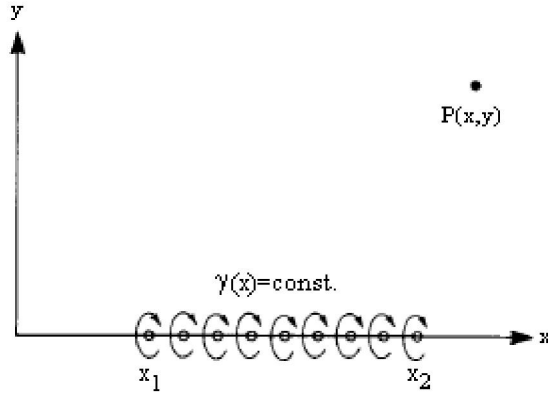


Figura 4.2 – Distribuição de vorticidade constante ao longo do eixo x

A influência desta distribuição num ponto $P(x,y)$ é a integral da influência dos elementos pontuais entre $x_1 \rightarrow x_2$. Assim, o potencial e as componentes de velocidade são expressos, respectivamente, por

$$\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \arctg \frac{y}{x - x_0} dx_0, \quad (4.9)$$

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \text{ e} \quad (4.10)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0. \quad (4.11)$$

Resolvendo as integrais acima, tem-se

$$\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} \left[(x - x_1)\theta_1 - (x - x_2)\theta_2 + \frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right], \quad (4.12)$$

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \text{ e} \quad (4.13)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad (4.14)$$

onde $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}$, $\theta_1 = \arctg \frac{y}{x-x_1}$ e $\theta_2 = \arctg \frac{y}{x-x_2}$.

Substituindo as relações acima nas Eqs. (4.12), (4.13) e (4.14), estas ficam

$$\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} \left[(x-x_1) \arctg \frac{y}{x-x_1} - (x-x_2) \arctg \frac{y}{x-x_2} + \frac{y}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} \right], \quad (4.15)$$

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \left(\arctg \frac{y}{x-x_2} - \arctg \frac{y}{x-x_1} \right) e \quad (4.16)$$

$$v = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2}. \quad (4.17)$$

Na distribuição de vorticidade linear $\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x-x_1)$, considerando apenas a porção linear, onde $\gamma(x) = \gamma_1 x$ e $\gamma(x) = \gamma_1 = cte.$, a influência desta distribuição de vorticidade no ponto $P(x, y)$ no plano $x-y$ é obtida pela integração dos elementos pontuais entre $x_1 \rightarrow x_2$ por

$$\phi = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \arctg \frac{y}{x-x_0} dx_0, \quad (4.18)$$

$$u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 y}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \text{ e} \quad (4.19)$$

$$v = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x-x_0)}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0. \quad (4.20)$$

Integrando as expressões acima, tem-se

$$\phi = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left[\frac{xy}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} + \frac{y}{2} (x_1 - x_2) + \frac{x^2 - x_1^2 - y^2}{2} \arctg \frac{y}{x-x_1} - \frac{x^2 - x_2^2 - y^2}{2} \arctg \frac{y}{x-x_2} \right], \quad (4.21)$$

$$u = \frac{\gamma_1}{4\pi} \left[y \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} + 2x \left(\arctg \frac{y}{x-x_2} - \arctg \frac{y}{x-x_1} \right) \right] e \quad (4.22)$$

$$v = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \left[\frac{x}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} + (x_1 - x_2) + y \left(\arctg \frac{y}{x-x_2} - \arctg \frac{y}{x-x_1} \right) \right]. \quad (4.23)$$

4.2.2. Implementação Numérica

A eficiência do Método dos Painéis está intimamente relacionada com a escolha do tipo de singularidade (fontes, dipolos ou vórtices) com distribuição constante, linear ou de ordens superiores. Outro fator determinante para uma modelagem representativa é a discretização da geometria, utilizando painéis formados por segmentos de reta, ou por painéis curvos que garantam a continuidade da derivada da geometria entre os painéis.

PEREIRA (2005) realizou comparações entre os diferentes tipos de singularidades e distribuições e chegou à conclusão de que, para o caso do escoamento potencial ao redor de aerofólios, uma excelente relação custo computacional e acurácia dos resultados é obtida, utilizando-se uma distribuição linear de vorticidade.

Deste modo, este trabalho discretiza o corpo em N painéis (Fig. 4.3), sobre os quais são distribuídos elementos de vorticidade com variação linear, conforme (Fig. 4.4b), e são posicionados pontos de controle onde a condição de contorno descrita pela Eq. (4.6) é satisfeita. Os pontos nodais representam os pontos extremos de cada painel.

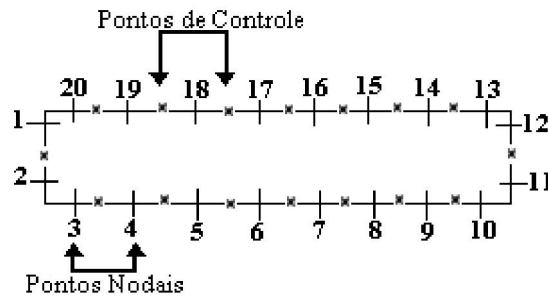


Figura 4.3 – Placa plana discretizada

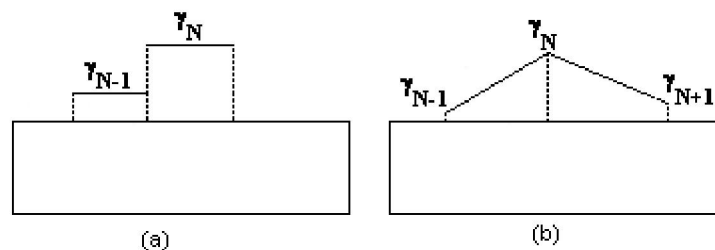


Figura 4.4 – Distribuição das singularidades: a) constante; b) linear

A Fig. 4.4 permite observar as diferenças entre as distribuições constante e linear das singularidades nos painéis. Pode-se notar que não há continuidade entre as intensidades destas distribuições no caso constante (Fig. 4.4a), diferentemente da Fig. 4.4b, onde a continuidade da intensidade é mantida nos pontos nodais (extremos de cada painel), permitindo, portanto, uma melhor representação.

A implementação numérica do Método dos Painéis requer a utilização de um sistema de coordenadas local para cada painel e de um sistema de coordenadas global, os quais podem ser vistos na Fig. 4.5 (para um cilindro de seção circular), onde β_i é o ângulo entre o painel i e o sistema global, medido no sentido horário.

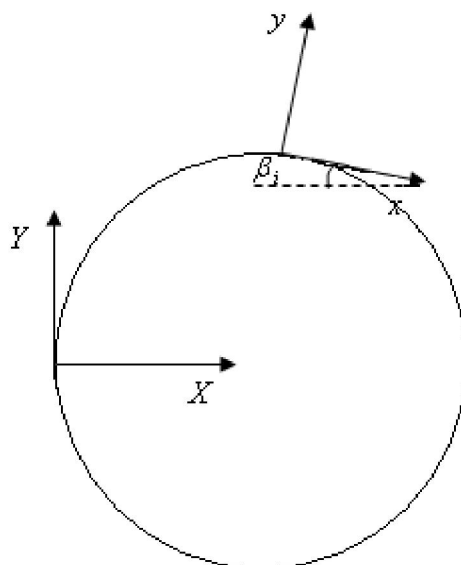


Figura 4.5 – Sistema de coordenadas global e local do painel

A relação entre estes sistemas é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & -\sin \beta_i \\ \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-X_l \\ Y-Y_l \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

onde x e y são as coordenadas no sistema local do painel, referentes a um ponto de coordenadas globais X e Y , sendo X_l e Y_l as coordenadas da origem do sistema do painel no sistema global.

4.2.2.1. Distribuição de Vorticidade Constante

Apesar deste trabalho utilizar uma distribuição linear de vorticidade ao longo dos painéis, é necessário obter inicialmente o equacionamento para o caso de distribuição constante de vorticidade, o que é feito a seguir.

A equação integral para o caso bidimensional é dada pela Eq. (4.8). Para construir uma solução numérica, a superfície é dividida em N painéis e a integração fica

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\text{painel}} \nabla(\lambda \ln r) dS - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\text{painel}} \mu \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS + \phi_\infty = cte., \quad (4.25)$$

$$\text{onde } -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{painel}} \nabla(\ln r) dS = A_j \text{ e } \frac{1}{2\pi} \int_{\text{painel}} \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS \Big|_j = B_j.$$

Tomando o gradiente da Eq. (4.8) e substituindo as relações acima nas Eqs. (4.6) e (4.25), chega-se a

$$\left\{ \sum_{j=1}^N A_j \lambda_j + \sum_{j=1}^N B_j \mu_j \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}, \quad (4.26)$$

onde A_j e B_j são denominados coeficientes de influência e dependem apenas da geometria do corpo discretizado. Percebe-se que a esteira não foi discretizada, razão pela qual a segunda integral da Eq. (4.8) é retirada da solução potencial, devendo ser modelada pela nuvem de vórtices discretos, a qual permitirá o acoplamento entre o Método dos Painéis e o Método de Vórtices.

A Eq. (4.26), escrita para uma distribuição de vorticidade constante ao longo do painel, toma a forma

$$\left\{ \sum_{j=1}^N A_j \gamma_j \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n}, \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{n} = (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i)$ e $\nabla \phi_\infty = U_\infty X + V_\infty Y$.

O campo de velocidade induzida por uma distribuição constante de vorticidade é dado, então, por

$$u_{p_j} = \frac{\gamma_j}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(\arctg \frac{y - y_2}{x - x_2} - \arctg \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \text{ e} \quad (4.28)$$

$$v_{p_j} = -\frac{\gamma_j}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} = -\frac{\gamma_j}{4\pi} \ln \left[\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \right] \quad (4.29)$$

que são as componentes da velocidade induzida pelo painel j no ponto (x, y) , cujos pontos nodais são x_1 e x_2 , no sistema de coordenadas de painel, de acordo com a Fig. 4.6.

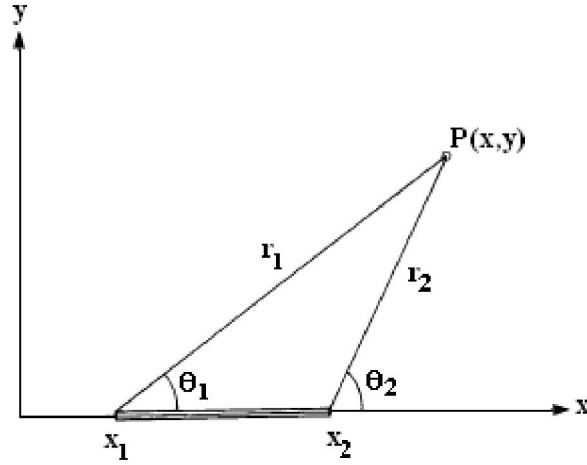


Figura 4.6 – Variáveis do sistema de coordenadas do painel

Pode-se escrever o sistema de equações formado por N painéis da Eq. (4.27) na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,N-1} & A_{1,N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,N-1} & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ A_{N,1} & A_{N,2} & & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

O sistema formado acima possui N equações e N incógnitas. Porém, em situações que se deseja resolver o escoamento potencial com distribuição constante de vorticidade, deve-se adicionar ainda a condição de Kutta, expressa por $\gamma_1 + \gamma_N = 0$, obtendo-se um sistema com $N+1$ equações e N incógnitas, que pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados. A matriz A do sistema é chamada de matriz de influência e depende apenas da geometria do corpo, ao passo que o termo independente b refere-se ao escoamento incidente e à nuvem de vórtices.

Observa-se que cada linha representa a satisfação da condição de contorno de não-penetração, descrita pela Eq. (4.6) para cada painel em seu ponto de controle, ou seja, cada linha i representa a equação que iguala a influência de todos os painéis j ao escoamento incidente, no sistema de coordenadas global. O cálculo dos termos da diagonal principal da

matriz A deve ser feito tomando-se o cuidado para manter o painel fora do domínio, ou seja, deve-se obter $A_{ii} = 0.5$, fazendo-se $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ na Eq. (4.28) quando $i = j$.

Na montagem da matriz de influência A , os coeficientes A_{ij} correspondem à influência do painel j sobre o ponto de controle i no que se refere apenas à geometria. Estes coeficientes são inicialmente calculados no sistema de coordenadas do painel j , fazendo-se $\gamma_j = 1$ nas Eqs. (4.28) e (4.29), sendo posteriormente transferidos para o sistema global por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i \\ -\sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p_j} \\ v_{p_j} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

e projetados na direção normal ao painel i conforme

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{ij} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{ij} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i). \quad (4.32)$$

O vetor independente b_i é calculado projetando-se o escoamento incidente na direção normal a cada painel i , como

$$b_i = - \begin{pmatrix} U_\infty \\ V_\infty \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), \quad (4.33)$$

onde α é o ângulo de ataque que, para o caso do cilindro de seção circular, é nulo.

4.2.2.2. Distribuição de Vorticidade Linear

A influência que cada painel exerce sobre os demais e sobre o escoamento depende dos valores das singularidades nos extremos do painel. Assim, a Eq. (4.27) fica

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (A_j \gamma_j + A'_j \gamma_{j+1}) \right\} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \phi_\infty \cdot \mathbf{n} . \quad (4.34)$$

O campo de velocidade induzido por uma distribuição linear de vorticidade pode ser obtido superpondo-se os efeitos de uma distribuição constante com os de uma distribuição linear pura, conforme a Fig. 4.7.

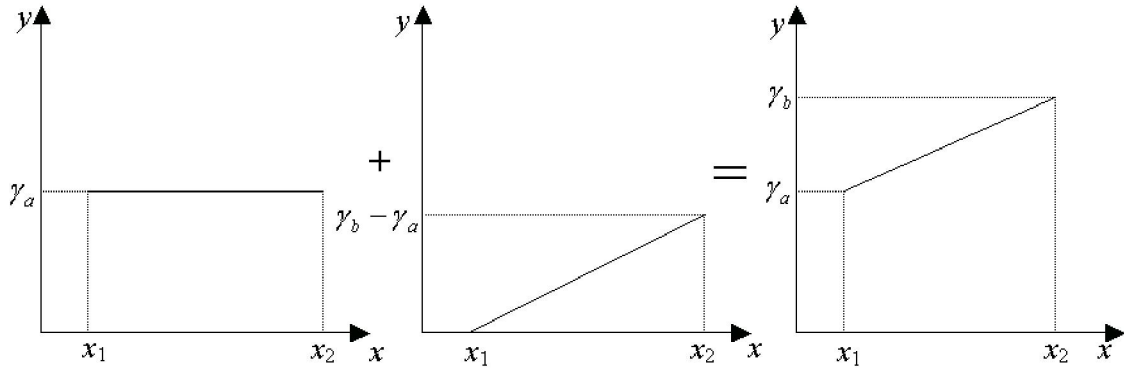


Figura 4.7 – Superposição da distribuição de vorticidade constante com a linear pura

Considerando-se a superposição dos efeitos da distribuição de vorticidade constante, com a distribuição linear pura sobre o painel j , combinando a Eq. (4.16) com Eq. (4.22) e a Eq. (4.17) com Eq. (4.23), obtém-se finalmente as equações de velocidades induzidas por painéis com distribuição linear de vorticidade, em função das vorticidades dos pontos nodais,

$$u_{p_j} = \frac{\gamma_0}{2\pi} \left(\arctg \frac{y}{x-x_2} - \arctg \frac{y}{x-x_1} \right) + \frac{\gamma_1}{4\pi} \left[y \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} + 2x \left(\arctg \frac{y}{x-x_2} - \arctg \frac{y}{x-x_1} \right) \right] \quad \text{e} \quad (4.35)$$

$$v_{p_j} = -\frac{\gamma_0}{4\pi} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} - \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[\frac{x}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} + (x_1 - x_2) + y \left(\arctg \frac{y}{x-x_2} - \arctg \frac{y}{x-x_1} \right) \right]. \quad (4.36)$$

Assim, rearranjando as equações em termos de γ_a e γ_b , onde a e b se referem aos extremos 1 e 2, respectivamente, obtém-se

$$u_{p_j} = \frac{\gamma_a}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right] e \quad (4.37)$$

$$v_{p_j} = \frac{\gamma_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x_1) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (4.38)$$

Para montar a matriz de influência, do caso da distribuição linear de vorticidade, é necessário calcular as velocidades induzidas por cada painel j sobre cada ponto de controle i . Essas velocidades dependem da intensidade da vorticidade nas extremidades de cada painel j quando a distribuição de vorticidade é linear, conforme estabelecido na Eq. (4.34). Como cada intensidade na extremidade de cada painel contribui para a indução de velocidade dos painéis adjacentes, a matriz de influência será formada por uma combinação linear das influências das geometrias dos painéis.

Colocando-se em evidência os termos que dependem de γ_a e γ_b nas Eqs. (4.37) e (4.38), é possível decompor a velocidade induzida pelo painel j , na parte que depende de γ_a e na parte que depende de γ_b como

$$u_{p_j}^a = \frac{\gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x)(\theta_2 - \theta_1) - y \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.39)$$

$$u_{p_j}^b = \frac{\gamma_b}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (4.40)$$

$$v_{p_j}^a = \frac{\gamma_a}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[-x_2 + y(\theta_2 - \theta_1) + (x_2 - x) \ln \frac{r_2}{r_1} \right] e \quad (4.41)$$

$$v_{p_j}^b = \frac{\gamma_b}{2\pi(x_2 - x_1)} \left[(x_2 - x_1) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (4.42)$$

As componentes da velocidade total induzida por um painel j sobre o ponto de controle de um painel i ficam, no sistema de coordenadas do painel j ,

$$\begin{pmatrix} u_{p_j} \\ v_{p_j} \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^a \\ \hat{v}_{p_j}^a \end{pmatrix}_{ij} \gamma_j + \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^b \\ \hat{v}_{p_j}^b \end{pmatrix}_{ij} \gamma_{j+1}. \quad (4.43)$$

Para transformar essas componentes de velocidade para o sistema de coordenadas do painel x-y, uma rotação através do ângulo de orientação do painel β_j é realizada de forma que

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^a \\ \hat{v}_{p_j}^a \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \gamma_j \text{ e} \quad (4.44)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{p_j}^b \\ \hat{v}_{p_j}^b \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \gamma_{j+1}, \quad (4.45)$$

onde a simbologia $(\wedge)$ designa a velocidade induzida por um painel com vorticidade unitária, ou seja, com $\gamma_a = \gamma_b = 1$.

A velocidade induzida no primeiro ponto de controle é influenciada pelas duas extremidades do painel. Então, quando se adiciona a influência do painel j+1 e daí por diante, a velocidade local auto-induzida no primeiro ponto terá a forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_I &= \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{II} \gamma_I + \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{II} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{I2} \right] \gamma_2 + \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{I2} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{I3} \right] \gamma_3 + \dots + \\ &+ \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{I,N-1} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{IN} \right] \gamma_N + \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{IN} \gamma_{N+1} \end{aligned} \quad (4.46)$$

A Eq. (4.46) pode ser generalizada, para o sistema de coordenadas global, na forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{iI} \gamma_I + \sum_{j=2}^N \left\{ \left[\begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{i,j-1} + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} \right] \gamma_j \right\} + \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{iN} \gamma_{N+1}. \quad (4.47)$$

Pela condição de contorno expressa pela Eq. (4.34), esta velocidade induzida, quando adicionada àquela induzida pelo escoamento potencial e projetada na direção normal ao painel, deve ser nula para cada ponto de controle, gerando N equações dadas por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_i \mathbf{n}_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i) = -Q_\infty (\cos \alpha \sin \beta_i \quad \sin \alpha \cos \beta_i), \quad (4.48)$$

onde $i = (1, 2, \dots, N)$.

Para a montagem da matriz de influência, o primeiro e o último elementos de cada linha i já projetados na direção normal do painel i são, respectivamente, dados por

$$a_{i1} = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{i1} \cdot \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{i1} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i) \quad \text{e} \quad (4.49)$$

$$a_{i,N+1} = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{iN} \cdot \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{iN} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i). \quad (4.50)$$

Os demais elementos da matriz de influência são expressos por

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{i,j-1} \cdot \mathbf{n}_i + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \hat{u}^b \\ \hat{v}^b \end{pmatrix}_{i,j-1} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i) + \begin{pmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{v}^a \end{pmatrix}_{ij} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i), \quad (4.51)$$

onde $i = (1, 2, \dots, N)$ e $j = (2, 3, \dots, N)$.

Consequentemente, o termo independente se torna

$$b_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{n}_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (\sin \beta_i \quad \cos \beta_i). \quad (4.52)$$

A utilização da distribuição linear de vorticidade conduz a um sistema de $N+1$ incógnitas com N equações. Para simular a evolução temporal do escoamento a partir de uma condição inicial de repouso, necessita-se utilizar a condição de conservação de circulação de Kelvin. No instante inicial, quando o escoamento ainda está em repouso, tem-se

$$\int_C \gamma ds + \Gamma_E = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta l_j + \sum_{k=1}^M \Gamma_k = 0. \quad (4.53)$$

Como não há vórtices na esteira, então

$$\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta l_j = 0. \quad (4.54)$$

Utilizando a condição de conservação de circulação, chega-se a um sistema de equações algébricas lineares $(N+1) \times (N+1)$, onde as intensidades dos elementos de vorticidade γ_j são as incógnitas. Assim,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ \frac{\Delta l_1}{2} & \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2} & \cdots & \frac{\Delta l_{N-1} + \Delta l_N}{2} & \frac{\Delta l_N}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

4.3. Condição de Contorno – Utilização Simultânea de Painéis e Vórtices

A solução numérica descrita anteriormente para o escoamento potencial ao redor de um corpo busca encontrar a vorticidade sobre os painéis, satisfazendo-se a condição de contorno expressa pela Eq. (4.6), o que é feito tradicionalmente resolvendo-se o sistema de equações representado pela Eq. (4.30), para o caso de distribuição de vorticidade constante

ao longo de cada painel e pela Eq. (4.55), para o caso de distribuição linear de vorticidade sobre os painéis retos. No entanto, esta abordagem permite a satisfação de apenas uma condição de contorno em cada ponto de controle, pois os sistemas são de ordem $N + 1$.

A modelagem descrita a seguir procura estabelecer uma representação mais adequada da condição de contorno na parede, obtendo um equacionamento que permita trabalhar simultaneamente com as duas condições de contorno, incorporando, a partir deste ponto, a utilização simultânea de painéis e vórtices conforme Fig. 4.8.

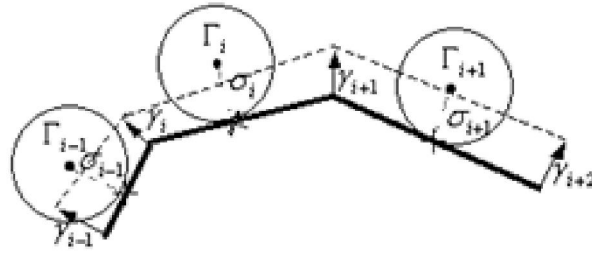


Figura 4.8 – Painéis e vórtices na discretização do corpo

Com a inclusão de N vórtices, um por painel, o sistema passa a ter $2N + 1$ equações (incluindo a condição de conservação de circulação) e $2N + 1$ incógnitas ($N + 1$ γ dos painéis e N Γ dos vórtices). Para obter um bom recobrimento dos núcleos e uma melhor resolução próxima à parede, serão utilizados L vórtices por painel, de forma que os vórtices do mesmo painel possuam intensidade Γ_i / L .

A condição de conservação de circulação para painéis e vórtices passa a contar com a vorticidade calculada para os vórtices do sistema. Assim, tem-se

$$\int_C \gamma ds + \Gamma_E = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta l_j + \sum_{j=1}^N L \Gamma_j + \sum_{k=1}^M \Gamma_k = 0. \quad (4.56)$$

E como no início da simulação não há vórtices livres na esteira, então

$$\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta l_j + \sum_{j=1}^N L \Gamma_j = 0. \quad (4.57)$$

Assim, o sistema a ser resolvido, utilizando-se painéis retos e L vórtices por painel, fica

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{IMP(1,1)} & P_{IMP(1,2)} & \cdots & P_{IMP(1,N)} & P_{IMP(1,N+1)} \\ P_{IMP(2,1)} & P_{IMP(2,2)} & \cdots & P_{IMP(2,N)} & P_{IMP(2,N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{IMP(N,1)} & P_{IMP(N,2)} & \cdots & P_{IMP(N,N)} & P_{IMP(N,N+1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_{IMP(1,N+2)} & V_{IMP(1,N+3)} & \cdots & V_{IMP(1,2N)} & V_{IMP(1,2N+1)} \\ V_{IMP(2,N+2)} & V_{IMP(2,N+3)} & \cdots & V_{IMP(2,2N)} & V_{IMP(2,2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{IMP(N,N+2)} & V_{IMP(N,N+3)} & \cdots & V_{IMP(N,2N)} & V_{IMP(N,2N+1)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_{NE(1,1)} & P_{NE(1,2)} & \cdots & P_{NE(1,N)} & P_{NE(1,N+1)} \\ P_{NE(2,1)} & P_{NE(2,2)} & \cdots & P_{NE(2,N)} & P_{NE(2,N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{NE(N,1)} & P_{NE(N,2)} & \cdots & P_{NE(N,N)} & P_{NE(N,N+1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_{NE(1,N+2)} & V_{NE(1,N+3)} & \cdots & V_{NE(1,2N)} & V_{NE(1,2N+1)} \\ V_{NE(2,N+2)} & V_{NE(2,N+3)} & \cdots & V_{NE(2,2N)} & V_{NE(2,2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{NE(N,N+2)} & V_{NE(N,N+3)} & \cdots & V_{NE(N,2N)} & V_{NE(N,2N+1)} \end{bmatrix} \\ \Delta l_1/2 & (\Delta l_1 + \Delta l_2)/2 & \cdots & (\Delta l_{N-1} + \Delta l_N)/2 & \Delta l_N/2 & L & L & \cdots & L & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \gamma_{N+1} \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \\ \Gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1IMP} \\ b_{2IMP} \\ \vdots \\ b_{NIMP} \\ b_{1NE} \\ b_{2NE} \\ \vdots \\ b_{NNE} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

onde $[P_{IMP}]$ refere-se aos coeficientes de influência dos painéis retos com distribuição linear de vorticidade escritos para a condição de contorno de impenetrabilidade, enquanto que $[P_{NE}]$, para a condição de não-escorregamento. Da mesma forma, $[V_{IMP}]$ são os coeficientes de influência relativos aos L vórtices para impenetrabilidade e $[V_{NE}]$ para não-escorregamento.

Resolvido o sistema para determinação das intensidades das singularidades na superfície do corpo, determina-se a vorticidade necessária para satisfazer simultaneamente as condições de contorno de impenetrabilidade e não-escorregamento para cada passo no tempo. Esta vorticidade é então transferida para o meio fluido ao se gerar novos vórtices, os quais serão posicionados de maneira a manter certo grau de recobrimento de seus núcleos, que garanta uma taxa de convergência satisfatória. A seção seguinte apresenta a maneira de se determinar o número L de vórtices gerados por painel, assim como a localização dos mesmos.

4.4. Difusão da Vorticidade na Superfície Sólida e Nascimento de Novos Vórtices

A seção anterior forneceu o modelo matemático para a determinação da vorticidade necessária para satisfazer as condições de impenetrabilidade e não-eskorregamento nos pontos de controle. Para o modelo apresentado por SANTIAGO (2008), esta vorticidade é distribuída em uma camada de L vórtices por painel, em N painéis retos com distribuição linear de vorticidade conforme sistema representado pela Eq. (4.58).

A Eq. (3.89) estabelece uma distância de difusão $\delta n|_{99,53\%} = 2.83\sqrt{\nu\delta t}$, que permite determinar o raio dos vórtices por painel para a montagem da matriz de influência, expresso por $\sigma_0 = \sqrt{\delta A/\pi}$, onde a área de difusão δA é dada por $\delta A = \delta_n \Delta l \therefore \delta A = 2.83\sqrt{\nu\delta t} \Delta l$.

A quantidade de vórtices por painel L é obtida recorrendo-se ao parâmetro numérico h/σ_0 , sendo h a distância entre os centros dos vórtices gerados. Tal parâmetro controla o grau de recobrimento entre os núcleos e está intimamente relacionado à convergência do Método de Vórtices, razão pela qual deve ser cuidadosamente estudado e controlado. Deste modo, definindo uma razão de aspecto R para a área de difusão δA como $R = \Delta l/\delta_n$, e fazendo-se $\Delta l = 2/N$, chega-se a

$$R = \frac{2}{N} \cdot 2.83\sqrt{\nu\Delta t} . \quad (4.59)$$

Uma vez que $h = \Delta l/L$ e $\sigma_0 = \Delta l/\sqrt{\pi R}$, então

$$R = \left(\frac{h}{\sigma_0} \right)^2 \frac{L^2}{\pi} . \quad (4.60)$$

Considerando-se $\Delta t = k\Delta l$ e igualando-se as Eqs. (4.59) e (4.60), pode-se escrever

$$L = \left[\frac{2\pi^2}{8} \frac{\text{Re}}{N} \frac{1}{\left(\frac{h}{\sigma_0} \right)^4} \right]^{1/3}. \quad (4.61)$$

Deste modo, a posição de nascimento dos vórtices segue uma distribuição uniforme ao longo do corpo, tanto com relação aos L vórtices do mesmo painel, quanto com relação a vórtices de painéis vizinhos.

Determinada a posição e a quantidade de vórtices por painel, resolve-se o sistema em questão, para a satisfação das condições de contorno e obtenção da vorticidade a ser transferida para os vórtices nascentes. Os vórtices nascem com a intensidade igual às incógnitas Γ_i/L do sistema expresso pela Eq. (4.58), para painéis retos. Com esta intensidade Γ_i , calcula-se inicialmente o campo de velocidade do escoamento para, posteriormente, proceder ao cálculo das etapas convectiva e difusiva. Esta intensidade deve ser corrigida, devendo-se levar em consideração, além da já incorporada vorticidade proveniente dos vórtices do sistema Γ_i , a vorticidade calculada para os painéis γ_i , uma vez que a presença do corpo deve ser simulada pelos vórtices e painéis simultaneamente. Assim, após o cálculo do campo de velocidade, a intensidade dos L vórtices nascentes gerados no painel i deve ser atualizada da seguinte maneira

$$\Gamma = \Gamma_i + \Delta l_i \frac{(\gamma_i + \gamma_{i+1})}{2L}. \quad (4.62)$$

4.5. Convecção dos Vórtices

Ao se isolar os efeitos viscosos da Eq. (4.2), chega-se à Eq. (4.3), a qual permite realizar o transporte convectivo da vorticidade, tratando o vórtice como partícula. O embasamento teórico se ampara em dois teoremas fundamentais da dinâmica da vorticidade, o Teorema de Kelvin que estabelece que a circulação ao redor de uma curva

material fechada é constante em um escoamento não-viscoso, e o Teorema de Helmholtz, que prevê que as linhas de vorticidade se movimentam com o fluido.

O Método de Vórtices permite a utilização de uma descrição puramente Lagrangiana, livre de malhas auxiliares de cálculo, para a discretização do campo de vorticidade. Entretanto, esta vantagem traz consigo a necessidade de preenchimento da região rotacional do escoamento, o que é conseguido através do aumento do número de vórtices com consequente recobrimento dos seus núcleos. Esta configura a maior limitação do método na etapa convectiva, uma vez que o cálculo do campo de velocidade induzida em cada vórtice para uma nuvem de M vórtices possui custo computacional da ordem de M^2 , conforme será visto posteriormente.

Dessa forma, o movimento de um vórtice potencial que possui vetor posição $\mathbf{r}_k$ no instante t , é determinado pela taxa de variação do seu vetor posição, ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_k, t). \quad (4.63)$$

Esta expressão Lagrangiana é utilizada então para calcular a nova posição de cada vórtice da nuvem devido ao transporte convectivo de vorticidade, em cada passo de tempo. Para o cálculo da velocidade no vórtice i ou em qualquer outro ponto do domínio, é necessário considerar a influência dos três elementos que induzem velocidade:

- Velocidade induzida no vórtice i , no sistema global, devido ao escoamento incidente;

$$\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix}_i = Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

- Velocidade induzida no vórtice i , no sistema global, devido à presença do corpo discretizado com N painéis e $L \times N$ vórtices;

$$\begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p_j} \\ v_{p_j} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{LN} \begin{pmatrix} \cos \beta_j & \sin \beta_j \\ -\sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{v_j} \\ v_{v_j} \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

onde u_{p_j} e v_{p_j} são as componentes cartesianas da velocidade induzida pelo painel j no vórtice i , no sistema de coordenadas do painel j , definidas pelas Eqs. (4.28) e (4.29) para painéis retos com distribuição constante de vorticidade, e pelas Eqs. (4.37) e (4.38) para painéis retos com distribuição linear, assim como u_{v_j} e v_{v_j} são as componentes cartesianas da velocidade induzida pelos vórtices do sistema, calculadas, respectivamente, pelas Eqs. (3.30) e (3.31).

- Velocidade induzida por uma nuvem de M vórtices pontuais livres j sobre um vórtice i , no sistema global (para $r \geq \sigma_0$).

$$\begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_j (y-y_o)}{2\pi r^2} \\ -\frac{\Gamma_j (x-x_o)}{2\pi r^2} \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Quando $r < \sigma_0$, calcula-se as componentes de velocidade cartesianas induzidas por uma nuvem de vórtices de Lamb j sobre um vórtice i , a partir das Eqs. (3.30) e (3.31) da forma

$$\begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_j y-y_o}{2\pi r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \\ -\frac{\Gamma_j x-x_o}{2\pi r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

onde $r^2 = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2$.

Portanto, a velocidade convectiva total induzida sobre um vórtice i é calculada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix}_i. \quad (4.68)$$

4.5.1. Método de Expansão em Multipolos Adaptativo – MEMA

A etapa convectiva do Método dos Vórtices inclui, além do cálculo do campo gerado pelos painéis, aquele gerado por cada vórtice discreto. Assim, para que o Método de Vórtices realize a convecção dos vórtices, há a necessidade de se calcular a velocidade induzida sobre os outros, como nas Eqs. (4.66) e (4.67), o que implica em um custo computacional da ordem de M^2 , onde M é o número de vórtices livres presentes na simulação. Os resultados são obtidos utilizando o código computacional original implementado por CARRIER *et al.* (1988) em linguagem FORTRAN, que sofreu uma modificação para permitir a adição do vórtice de Lamb para desingularização dos vórtices pontuais.

A estratégia consiste em agrupar os vórtices de uma nuvem em caixas de tamanhos diferentes, de acordo com a densidade local de vórtices, e avaliar as interações entre as caixas que se encontram suficientemente distantes umas das outras pelo método direto (partícula-partícula). Assim, para m partículas de intensidade q_i localizadas em z_i , onde $i = 1, \dots, m$, com $|z_i| < r$, o potencial $\phi(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e $|z_i| > r$, pode ser escrito como

$$\phi(z) = Q \log(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (4.69)$$

onde $Q = \sum_{i=1}^m q_i$ e $a_k = \sum_{i=1}^m \frac{q_i z_i^k}{k}$.

Truncando-se o somatório em p termos, tem-se, para todo $p \geq 1$

$$\left| \phi(z) - Q \log(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} \leq \left(\frac{A}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p, \quad (4.70)$$

onde $c = \left| \frac{z}{r} \right|$, $A = \sum_{i=1}^m |q_i|$ e $\alpha = \frac{A}{1 - \left| \frac{r}{z} \right|}$.

Como CARRIER *et al.* (1988) consideravam caixas “bem separadas” aquelas com $c = 2$, p deveria ser da ordem de $-\log_2 \varepsilon_c$ conforme Eq. (4.70), quando se estabelecia uma acurácia ε_c . O algoritmo tinha início com a escolha de ε_c , realizando-se a expansão em multipolos com p termos. Para tanto, o domínio era dividido sequencialmente em caixas quadradas até que estas tivessem um número de vórtices menor que o número máximo de vórtices por caixa, valor escolhido como dado de entrada. Esse parâmetro influenciava no desempenho do algoritmo do ponto de vista do tempo de processamento, porém não implicava em perda de acurácia.

O código FORTRAN original de Carrier *et al.* (1988) possuía a opção de cálculo diferenciado para o campo induzido em pontos muito próximos, permitindo a desingularização do campo de vorticidade de acordo com o modelo que o usuário desejasse utilizar. Deste modo, o vórtice de Lamb foi adicionado ao programa, sendo o raio do seu núcleo, σ_0 , o parâmetro utilizado como distância para esta desingularização.

4.6. Processo Difusivo

Se por um lado a utilização da descrição Lagrangiana faz com que o Método de Vórtices não necessite da geração de malhas auxiliares de cálculo, sobretudo para geometrias complexas, por outro, insere dificuldades no processo de difusão viscosa, especialmente no que se refere à obtenção de uma solução numérica para o termo de difusão da Equação de Transporte de Vorticidade que seja compatível com a descrição Lagrangiana. Dessa forma, nesta seção, serão apresentadas duas diferentes abordagens para o cálculo do termo difusivo, expresso pela Eq. (4.4), a saber: o Método do Avanço Randômico (MAR) e o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC).

4.6.1. Método do Avanço Randômico – MAR

O Método do Avanço Randômico (MAR) foi inicialmente desenvolvido por CHORIN (1973) para aplicação em escoamentos com alto número de Reynolds. Seu princípio fundamental é substituir o processo difusivo por deslocamentos randômicos de partículas que carregam vorticidade, de modo a simular a evolução do campo de vorticidade devido à difusão viscosa.

A Eq. (4.4) possui solução analítica para um vórtice inicialmente potencial e é escrita na forma adimensional como

$$\omega(r, t) = Re \frac{\Gamma}{4\pi t} \exp\left(-Re \frac{r^2}{4t}\right). \quad (4.71)$$

CHORIN (1973) demonstrou que, quando o número de vórtices tendia ao infinito, o movimento aleatório da nuvem se aproximava da solução exata da Eq. (4.4). Posteriormente, LEWIS (1991) propôs que se a probabilidade de se encontrar um vórtice em uma determinada posição no instante t pudesse ser representada por $\omega(t)$, era possível encontrar os deslocamentos radial e polar deste vórtice, Δr e $\Delta \theta$, invertendo-se a Eq. (4.71) para obter, respectivamente,

$$\Delta r = \sqrt{\frac{4t}{Re} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \quad (4.72)$$

$$\Delta \theta = 2\pi Q, \quad (4.73)$$

onde P e Q são números randômicos entre 0 e 1, retirados de uma distribuição estatisticamente uniforme. As Eqs. (4.72) e (4.73) podem ser escritas em coordenadas cartesianas como

$$\begin{pmatrix} \Delta x_D \\ \Delta y_D \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \Delta r \cos(\Delta \theta) \\ \Delta r \sin(\Delta \theta) \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

4.6.2. Método do Crescimento do Núcleo Corrigido – MCNC

O Método do Crescimento do Núcleo, implementado por LEONARD (1980), estabelecia uma aproximação para a evolução no tempo do campo de vorticidade devido à difusão, através do crescimento do raio do núcleo dos vórtices. Porém, deixou de ser estudado quando GREENGARD (1985) provou que sua solução não convergia para a Equação de Navier-Stokes após longos tempos de simulação. ROSSI (1996) apresentou uma modificação que tornou o método de LEONARD (1980) convergente.

A modificação implementada por ROSSI (1996), denominada “refinamento espacial”, tornou convergente o Método do Crescimento do Núcleo, pois se baseava na escolha de parâmetros numéricos que controlavam a evolução temporal do raio do núcleo, realizando uma divisão dos vórtices em intervalos regulares. Assim, o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) apresentou-se como uma boa opção de método de difusão determinístico, de fácil implementação e completamente livre de malhas. Outra particularidade do MCNC é o fato deste não utilizar a decomposição da Equação de Transporte de Vorticidade que, apesar de não contribuir negativamente para a convergência, introduzia um erro numérico que não está presente no MCNC.

No MCNC, a taxa de crescimento do raio do núcleo é determinada por

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial t} = \nu. \quad (4.75)$$

Definem-se os parâmetros numéricos $\alpha_{MCNC} [0,1]$ e l que determinam a frequência do refinamento espacial. Deste modo, um vórtice com intensidade inicial γ terá seu raio variando de um valor mínimo inicial $\alpha_{MCNC} l$ a um valor máximo l , quando sofrerá uma divisão em quatro novos vórtices com vorticidades de $\gamma/4$. Os valores mínimo e máximo do raio do vórtice estabelecem, respectivamente, a resolução mínima l_m e a resolução máxima l_M da simulação, tal que $l_m \leq \sigma_i \leq l_M$. Estes novos vórtices são posicionados a 90° uns dos outros e a uma distância r em torno do vórtice original, conforme a Fig. 4.9.

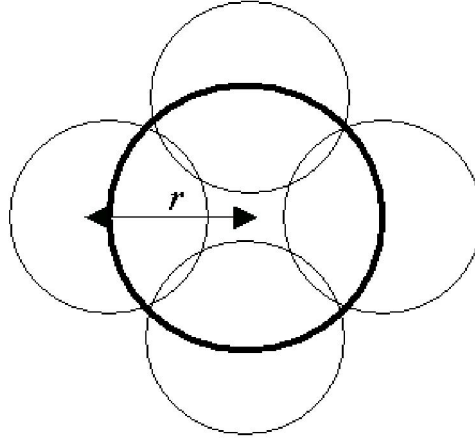


Figura 4.9 – Divisão do vórtice no MCNC

O valor de r é dado pela seguinte expressão que garante a conservação do momento de segunda ordem:

$$r = 2\sigma\sqrt{1 - \alpha_{MCNC}^2} . \quad (4.76)$$

4.7. Avanço Temporal

As etapas convectiva e difusiva do Método de Vórtices fornecem os elementos necessários para o cálculo do deslocamento da nuvem de vórtices. Utiliza-se $\Delta t = k\Delta l$ para estabelecer uma relação entre o deslocamento dos vórtices e o tamanho do painel.

Assim, o deslocamento é calculado utilizando-se o avanço de Euler de primeira ordem para os vórtices que ainda não têm armazenadas as velocidades do passo anterior, ou seja, os recém-nascidos, por

$$\begin{pmatrix} \Delta x_c \\ \Delta y_c \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}_i \Delta t . \quad (4.77)$$

Para os vórtices que já possuem a velocidade do passo anterior, o deslocamento é calculado utilizando-se o avanço de Adams-Bashforth de segunda ordem, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \Delta x_C \\ \Delta y_C \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1,5u(t)-0,5u(t-\Delta t) \\ 1,5v(t)-0,5v(t-\Delta t) \end{pmatrix}_i \Delta t. \quad (4.78)$$

Assim, a nova posição do vórtice i é

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t+\Delta t) \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} \Delta x_C \\ \Delta y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_D \\ \Delta y_D \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

onde o deslocamento de difusão $(\Delta x_D, \Delta y_D) \neq 0$ para o caso do emprego do MAR na etapa difusiva, sendo determinado, portanto, pela Eq. (4.74). Caso seja utilizado o MCNC, tem-se que $(\Delta x_D, \Delta y_D) = 0$.

Esquemas de predição-correção, tais como Runge-Kutta, não foram adotados, pois o cálculo de mais um campo de velocidade da etapa convectiva em um mesmo instante de tempo torna-se excessivamente dispendioso computacionalmente, como citado em GUEDES (2003).

As velocidades $u(t)$ e $u(t-\Delta t)$ da Eq. (4.78) vêm da velocidade de convecção expressa pela Eq. (4.68), a qual representa a soma da velocidade do escoamento incidente, com a velocidade induzida pelos painéis e vórtices do sistema de geração de vorticidade, e com a velocidade induzida pela nuvem de vórtices.

Os vórtices que surgem da divisão do MCNC utilizam $u(t-\Delta t)$ igual ao $u(t-\Delta t)$ do vórtice do qual foi originado. Este procedimento visa garantir a acurácia do esquema de Adams-Bashforth de segunda ordem.

4.8. Mecanismos de Redução do Número de Vórtices

4.8.1. Aglomeração Direta

Como em todo método numérico, a eficiência do Método de Vórtices é medida pelo esforço computacional necessário para se obter uma determinada acurácia. Nos métodos

numéricos que utilizam malhas, o esforço computacional baseia-se no número de pontos da malha onde são realizados os cálculos. No entanto, para o Método dos Vórtices, isento de malhas auxiliares de cálculo, o esforço computacional é consequência do número de vórtices necessários para discretizar o campo de vorticidade acuradamente, garantindo o recobrimento de seus núcleos e a convergência do método.

O Método de Vórtices simula a solução da Equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, aproximando o campo de vorticidade por uma combinação linear de funções de base carregadas pelos vórtices. O recobrimento ocorre quando a influência de mais de uma destas funções é sentida em um determinado ponto do domínio. O crescimento do número de vórtices durante a simulação, resultado da ampliação da região rotacional do escoamento, faz aumentar seu esforço computacional, sobretudo durante a etapa convectiva. Outro fator que contribui para um excessivo número de vórtices, e consequente aumento da razão de recobrimento, é a utilização de métodos de difusão que realizam o refinamento espacial através da divisão dos vórtices, como ocorre no MCNC.

Assim, para garantir esforço computacional e acurácia competitivos, simulações com o Método de Vórtices devem recorrer à utilização de mecanismos de aglomeração eficientes, capazes de reduzir o número de vórtices sem, no entanto, causarem perdas na convergência e acurácia. Tais mecanismos permitem que se substituam diversos vórtices que possuam seus núcleos em excessivo recobrimento, por um único vórtice que possua novos valores de raio, circulação e posição, tais que esta substituição não implique em perda de representatividade. Para tanto, o mecanismo tem a necessidade de avaliar inteiramente a esteira, computando interações entre os vórtices presentes e aglomerando apenas aqueles que têm um excessivo recobrimento de seus núcleos.

O algoritmo de aglomeração necessita do cálculo da distância entre os vórtices, que requer M^2 operações para uma nuvem de M vórtices. Com a utilização da expansão em multipolos, o custo foi reduzido para a ordem de M , tornando o processo de aglomeração o fator limitante.

Este trabalho utilizou o algoritmo de aglomeração desenvolvido por ROSSI (1997), segundo o qual o campo de vorticidade ω foi aproximado por uma combinação linear de N funções de base Gaussianas, dadas por

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{4\pi\sigma_i^2} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^2}{4\sigma_i^2}\right], \quad (4.80)$$

onde cada função de base foi definida por três parâmetros $(\gamma_i, \mathbf{x}_i, \sigma_i)$, os quais correspondem à intensidade, posição e raio do vórtice.

A intensidade do vórtice é definida inicialmente na geração, satisfazendo-se as condições de contorno de impenetrabilidade e não-deslizamento na superfície sólida. A posição do vórtice é determinada pela evolução do escoamento, sendo resultado dos deslocamentos induzidos pela convecção e difusão. O raio do vórtice é um parâmetro definido em função da física do escoamento em questão, ou seja, deve ser escolhido de acordo com a resolução necessária e imposta pelo problema.

Supondo a aglomeração de n vórtices, o erro introduzido no campo de vorticidade é dado por

$$e(\mathbf{x}) \equiv \frac{\gamma_0}{4\pi\sigma_0^2} \left[\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\sigma_0^2}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^2}{4\sigma_i^2}\right) \right]. \quad (4.81)$$

O objetivo do processo de aglomeração é obter um conjunto de n vórtices que aglomerados em um único vórtice com $(\gamma_0, \mathbf{x}_0, \sigma_0)$ mantenha sob controle este erro.

Inicialmente, a escolha de um vórtice que possa substituir esse conjunto de n vórtices, requer a manutenção dos momentos de ordem zero, primeira e segunda ordem, expressos, respectivamente, por

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad (4.82)$$

$$\gamma_0 \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{x}_i \quad \text{e} \quad (4.83)$$

$$4\gamma_0 \sigma_0^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i \left(4\sigma_i^2 + |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|^2 \right) \quad (4.84)$$

O algoritmo de ROSSI (1997) baseava-se, portanto, em identificar os conjuntos de n vórtices que pudessem ser aglomerados segundo as Eqs. (4.82), (4.83) e (4.84), mantendo-se sob controle $e(\mathbf{x})$ da Eq. (4.81), e respeitando-se $l_m \leq \sigma_i \leq l_M$ (limitou-se o raio do núcleo a valores máximo e mínimo, aos quais correspondiam, respectivamente, à máxima e mínima resolução).

ROSSI (1997) realizou a adimensionalização $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} / 2\sigma_0$, o que permitiu escrever a Eq. (4.81) como

$$e(\mathbf{x}^*) \equiv \frac{\gamma_0}{4\pi\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \left\{ \exp\left(-|\mathbf{x}^*|^2\right) - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \exp\left[-|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_i^*|^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right] \right\}. \quad (4.85)$$

Considerando todos os γ com mesmo sinal e observando a Eq. (4.82), percebe-se que a Eq. (4.85) realiza a média aritmética do termo

$$\mathbf{z}_i \equiv \exp\left(-|\mathbf{x}^*|^2\right) - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \exp\left[-|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_i^*|^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right], \quad (4.86)$$

o que permite escrever como limite para o erro no processo de aglomeração de um subconjunto de n vórtices,

$$e(\mathbf{x}^*) \leq \frac{|\gamma_0|}{4\pi\sigma_0^2} \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{z}_i|. \quad (4.87)$$

Com a Eq. (4.87), pode-se limitar o erro da aglomeração de n vórtices, a partir da diferença entre duas funções Gaussianas, conforme a Eq. (4.86). Se os parâmetros σ_0/σ_i e $\mathbf{x}^*$ estão restritos a um conjunto de vórtices, a continuidade da Eq. (4.86) garante que haja um valor máximo M para $\mathbf{z}_i$, o que serve de base para o teorema apresentado por ROSSI (1997) onde, considerando todos os γ com mesmo sinal, tem-se que

$$\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|^2}{4\sigma_0^2} \leq R \text{ e} \quad (4.88)$$

$$b_1 \leq \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i} \right)^2 \leq b_2 \quad (4.89)$$

Então, o erro no campo de vorticidade $\|e(\mathbf{x}^*)\|_\infty$ será menor que $\gamma_0 M / 4\pi\sigma_0^2$, onde $M = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{z}_i|$.

ROSSI (1997) demonstrou que os valores extremos de $\mathbf{z}_i$ são obtidos fazendo-se $\left(|\mathbf{x}_i|^2, \sigma_0^2 / \sigma_i^2 \right) = (R, b_1)$ ou $\left(|\mathbf{x}_i|^2, \sigma_0^2 / \sigma_i^2 \right) = (R, b_2)$.

Uma vez determinado M em função de R , b_1 e b_2 , pode-se estabelecer condições para que se obtenha uma aglomeração com uma tolerância ε_c para $\|e(\mathbf{x}^*)\|_\infty$, expressas por

$$\frac{|\gamma_0| M}{4\pi\sigma_0^2} \leq \varepsilon_c. \quad (4.90)$$

As Eqs. (4.88), (4.89) e (4.90) formam os testes para que se efetue a aglomeração em um conjunto de vórtices, cujo erro estará controlado pela tolerância ε_c estabelecida. Porém, a realização destes testes é de elevado custo computacional, uma vez que é necessário calcular $(\gamma_0, \mathbf{x}_0, \sigma_0)$ pelas Eqs. (4.82) a (4.84) toda vez que um novo candidato é acrescentado ao conjunto de vórtices que se deseja aglomerar.

Por esta razão, é estabelecido um conjunto de testes mais restritivos do que o formado pelas Eqs. (4.88) e (4.90), ou seja,

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 \leq R l_m^2, \quad (4.91)$$

para todo j e um particular i no conjunto de vórtices a ser aglomerado, e

$$|\gamma_0| \leq \varepsilon_c \frac{4\pi d_m^2}{M}. \quad (4.92)$$

A Eq. (4.91) substitui a Eq. (4.88), ao passo que a Eq. (4.92) substitui a Eq. (4.90), uma vez que $\sigma_0 \geq l_m$ e $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|^2 \leq D$. Esta última inequação advém do fato de que $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 \leq D/4$ para todo vórtice j e um vórtice i em particular.

Sendo o custo computacional do Método de Vórtices reduzido pela diminuição de vórtices na esteira, o ganho com a utilização do algoritmo de aglomeração é substancial. Porém, o custo computacional deste processo deve ser contabilizado, uma vez que tende a ser de ordem M^2 .

4.8.2. Aglomeração Utilizando a Hierarquia de Caixas do MEMA

Uma alternativa para diminuir o custo computacional envolvido na aglomeração, é realizá-la isoladamente em cada caixa resultante da divisão do domínio computacional estabelecida pelo MEMA. Tal procedimento permite a utilização do algoritmo de aglomeração em cada caixa separadamente, evitando avaliar as interações entre os vórtices que estão em caixas diferentes, o que reduz o custo computacional do processo. A eficiência da aglomeração é garantida pelo fato de que a densidade local de vórtices é mantida sobre controle durante a divisão do domínio em caixas executada pelo MEMA.

4.8.3. Corte

O corte (“cut off”) é um outro mecanismo encontrado na literatura, que tem como objetivo manter sob controle o número de vórtices, estabelecendo um teto para o tamanho do problema, e mantendo sob controle o crescimento do número de vórtices.

No processo de divisão dos vórtices, durante a etapa difusiva, para o caso do MCNC, a intensidade dos vórtices vai sendo dividida sucessivamente, criando regiões com vorticidade extremamente baixa, na fronteira da região rotacional, povoadas por uma grande quantidade de vórtices que possuem intensidades muito pequenas, gerando um

esforço computacional desnecessário. Deste modo, o procedimento descrito como corte é adotado, fazendo simplesmente com que vórtices com intensidades inferiores a um parâmetro estabelecido (Γ_{corte}) parem de se dividir, permanecendo com seu núcleo constante até o final da simulação. A escolha do parâmetro numérico para Γ_{corte} deve ser feita em função do escoamento em estudo, do custo computacional admissível e da acurácia desejada.

4.9. Correção do Campo de Vorticidade Para Vórtices que Cruzam a Superfície

A desingularização dos vórtices insere um erro na avaliação do campo de velocidade induzida pelos vórtices que têm o seu núcleo interceptando a placa plana, conforme Fig. 4.10.

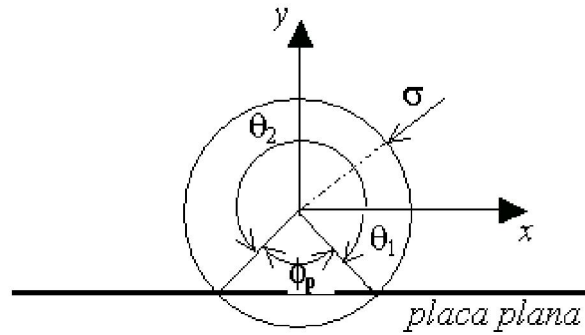


Figura 4.10 – Vórtice com raio σ que cruza a placa plana

Tal erro no campo de velocidades induzidas pelos vórtices, cujos núcleos cortam a superfície sólida, pode ser modificado através da avaliação da vorticidade presente no escoamento, corrigindo, simultaneamente, a circulação Γ e o raio σ dos vórtices, cujos núcleos cruzam a superfície.

A vorticidade real presente no escoamento pode ser encontrada, avaliando-se a seguinte integral

$$\Gamma^* = \int_{-\theta_1}^{-\theta_2} \omega dA = \int_{-\theta_1}^{-\theta_2} \int_0^{\infty} \frac{\Gamma}{\pi \sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r dr d\theta = \left(1 - \frac{\phi_p}{2\pi}\right) \Gamma, \quad (4.93)$$

onde ϕ_p define o arco que está dentro da placa, conforme Fig. (4.10).

A Eq. (4.93) corrige a circulação que deve ser aplicada para o cálculo do campo de velocidade. A correção do raio é feita a partir da relação $A'' = A_T - A^{**}$, onde A_T é a área total do núcleo do vórtice, A'' a área acima da superfície e A^{**} , abaixo. Como $A^{**} = \sigma^2 / 2 (\phi_p - \sin \phi_p)$, então,

$$\sigma^* = \sqrt{1 - \frac{(\phi_p - \sin \phi_p)}{2\pi}} \sigma. \quad (4.94)$$

Deste modo, implementando-se as correções relativas à circulação e ao raio, a velocidade induzida em qualquer ponto do domínio por um vórtice j que corta a placa é calculada por

$$u_\theta(r, t) = -\frac{\left(1 - \frac{\phi_p}{2\pi}\right) \Gamma}{2\pi\sigma^*} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\left(1 - \frac{(\phi_p - \sin \phi_p)}{2\pi}\right) \sigma^2}\right) \right]. \quad (4.95)$$

4.10. Correção Para Vórtices que Penetram no Corpo

O passo convectivo dos vórtices é calculado levando-se em consideração as velocidades induzidas pelos painéis e vórtices que formam a matriz de influência, pelos vórtices presentes na esteira, e pelo escoamento incidente. A discretização temporal do método de vórtices provoca o deslocamento de um vórtice para o interior do corpo, o que é fisicamente impossível.

Dessa forma, a modelagem em questão utiliza o esquema de reflexão dos vórtices (SILVA, 2005) que, por ventura, tenham sido deslocados para o interior do corpo, onde a posição é recalculada sobre a normal ao painel, como pode ser visto na Fig. 4.11.

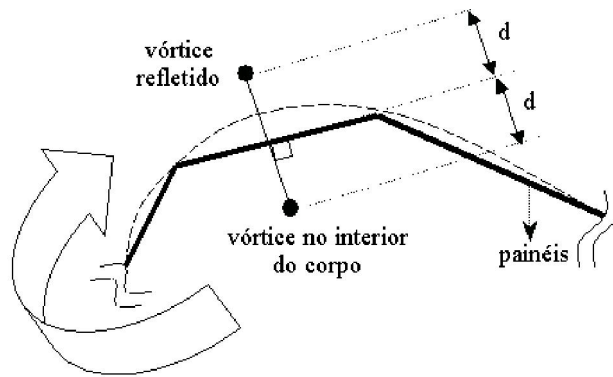


Figura 4.11 – Reflexão do vórtice

4.11. Suavização da Velocidade Induzida por Vórtices Muito Próximos aos Pontos de Controle

A modelagem numérica apresentada utiliza um artifício proposto por LEWIS (1991) para suavizar a velocidade induzida por um vórtice sobre o ponto de controle localizado a uma distância menor que um determinado valor. Este procedimento se baseia em considerar a velocidade induzida como um valor médio daquela induzida em pontos próximos do ponto de controle em questão.

Assim, supondo que um vórtice esteja a uma distância inferior a este valor, deve-se avaliar a velocidade induzida sobre os subpainéis, conforme Fig. 4.12, que utiliza como exemplo quatro subpainéis, bem como a média das velocidades nos seus pontos de controle.

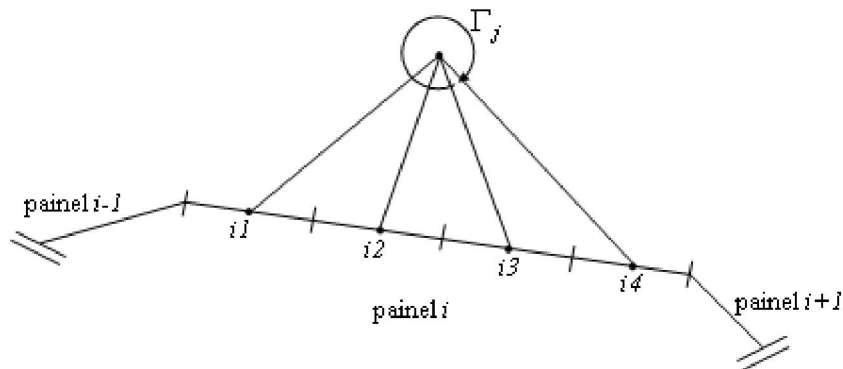


Figura 4.12 – Utilização de subpainéis

Deste modo, pode-se generalizar a expressão para o cálculo da velocidade induzida por um vórtice j sobre um painel i , utilizando N_{sub} (N subpainéis) por

$$\begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{kj} = \frac{1}{N_{sub}} \sum_{p=1}^{N_{sub}} \Gamma_j \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}_{pj} . \quad (4.96)$$

4.12. Atualização das Condições de Contorno

Sendo o escoamento impulsivo, ou seja, incide instantaneamente em todos os pontos do domínio fluido em $t=0^+$, o termo independente b dos sistemas de equações algébricas lineares deve ser atualizado, pois a simulação evolui de uma situação em que b é formado apenas pelo escoamento incidente, para aquela em que os vórtices adicionados na esteira também devem ser considerados.

Deste modo, deve-se adicionar ao vetor independente b_i , a parcela correspondente à velocidade induzida no ponto de controle i pelos vórtices k presentes na nuvem, chegando-se ao novo vetor independente do sistema representado pela Eq. (4.58) para painéis retos,

$$b_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{n}_i - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{ik} \mathbf{n}_i, \text{ para } 1 < i < N \text{ e} \quad (4.97)$$

$$b_i = -Q_\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{t}_i - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \begin{pmatrix} u_v \\ v_v \end{pmatrix}_{ik} \mathbf{t}_i, \text{ para } N+1 < i < 2N \quad (4.98)$$

Nas equações acima, α é o ângulo de ataque, $\mathbf{n}_i$ e $\mathbf{t}_i$ são, respectivamente, os vetores normal e tangencial ao painel i , e o termo do somatório, a velocidade induzida no ponto de controle i pelos vórtices k da nuvem.

CAPÍTULO 5

PLACA PLANA – RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

O presente capítulo apresenta os testes preliminares necessários para estudar os parâmetros numéricos inerentes ao Método de Vórtices, para o modelo apresentado por SANTIAGO (2008), formando um código computacional completo que simule, de maneira representativa, escoamentos viscosos ao redor de corpos, mantendo-se as hipóteses anteriormente descritas, e respeitando-se as limitações computacionais existentes.

Para tanto, o escoamento estudado neste capítulo é o desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana de comprimento unitário. Os resultados obtidos são comparados com a solução exata, por similaridade, obtida por Blasius, o que permite validar o código computacional deste trabalho. Uma vez que a teoria da camada limite conduz a uma formulação que representa assintoticamente as Equações de Navier-Stokes quando $Re \rightarrow \infty$, esta só deve ser empregada em regiões suficientemente distantes do bordo de ataque. Os efeitos associados à descontinuidade do bordo de fuga também não são considerados pela formulação teórica da camada limite, uma vez que a placa plana é considerada semi-infinita.

Deste modo, as seções a seguir buscam validar o modelo desenvolvido e evidenciar a convergência do método diante dos parâmetros numéricos e físicos mais importantes que controlam a simulação, conforme Tab. 5.1:

Tabela 5.1 – Parâmetros físicos e numéricos que controlam a simulação

Parâmetro	Símbolo
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC	α_{MCNC}
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0)	h/σ_0
Número de painéis	N
Passo de tempo	$\Delta\tau$
Número de Reynolds	Re

Uma vez que nessas simulações para a placa plana será utilizado o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) na etapa difusiva do Método de Vórtices, o primeiro parâmetro apresentado é o de divisão dos vórtices, α_{MCNC} , que estabelece a relação entre a menor e a maior escala de resolução da simulação, ou seja, entre o raio mínimo e máximo dos vórtices, uma vez que $\alpha_{MCNC}\sigma_{Max} = \sigma_{Min}$. Assim, quanto maior for o valor de α_{MCNC} , para $0 < \alpha_{MCNC} < 1$, maior será o refinamento espacial do processo de divisão dos vórtices.

O Método de Vórtices tem a convergência garantida pela razão de recobrimento entre os raios dos vórtices, uma vez que estes discretizam o campo de vorticidade que está sendo resolvido numericamente. Uma boa resolução somente é alcançada quando os núcleos dos vórtices são bem pequenos, necessitando, dessa forma, de uma maior quantidade de vórtices para manter o recobrimento. Então, a convergência da simulação é obtida fazendo-se com que o raio e a distância entre os vórtices tendam a zero mais rapidamente. Dos parâmetros apresentados na Tab. 5.1, os que controlam a razão de recobrimento e garantem a convergência são h/σ_0 e α_{MCNC} , sendo que a relação entre eles é função direta da distância de divisão $r = 2\sigma\sqrt{1 - \alpha_{MCNC}^2}$ imposta pelo MCNC.

Quanto à relação entre o número de painéis e a discretização da superfície sólida, quanto maior for o valor de N, melhor será representada a presença do corpo, discretizando de maneira mais refinada a vorticidade gerada na parede sólida; e quanto

menor for o valor de Δt , melhores serão os resultados, devido à diminuição de erros na etapa convectiva.

Quanto maior for o número de Reynolds, mais ricas em vorticidade serão a camada limite e a esteira. Assim, as simulações foram realizadas com número de Reynolds da ordem de 10^3 , pois este valor já é alto o suficiente para validar o método com a teoria da camada limite de Blasius, e é adequado à resolução numérica empregada (valores de σ_0). Valores do número de Reynolds muito elevados, ou seja, a partir de $2 \cdot 10^5$, onde ocorre a transição da camada limite sobre a placa plana de laminar para turbulenta, requerem uma resolução numérica maior. Assim, os valores de σ_0 necessários devem ser muito menores que os utilizados nestas simulações, requerendo um número bem maior de vórtices para obter uma boa resolução. Alternativamente, pode-se utilizar uma modelagem de turbulência para as pequenas escalas, mas este não é um dos objetivos deste trabalho.

Em síntese, esperam-se resultados cada vez mais representativos e aprimorados utilizando-se α_{MCNC} maiores, h/σ_0 menores, N maiores, $\Delta\tau$ menores e Re maiores até o limite mencionado no parágrafo anterior. Entretanto, como cada um destes parâmetros também influencia, de maneira particular, o custo computacional da simulação, para se obter resultados mais acurados também se deve considerar o custo computacional envolvido, controlado a partir dos processos de aglomeração e corte.

5.1. Análise de Convergência

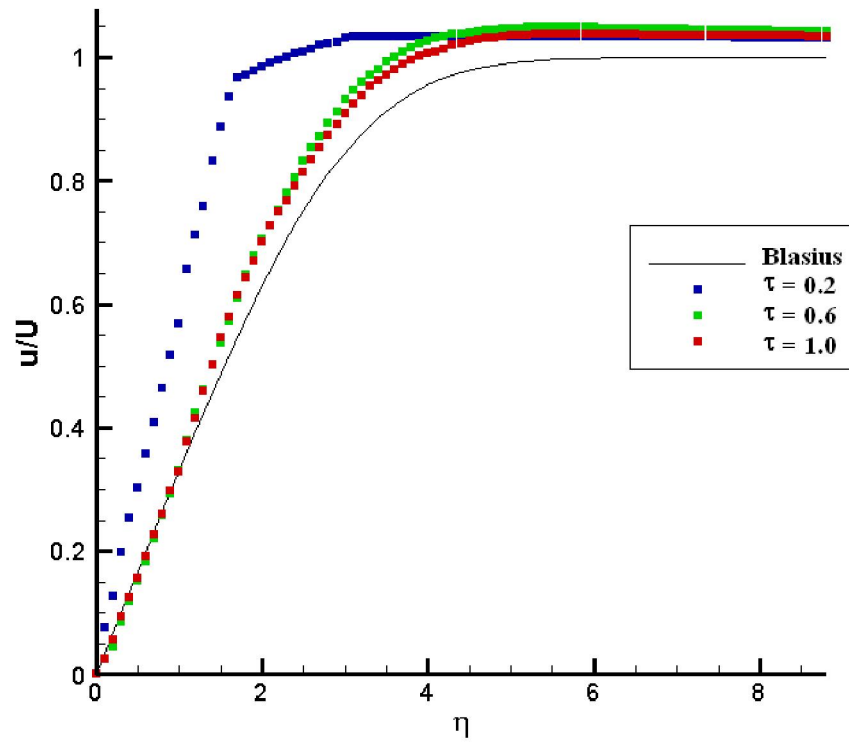
A modelagem numérica, descrita no capítulo anterior, deve ser analisada quanto à sensibilidade com relação aos parâmetros físicos e numéricos que controlam a simulação, apresentados na Tab. 5.1, com o objetivo de analisar a convergência do método. Nas simulações utilizou-se uma placa plana com 2% de espessura. Para avaliar a influência de cada parâmetro, os demais serão fixados, escolhidos por apresentar melhor custo/benefício global.

Primeiramente, será analisada a convergência do perfil de velocidade no tempo (adimensional), τ . Assim, a Tab. 5.2 abaixo mostra os valores dos parâmetros empregados, bem como os dados de entrada mais relevantes para esse caso.

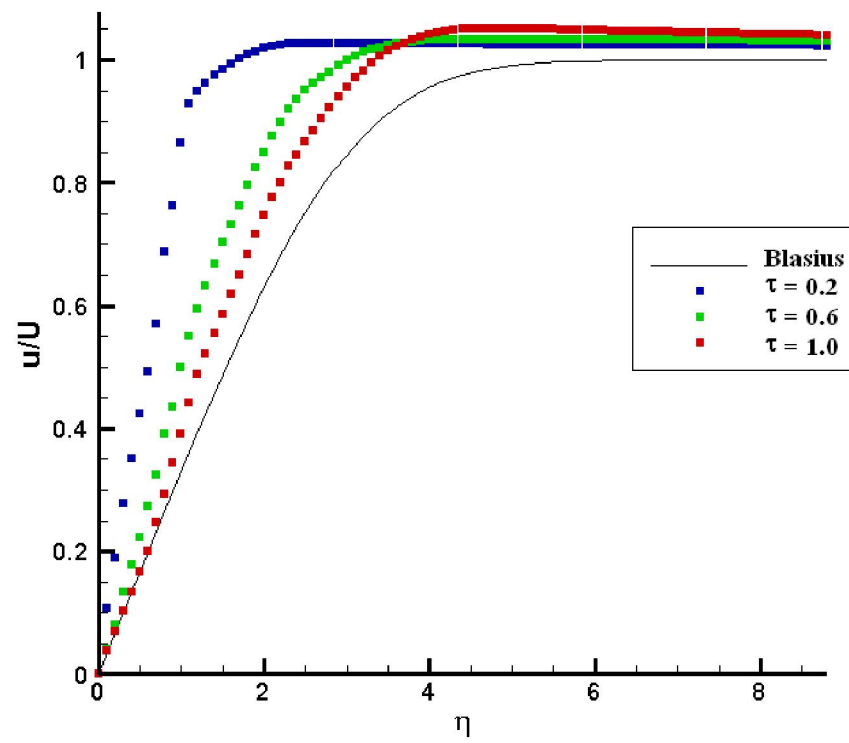
Tabela 5.2 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de τ

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.7
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.7
Número de painéis – N	50
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.02
Número de Reynolds – Re	10^3
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5

Então, as Figs. 5.1a, 5.1b e 5.1c apresentam a convergência do perfil de velocidade, variando-se τ , respectivamente, em $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$.



(a)



(b)

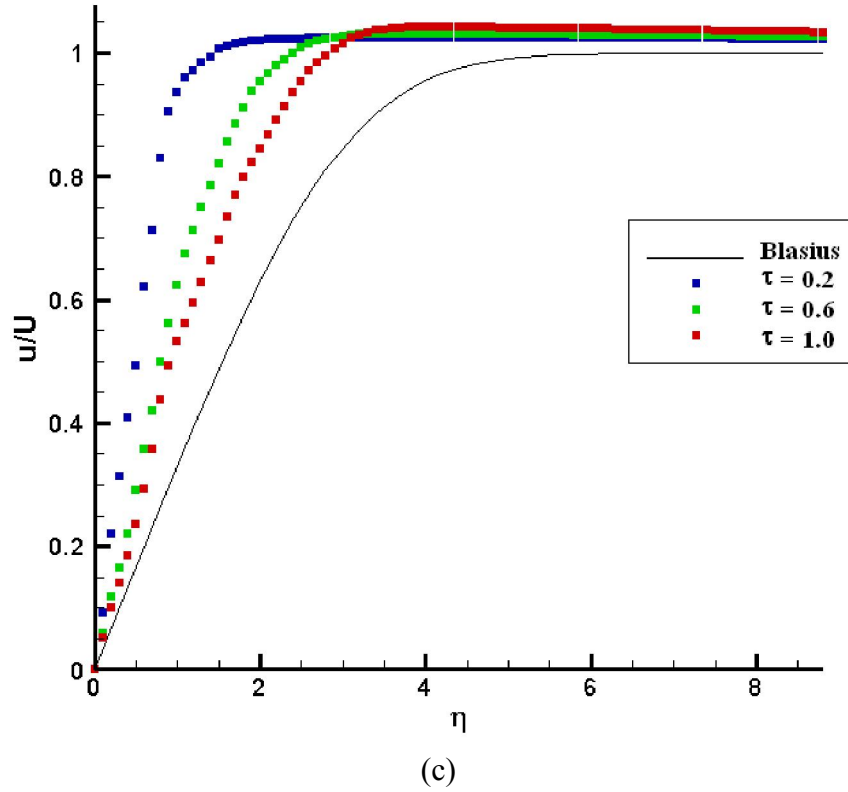


Figura 5.1 – Convergência do perfil de velocidade variando-se τ para:

a) $x/C = 0.25$; b) $x/C = 0.50$; c) $x/C = 0.75$

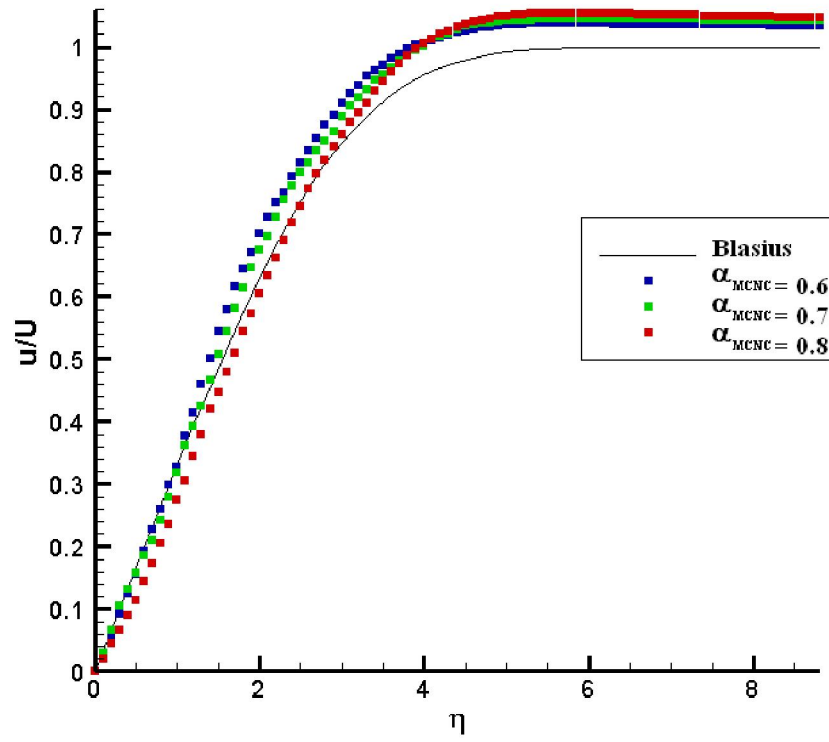
Verifica-se a tendência de convergência mais acelerada na região próxima ao bordo de ataque, uma vez que, para o mesmo instante de tempo, tem-se um perfil mais próximo da solução de Blasius em $x/C = 0.25$, seguido de $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$. Esta tendência é esperada, devido ao fato de a espessura da camada limite ser menor nesta região, necessitando, portanto, de uma menor quantidade de vórtices para representá-la. Naturalmente, à medida que τ aumenta, espera-se uma convergência melhorada nas regiões mais próximas ao bordo de fuga.

Em seguida, será analisada a convergência do perfil de velocidade, variando-se o parâmetro de divisão dos vórtices no Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC), α_{MCNC} . Assim, a Tab. 5.3 mostra os valores dos parâmetros e os dados de entrada empregados nesse caso.

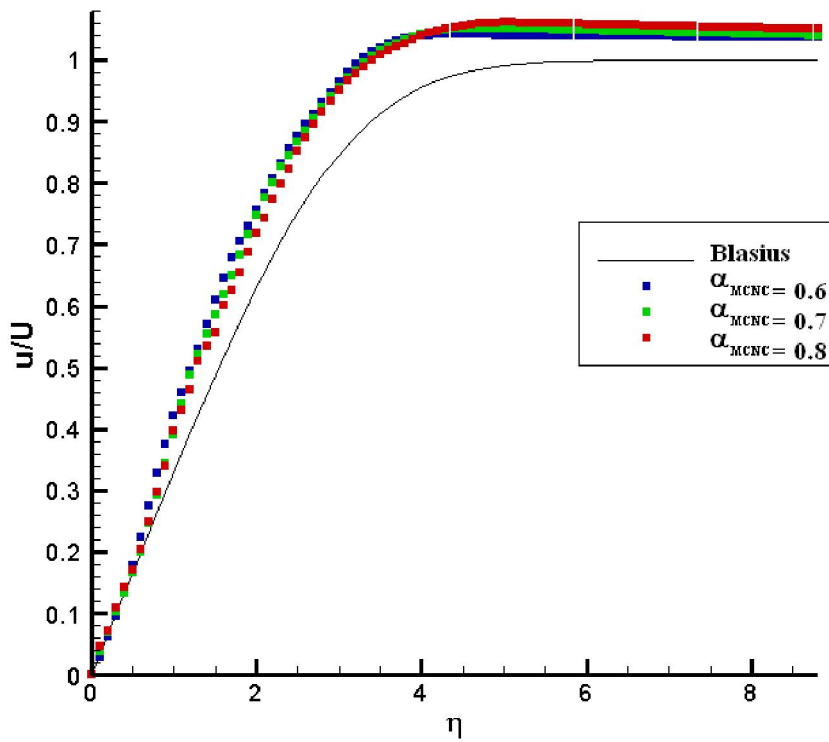
Tabela 5.3 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a
variação de α_{MCNC}

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.7
Número de painéis – N	50
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.02
Número de Reynolds – Re	10^3
Tempo de simulação – τ	1.0
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5

Assim, as Figs. 5.2a, 5.2b e 5.2c apresentam a convergência do perfil de velocidade, variando-se α_{MCNC} , respectivamente, em $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$.



(a)



(b)

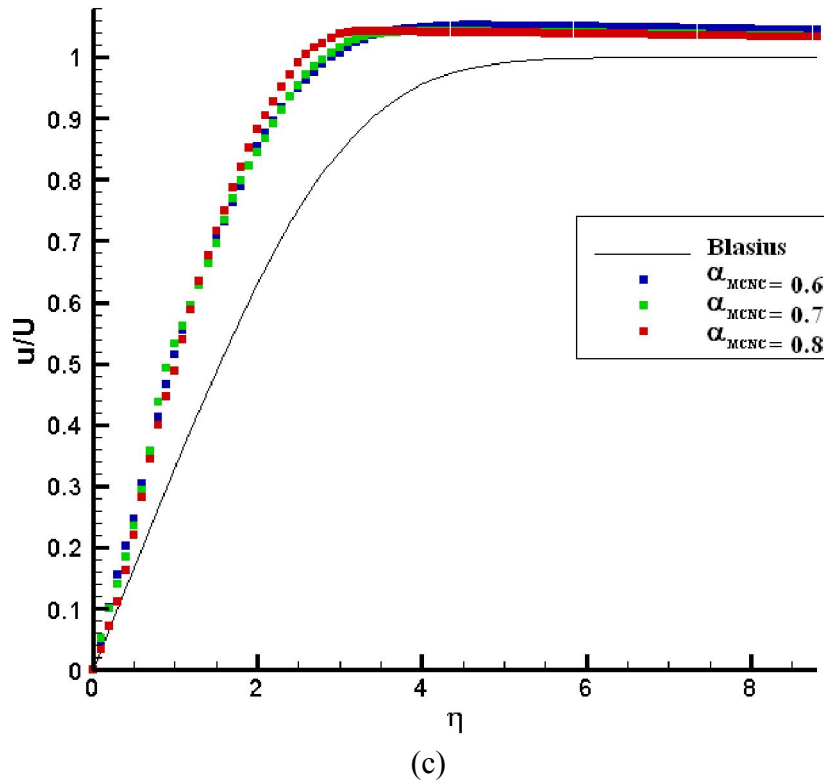


Figura 5.2 – Convergência do perfil de velocidade variando-se α_{MCNC} para:

a) $x/C = 0.25$; b) $x/C = 0.50$; c) $x/C = 0.75$

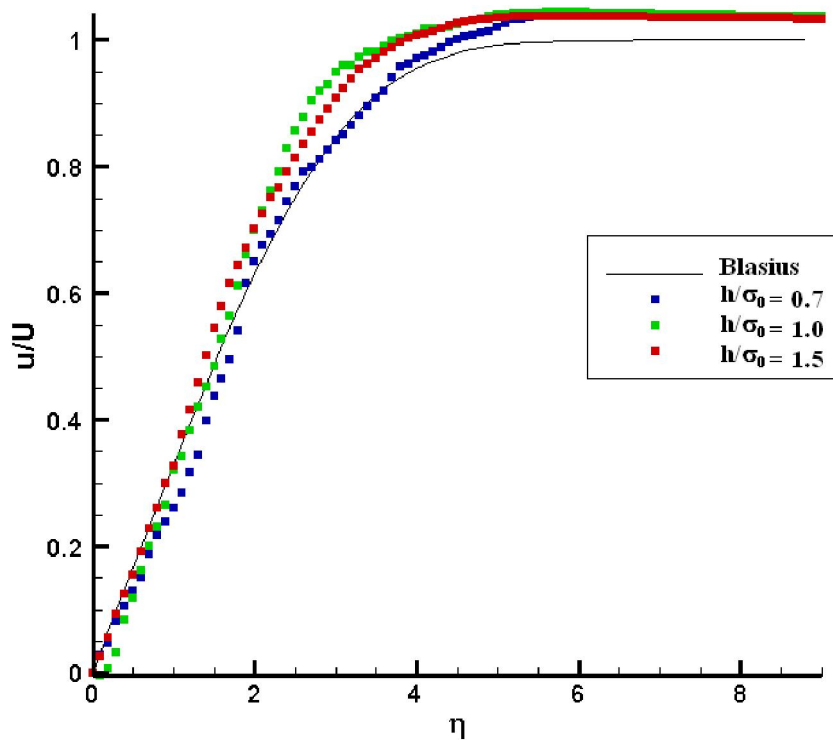
Dessa vez, observa-se para um mesmo instante de tempo, que o melhor resultado do perfil de velocidade é obtido para o valor de α_{MCNC} maior, situação em que ocorre um refinamento espacial mais acentuado, provocado pela maior quantidade de divisões dos vórtices e o consequente aumento da nuvem. Percebe-se, ainda, que a tendência de convergência mais acelerada nas regiões mais próximas (mas não muito próximas) ao bordo de ataque se mantém, devido a menor espessura da camada limite, conforme mencionado anteriormente.

Agora será analisada a convergência do perfil de velocidade, variando-se o parâmetro referente à razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices e o raio do vórtice, h/σ_0 . Assim, a Tab. 5.4 mostra os valores dos parâmetros e os dados de entrada empregados nesse caso.

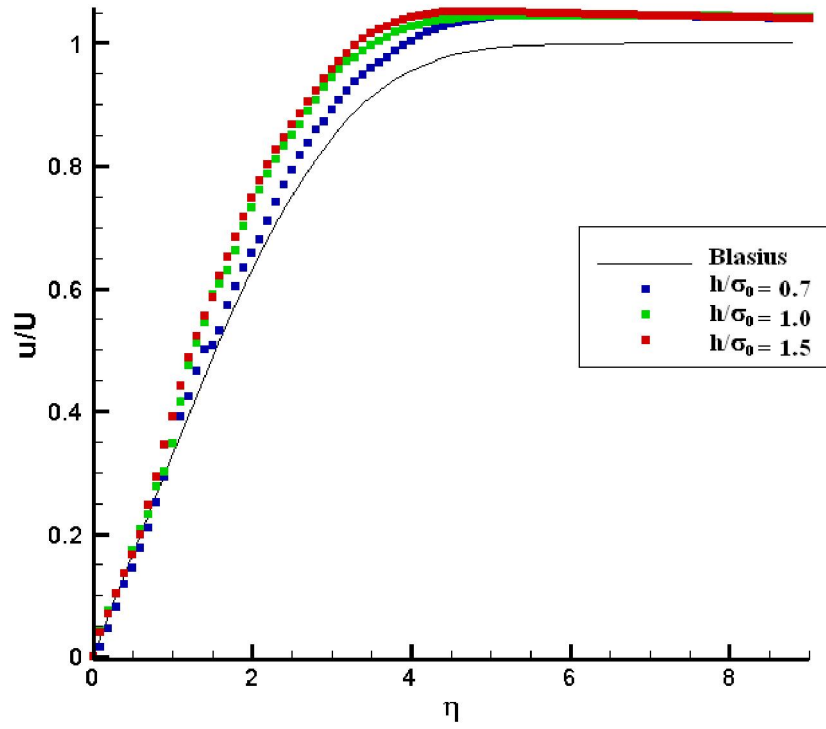
Tabela 5.4 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a
variação de h/σ_0

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.7
Número de painéis – N	50
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.02
Número de Reynolds – Re	10^3
Tempo de simulação – τ	1.0
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5

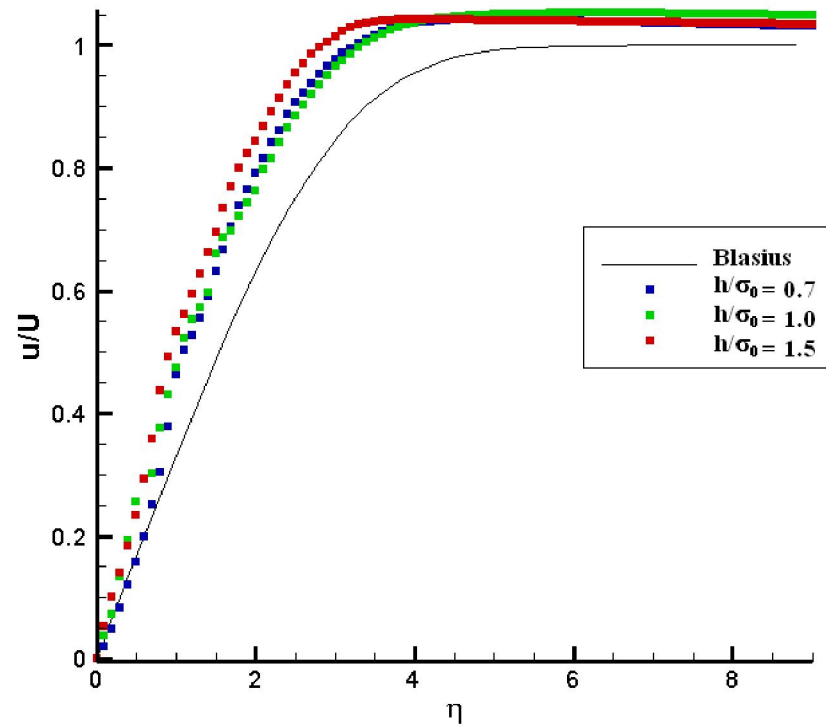
Logo, as Figs. 5.3a, 5.3b e 5.3c apresentam a convergência do perfil de velocidade, variando-se h/σ_0 , respectivamente, em $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3 – Convergência do perfil de velocidade variando-se h/σ_0 para:

a) $x/C = 0.25$; b) $x/C = 0.50$; c) $x/C = 0.75$

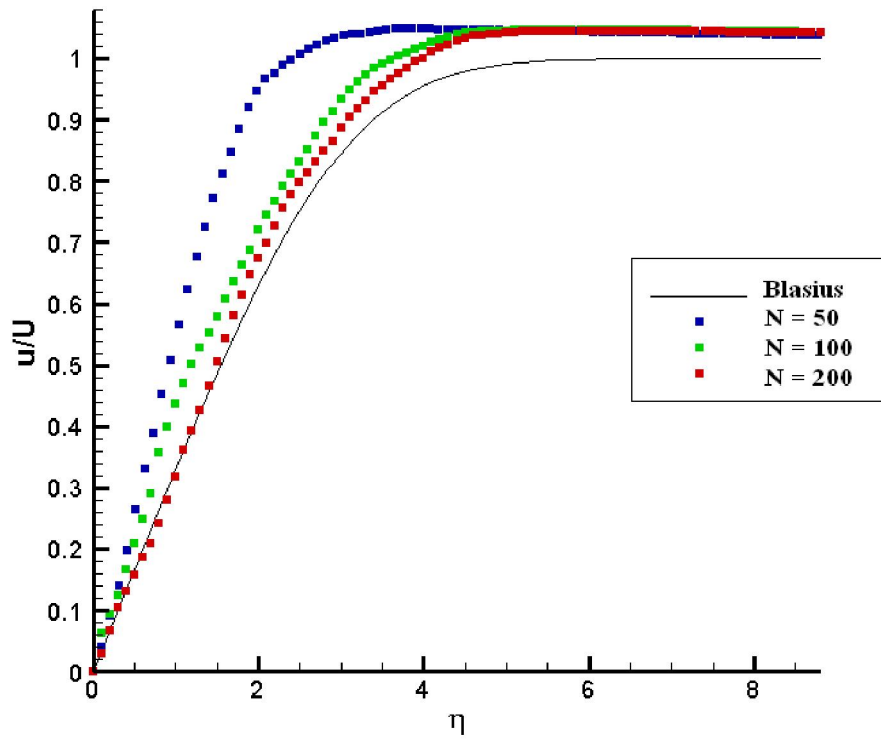
Os melhores resultados do perfil de velocidade são percebidos para o menor valor de h/σ_0 , pois representa uma maior razão de recobrimento dos núcleos dos vórtices. Novamente, nota-se uma convergência mais acelerada perto do bordo de ataque.

Agora será analisada a convergência do perfil de velocidade, variando-se o número de painéis, N . Então, a Tab. 5.5 mostra os valores dos parâmetros e os dados de entrada empregados.

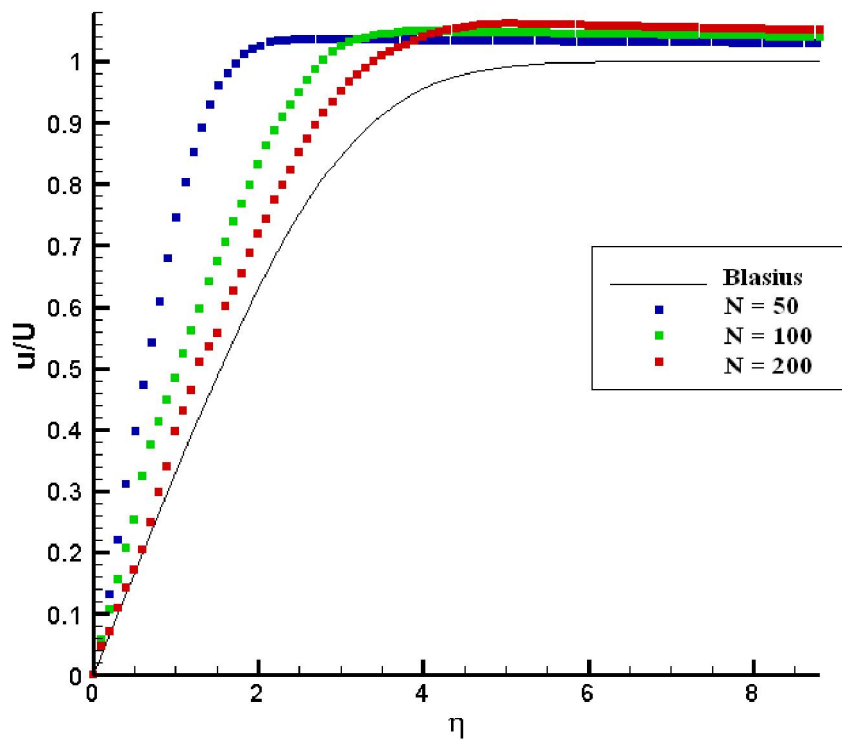
Tabela 5.5 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de N

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.7
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.7
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.02
Número de Reynolds – Re	10^3
Tempo de simulação – τ	1.0
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5

As Figs. 5.4a, 5.4b e 5.4c apresentam a convergência do perfil de velocidade, variando-se N , respectivamente, em $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$.



(a)



(b)

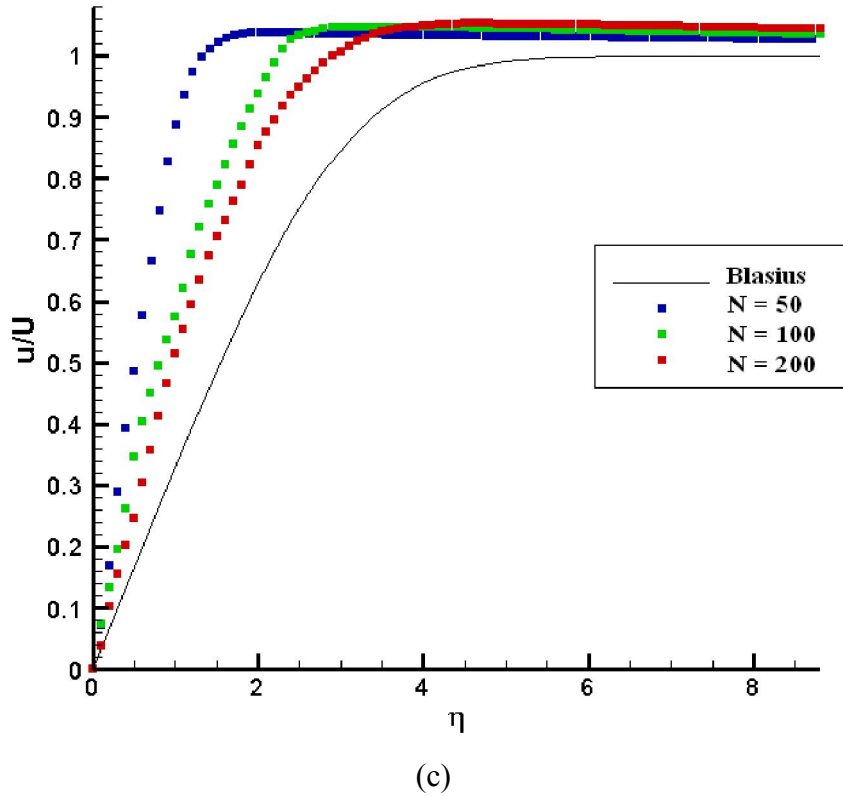


Figura 5.4 – Convergência do perfil de velocidade variando-se N para:
a) $x/C = 0.25$; b) $x/C = 0.50$; c) $x/C = 0.75$

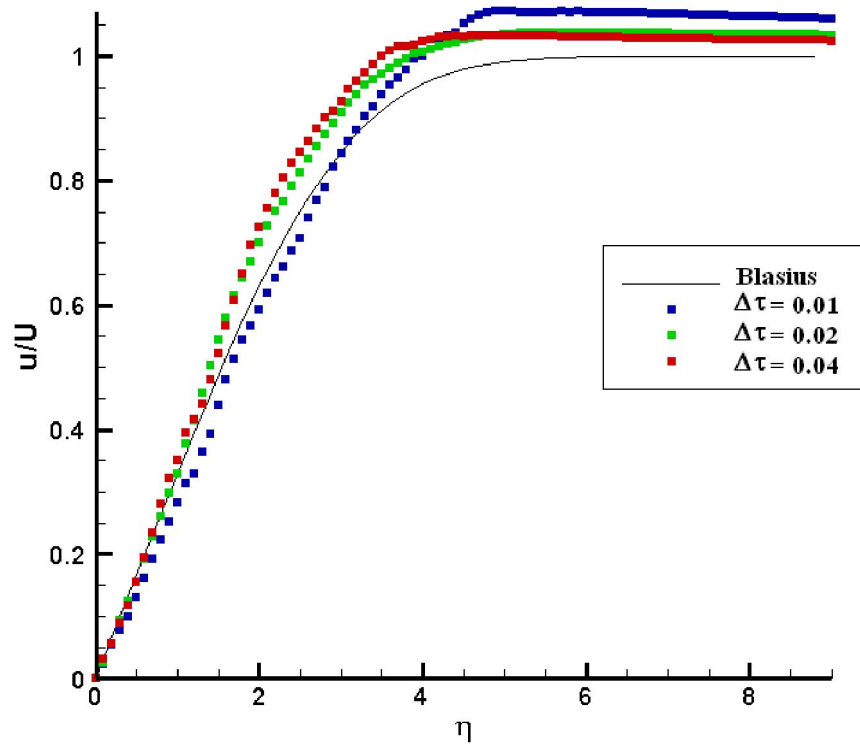
Percebe-se que a qualidade da simulação é significativamente melhor à medida que N aumenta, pois a presença do corpo é melhor representada devido ao refinamento da discretização da vorticidade na superfície sólida. Novamente, observa-se a tendência da solução numérica de convergir mais rápido próximo ao bordo de ataque.

Finalmente, será analisada a convergência do perfil de velocidade, variando-se o passo de tempo, $\Delta\tau$. A Tab. 5.6 mostra os valores dos parâmetros e os dados de entrada utilizados.

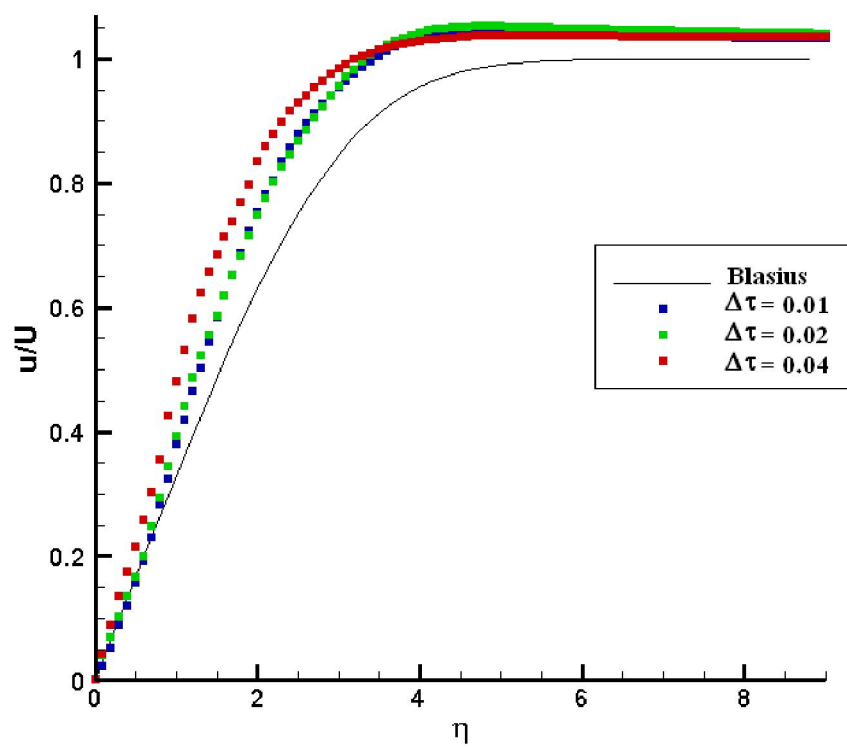
Tabela 5.6 – Parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para a variação de $\Delta\tau$

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.7
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.7
Número de painéis – N	50
Número de Reynolds – Re	10^3
Tempo de simulação – τ	1.0
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5

Enfim, as Figs. 5.5a, 5.5b e 5.5c apresentam a convergência do perfil de velocidade, variando-se $\Delta\tau$, respectivamente, em $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$.



(a)



(b)

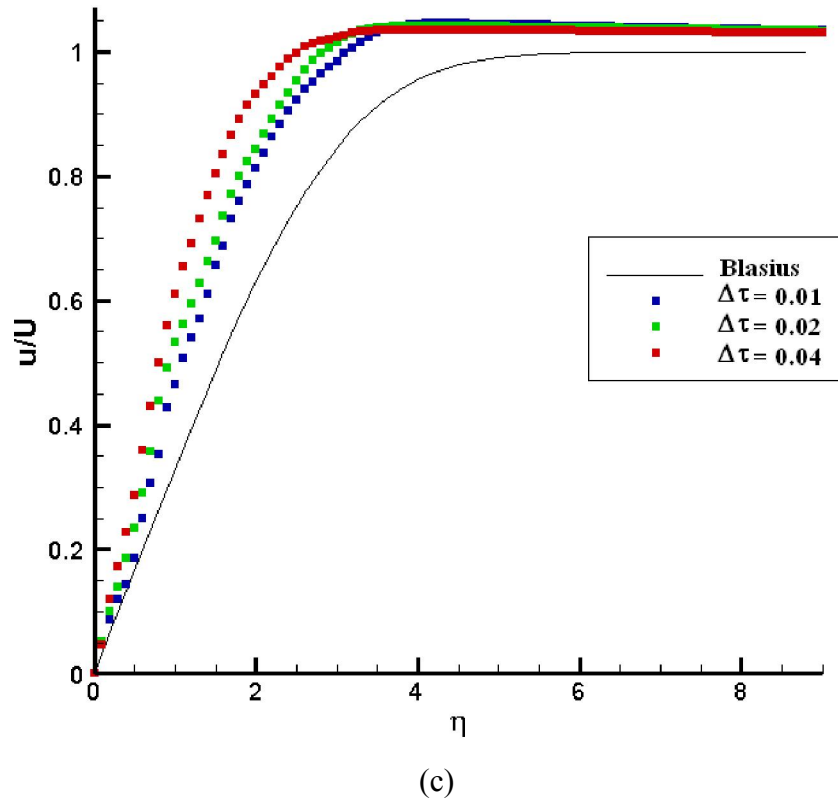


Figura 5.5 – Convergência do perfil de velocidade variando-se $\Delta\tau$ para:

a) $x/C = 0.25$; b) $x/C = 0.50$; c) $x/C = 0.75$

Observa-se que a convergência é mais rápida à medida que $\Delta\tau$ diminui, devido à diminuição de erros na etapa convectiva. Também se verifica a tendência da solução numérica de convergir mais rapidamente próximo ao bordo de ataque.

A Fig. 5.6 apresenta a convergência no tempo da Espessura de Deslocamento e da Quantidade de Movimento para os parâmetros e dados de entrada listados na Tab. 5.2.

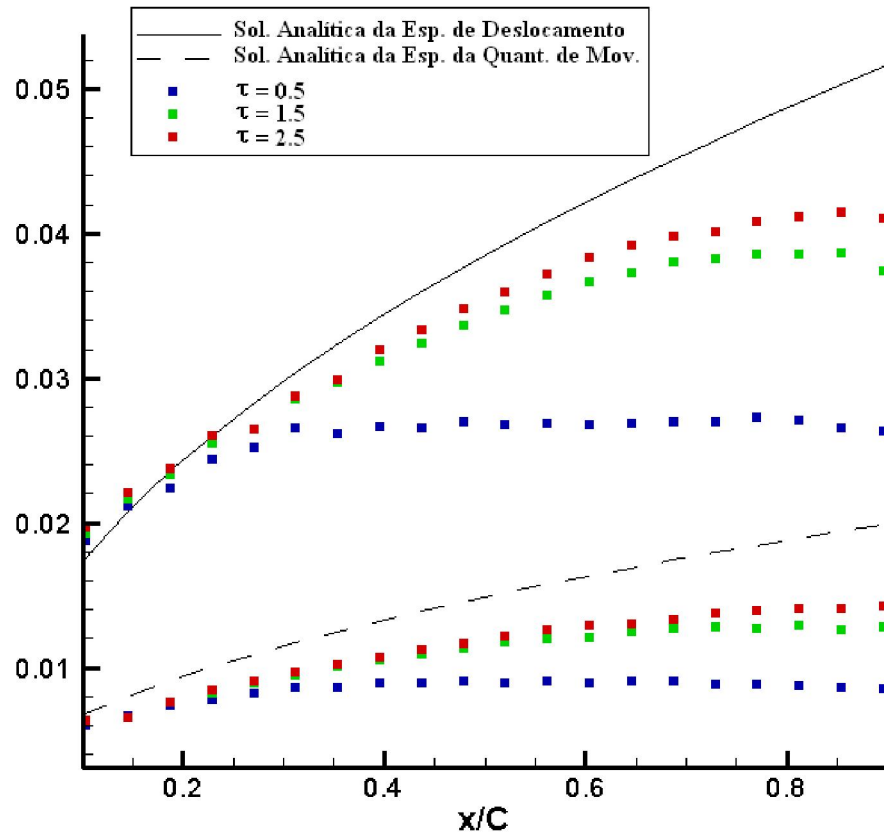


Figura 5.6 – Convergência das espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento

E, por último, a Fig. 5.7 apresenta a convergência no tempo do Coeficiente de Atrito (C_f), para as mesmas condições. Os valores de C_f são obtidos numericamente através de uma aproximação de primeira ordem de $\frac{\partial u}{\partial y}$ na parede.

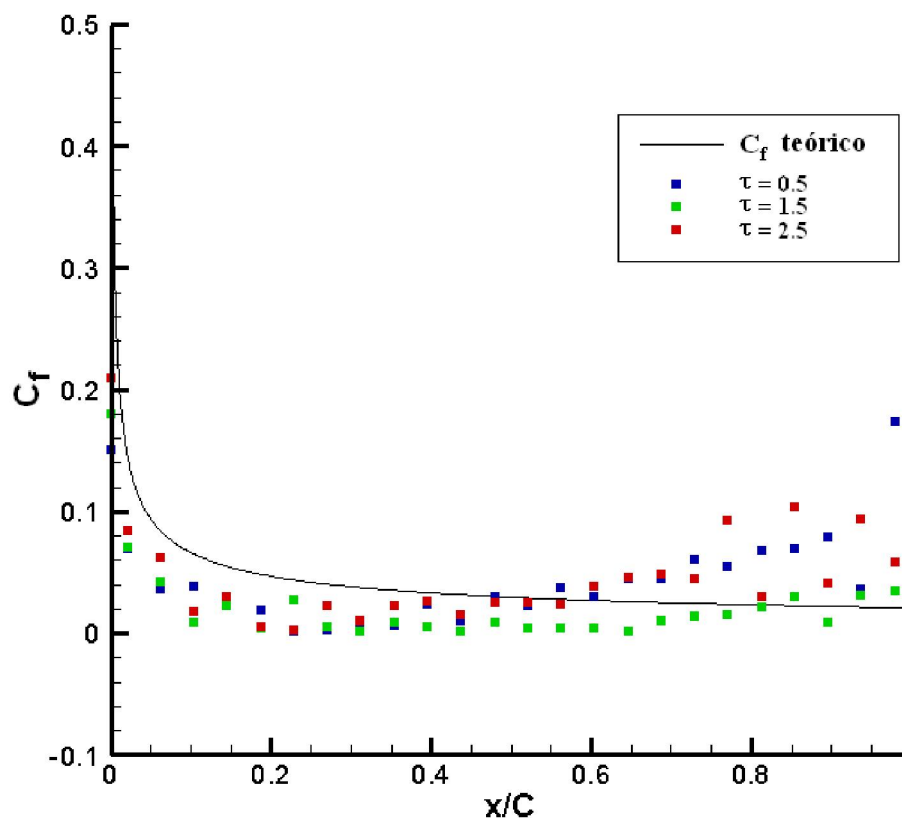


Figura 5.7 – Convergência do coeficiente de atrito

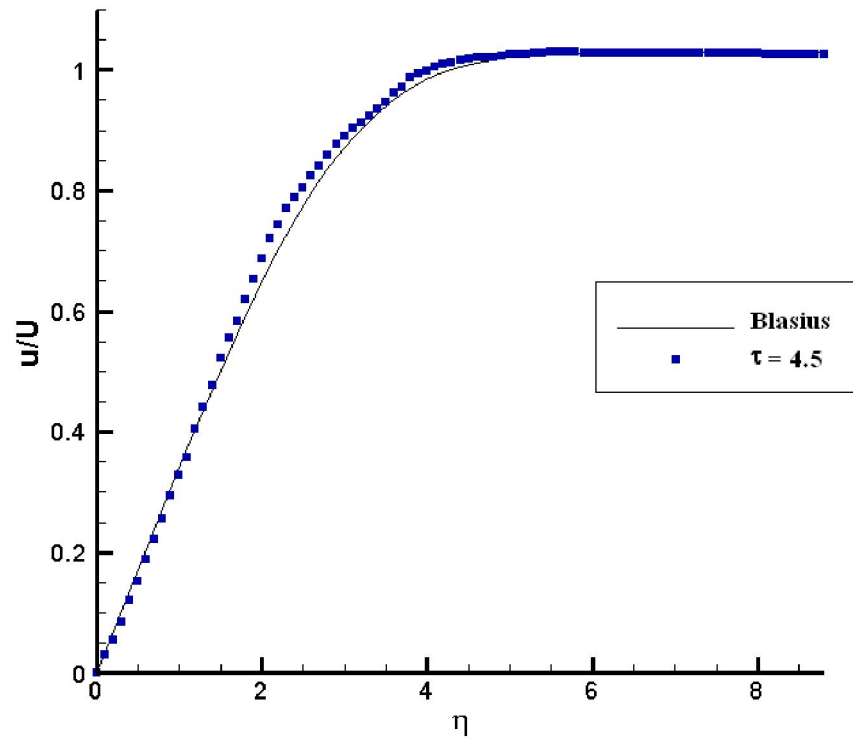
As Figs. 5.6 e 5.7 permitem que sejam observados melhores resultados na parte central da placa plana, especialmente para $0.25 < x/C < 0.6$, em comparação com os visualizados próximos às extremidades. Esta constatação é esperada, pelo fato de a teoria de camada limite ser aplicável apenas a regiões suficientemente distantes do bordo de ataque, assim como pelo fato de os efeitos associados à descontinuidade do bordo de fuga não serem contemplados, uma vez que a placa plana é considerada semi-infinita.

5.2. Escoamento em Placa Plana – Validação

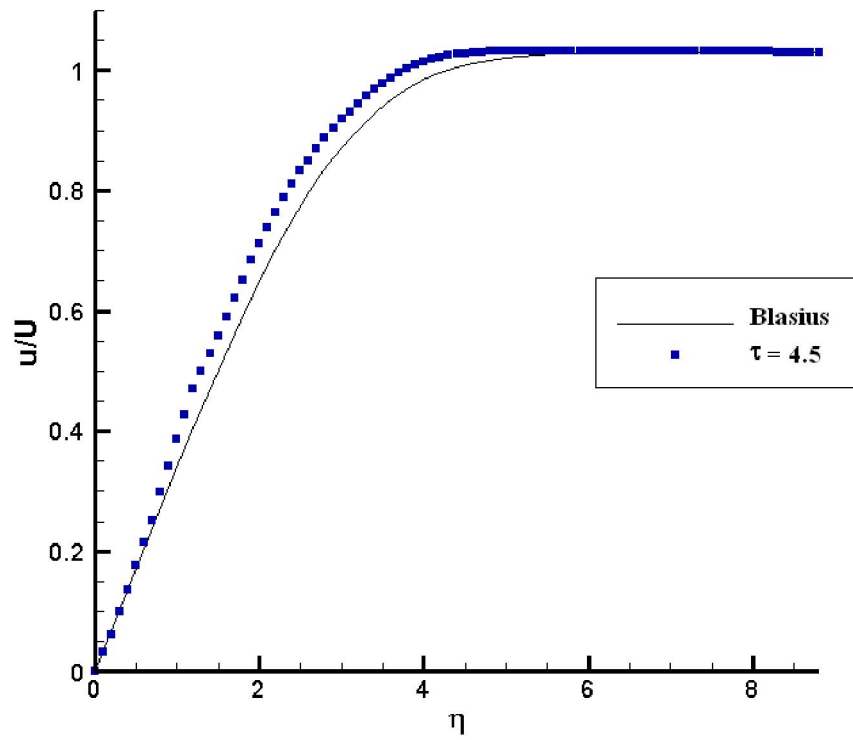
A seguir, são apresentados os resultados convergidos para o modelo apresentado neste trabalho e detalhado no capítulo anterior para os parâmetros físicos, numéricos e demais dados de entrada apresentados na Tab. 5.2.

As Figs. 5.8a, 5.8b e 5.8c apresentam o resultado em $\tau = 4.5$ para a componente u do perfil de velocidade ao longo da placa, em $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$ e $x/C = 0.75$, onde

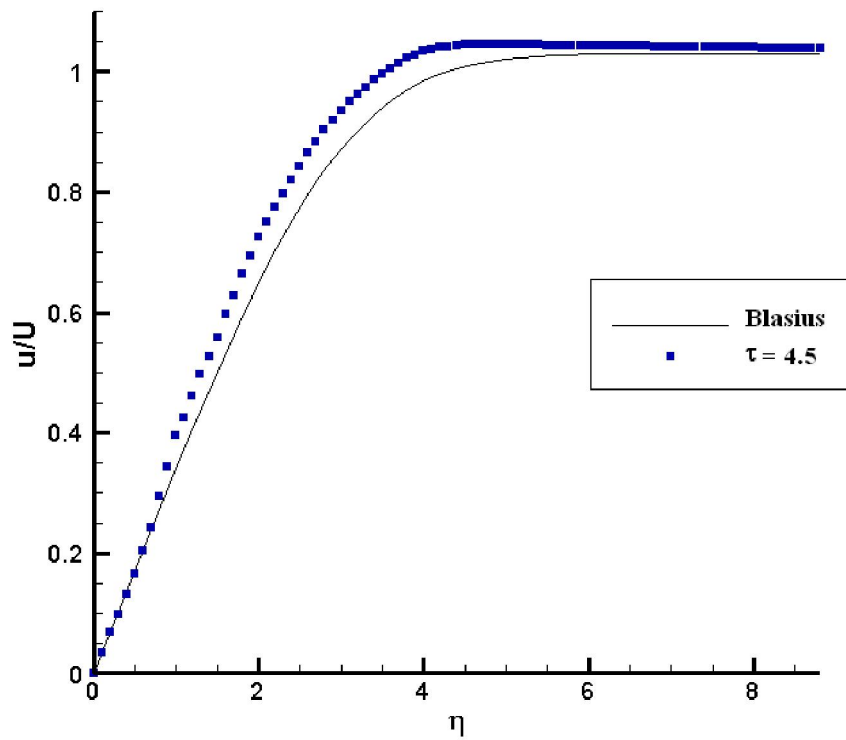
$$\eta = y \sqrt{\frac{ReU}{x}}, \quad C=1 \text{ e } U=1.$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.8 – Resultado convergido para o perfil de velocidade em:

a) $x/C = 0.25$; b) $x/C = 0.50$; c) $x/C = 0.75$

O perfil de Blasius é reproduzido pelos resultados numéricos de maneira representativa, o que atesta a boa acurácia da simulação realizada ao longo da placa plana. Assim, pode-se afirmar que o modelo numérico desenvolvido neste trabalho é capaz de reproduzir com boa representatividade o processo de geração de vorticidade na superfície, o que o habilita a realizar simulações de escoamentos externos ao redor de corpos de diferentes geometrias, como cilindros de seção circular, objetos de estudo apresentados no próximo capítulo, pois possibilita a determinação dos esforços no corpo com precisão.

Em seguida, a Fig. 5.9 apresenta os resultados convergidos para a Espessura de Deslocamento e da Quantidade de Movimento.

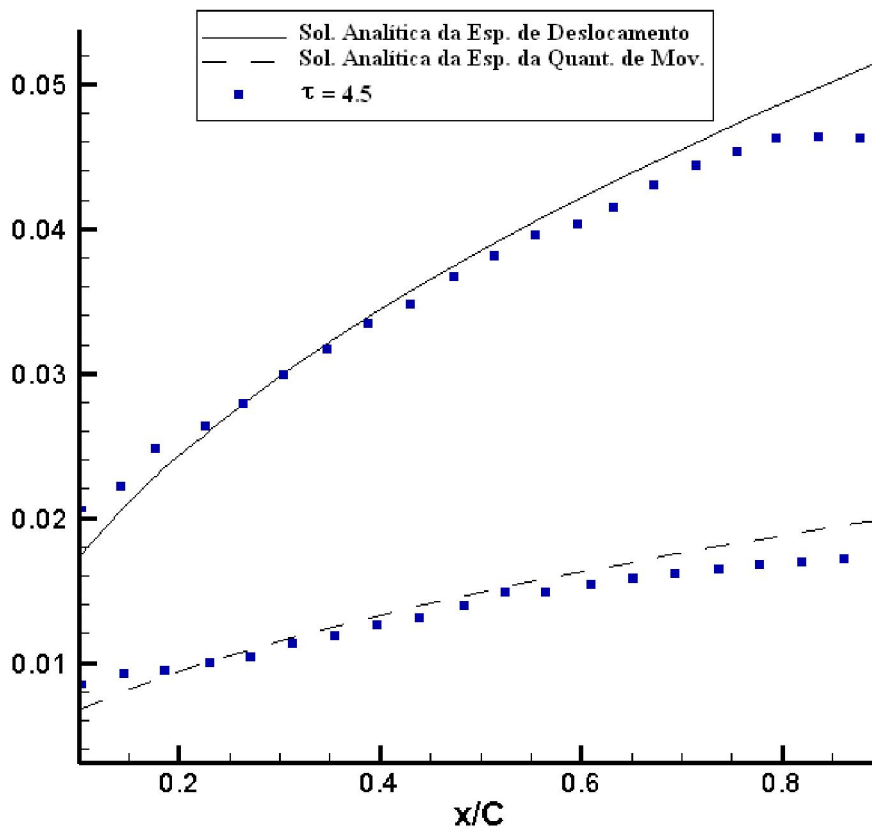


Figura 5.9 – Resultados convergidos para as espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento

E, finalmente, a Fig. 5.10 apresenta os resultados convergidos para o Coeficiente de Atrito (C_f), nas mesmas condições.

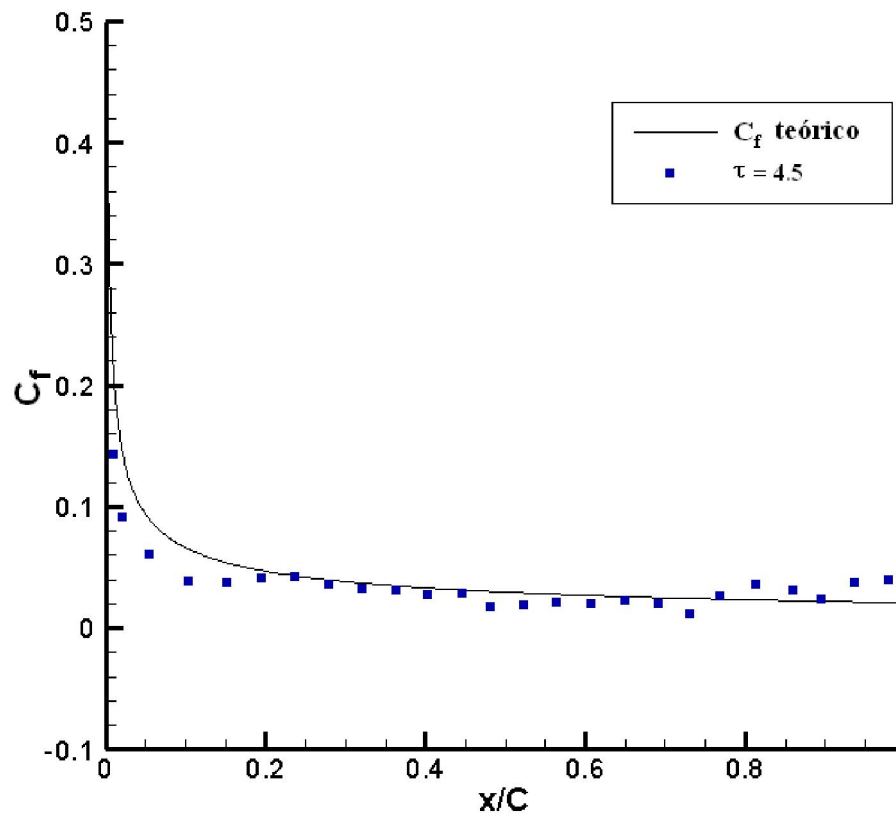


Figura 5.10 – Resultado convergido para o coeficiente de atrito

Para o caso convergido, observa-se uma boa concordância dos resultados numéricos com as soluções analíticas para as espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento, especialmente para a região central da placa plana. As discrepâncias observadas nas extremidades se explicam pelo fato de não ser possível aplicar a teoria da camada limite em regiões muito próximas ao bordo de ataque, e os efeitos referentes à descontinuidade do bordo de fuga não terem sido considerados.

A boa qualidade do perfil de velocidade na parede, que pode ser observada nas Figs. 5.8a, 5.8b e 5.8c, permite o cálculo do Coeficiente de Atrito (C_f) com bastante precisão, principalmente para a parte central da placa, como esperado, pelos motivos já mencionados.

CAPÍTULO 6

CILINDRO CIRCULAR – ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as simulações do escoamento ao redor de um cilindro de seção circular, utilizando os modelos matemático e numérico descritos nos capítulos anteriores e explorando os parâmetros numéricos, dentro da faixa de utilização testada e validada no Capítulo 5.

O escoamento incompressível ao redor de um cilindro de seção circular para números de Reynolds altos apresenta uma característica bem conhecida: a formação de uma extensa esteira viscosa à jusante do corpo com frequência de emissão de vórtices definida. O processo de geração de vorticidade é simulado por vórtices discretos gerados a uma distância ε (igual ao núcleo do vórtice de Lamb, σ_0) dos pontos de controle dos painéis a cada passo no tempo, que formam a esteira viscosa e sofrem convecção e difusão. Quanto maior o número de vórtices no escoamento, melhor será a resolução da simulação. No entanto, como as velocidades induzidas seguem a Lei de Biot-Savart, um grande número de vórtices no escoamento implica em custo computacional elevado.

Para a etapa difusiva do Método de Vórtices emprega-se, para tempos curtos, o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) e, para tempos longos, quando se deseja atingir o regime permanente periódico, o Método do Avanço Randômico (MAR). O avanço temporal utilizado é o de Adams-Bashforth de segunda ordem.

A escolha da geometria estudada nesse capítulo deve-se à maior gama de informações referentes a simulações e experimentos na literatura, visando, portanto, a possibilidade de comparação dos resultados numéricos apresentados com os dados disponíveis.

6.1. Verificação dos Parâmetros Numéricos e Análise de Convergência

Os parâmetros numéricos testados no Capítulo 5 para placa plana serão utilizados em simulações de tempo curto para o cilindro circular de diâmetro unitário. A verificação desses parâmetros, realizada nessa seção, visa adequá-los às simulações em cilindros,

objetivando uma relação custo computacional/resultados viável e satisfatória, e as rodadas permitem a visualização da tendência de convergência. Os números de Reynolds e tempos de simulação escolhidos permitem a comparação com os resultados numéricos apresentados por KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995).

CASO I

O primeiro caso corresponde ao regime onde, devido à forma geométrica do corpo, o escoamento próximo à superfície passa por uma forte desaceleração, formando uma região com gradiente de pressão adverso. O fluido não consegue se manter aderido à superfície do corpo e se divide em dois pontos de separação que se localizam na parte posterior do cilindro, formando uma bolha de recirculação nesta área, e o acúmulo de vorticidade devido ao movimento convectivo do fluido. Ocorre, então, a formação de dois vórtices estacionários na esteira, imediatamente atrás do cilindro. Com o desenvolvimento de instabilidades e lentas oscilações na esteira à jusante dos vórtices estacionários, que crescem na direção do escoamento incidente, há um aumento na amplitude de oscilação e o espiralamento da esteira. Ocorre, agora, a formação de vórtices posicionados ao longo de duas trilhas na direção do escoamento incidente, que se encontram deslocados uns dos outros ao longo desta linha, e com sentidos de rotação opostos, formando a esteira de Von Karman. Uma vez que a trilha de vórtices não interage diretamente com o par de vórtices estacionários que se forma imediatamente atrás do cilindro, o escoamento evolui de um regime ainda essencialmente permanente nas vizinhanças do cilindro para um escoamento não-permanente à jusante dele.

Aqui, o transporte difusivo de vorticidade será simulado através do Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Os parâmetros, bem como os demais dados de entrada, dispostos na Tab. 6.1 abaixo, são escolhidos de forma a conduzir soluções mais refinadas para um custo computacional competitivo.

Tabela 6.1 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso I

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	40
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.7
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	0.25

Em relação aos parâmetros empregados para a análise do perfil de velocidade convergido da placa plana de Blasius, opta-se por reduzir o valor do parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC, α_{MCNC} , pois além de gerar resultados tão satisfatórios quanto para o caso da placa plana, promove uma redução significativa do custo computacional.

Para os demais casos, opta-se por aumentar o valor do parâmetro referente à razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0), h/σ_0 , em relação à placa plana, pois para números de Reynolds mais elevados, a camada limite e a esteira são ricas em vorticidade, o que faz com que o recobrimento seja mantido mesmo com h/σ_0 maiores. No entanto, para este caso em particular, uma vez que o número de Reynolds é muito baixo, é necessário aumentar a razão de recobrimento dos núcleos dos vórtices (reduzindo o valor de h/σ_0) para que uma boa resolução seja alcançada e a convergência seja garantida.

Obtém-se simulações com melhor qualidade, aumentando-se o número de painéis, N , pois a presença do corpo é melhor representada devido ao refinamento da discretização da vorticidade na superfície sólida, e o passo de tempo adimensional, $\Delta\tau$, é reduzido a fim de diminuir os erros numéricos na etapa convectiva do Método de Vórtices. Os valores dos

demais parâmetros, a saber: erro máximo no processo de aglomeração, e , limite do corte no processo de cut off, Γ_{corte} , e número de subpainéis, N_{sub} , são mantidos iguais aos mesmos apresentados para a placa plana.

Assim, a Fig. 6.1 apresenta as curvas do coeficiente de arrasto obtido a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), bem como a comparação desses resultados numéricos com os obtidos por KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995) para os parâmetros listados na tabela acima e instante de tempo $\tau = 0.25$.

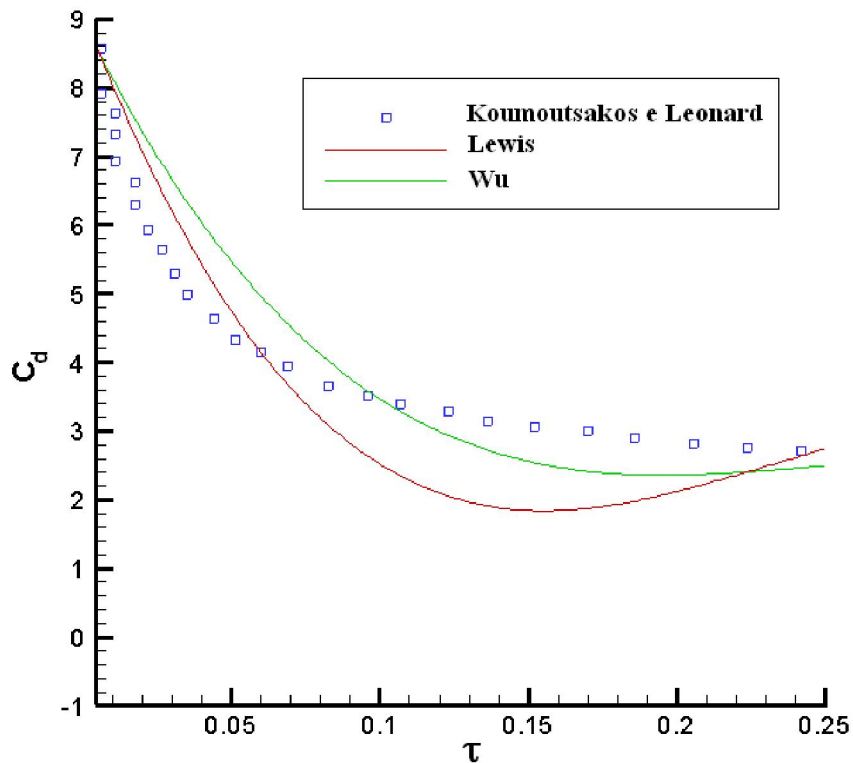


Figura 6.1 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 40$ e $\tau = 0.25$

As curvas do coeficiente de arrasto, apresentadas nesse trabalho, mostram uma concordância considerável com o resultado obtido por KOUMOTSAKOS e LEONARD (1995), especialmente para a metodologia de WU (1981), principalmente a partir de $\tau = 0.1$.

CASO II

Para esse caso, assim como para os demais localizados na faixa subcrítica, a esteira se torna instável e irregular, e o escoamento no interior dos próprios vórtices se torna caótico. Este fenômeno se deve ao surgimento de efeitos tridimensionais no escoamento, os quais já não são mais amortecidos pela ação da viscosidade e acabam influenciando o escoamento bidimensional dominante. Os parâmetros físicos e numéricos, e demais dados de entrada empregados nesse caso estão dispostos, abaixo, na Tab. 6.2.

Tabela 6.2 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso II

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	200
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	0.25

Vale ressaltar que nesse caso, assim como nos subsequentes, o parâmetro referente à razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) é aumentado, em relação ao caso I, visando diminuir o custo computacional pois, para números de Reynolds mais elevados, já é possível obter uma taxa de recobrimento de vórtices satisfatória para o valor de h/σ_0 apresentado na tabela.

Então, a Fig. 6.2 apresenta as curvas do coeficiente de arrasto para $Re = 200$ e instante de tempo $\tau = 0.25$.

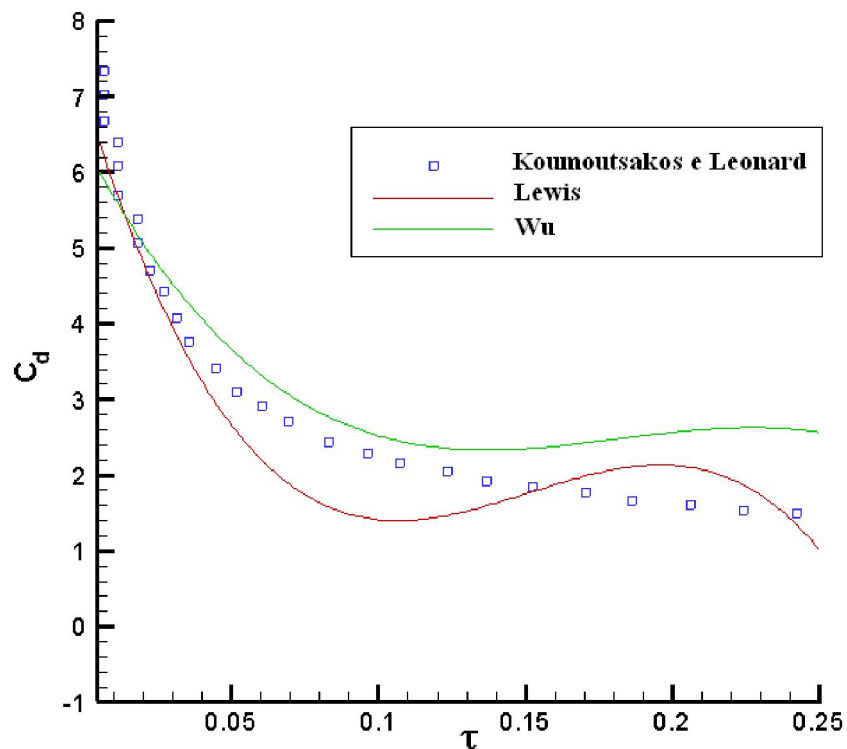


Figura 6.2 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 200$ e $\tau = 0.25$

As curvas do coeficiente de arrasto mostram uma concordância razoável com o resultado obtido por KOUMOTSAKOS e LEONARD (1995), especialmente para a metodologia de WU (1981).

CASO III

Este caso corresponde a $Re = 1000$ e é a última simulação realizada para o instante de tempo adimensional $\tau = 0.25$. Analogamente ao caso anterior, a Tab. 6.3 apresenta os parâmetros e dados de entrada utilizados.

Tabela 6.3 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso III

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	1000
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	0.25

Finalmente, a Fig. 6.3 apresenta as curvas do coeficiente de arrasto.

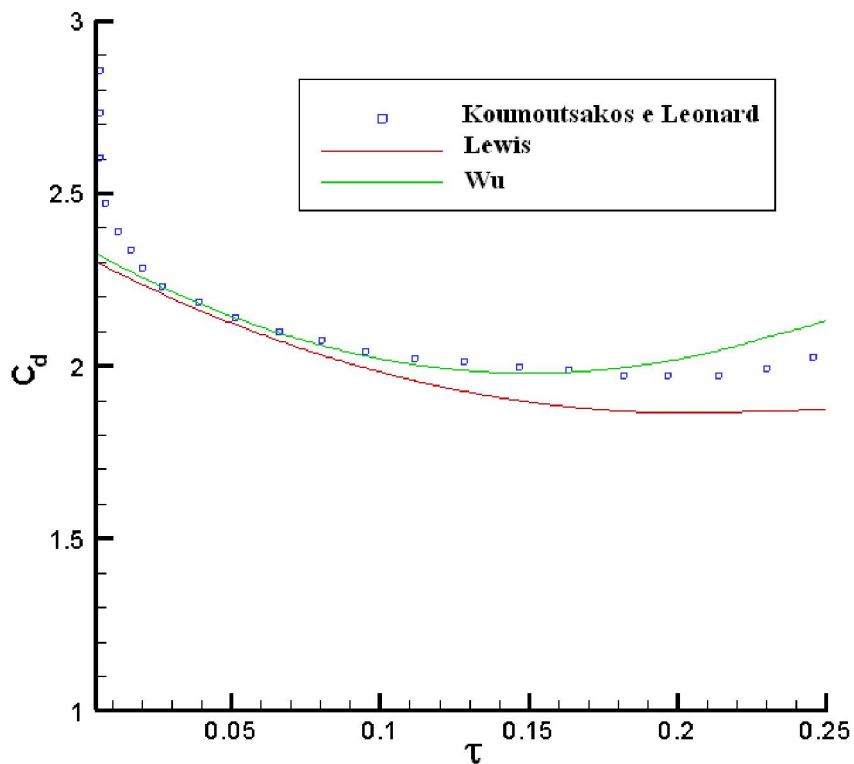


Figura 6.3 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 1000$ e $\tau = 0.25$

Para $Re = 1000$, observa-se a excelente concordância dos resultados numéricos com os obtidos por KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995), especialmente para a metodologia de WU (1981), e que as soluções se tornam mais apuradas à medida que o número de Reynolds aumenta, como esperado. Para verificar se essa tendência se mantém, serão apresentados, a seguir, três casos para tempos de simulação maiores, a saber: $\tau = 3.0$ e $\tau = 5.0$. Como nos casos anteriores, os resultados serão comparados com os fornecidos por KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995).

CASO IV

A Tab. 6.4 apresenta os parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação do caso correspondente a $Re = 550$.

Tabela 6.4 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso IV

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	550
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	3.0

E a Fig. 6.4 apresenta as curvas do coeficiente de arrasto para o instante de tempo $\tau = 3.0$.

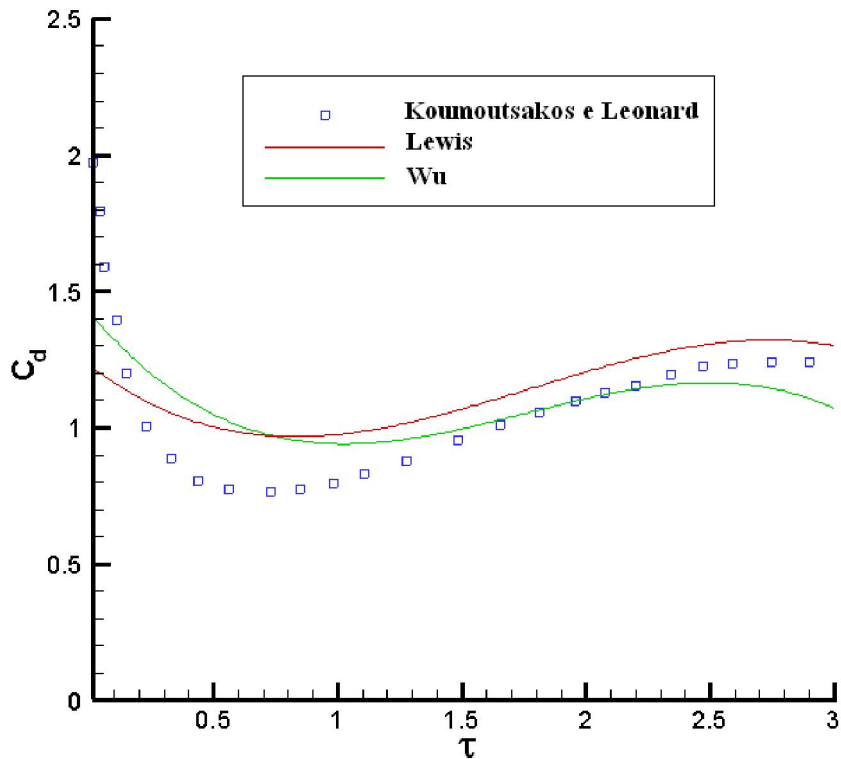


Figura 6.4 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 550$ e $\tau = 3.0$

Com o avanço no tempo, observa-se que os resultados são qualitativamente melhores que os apresentados para $Re = 200$ e inferiores aos fornecidos por $Re = 1000$, como esperado, por se tratar de um número de Reynolds intermediário entre esses valores. E percebe-se, também, que são bem concordantes com a curva de KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995) para as duas metodologias calculadas.

CASO V

Até aqui, empregou-se o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) nas simulações do escoamento ao redor de uma placa plana de Blasius paralela ao escoamento e de um cilindro de seção circular e diâmetro unitário.

O MCNC, por apresentar um refinamento espacial, que consiste na escolha de parâmetros numéricos que controlam a evolução temporal do raio do núcleo, realizando uma divisão dos vórtices em intervalos regulares, é o método mais indicado para realizar simulações acuradas do Método de Vórtices e, por esse motivo, foi a escolha inicial. No

entanto, para tempos de simulações maiores, como para os casos V e VI que serão apresentados a seguir, é necessário empregar o Método do Avanço Randômico (MAR) para o cálculo do termo difusivo, pois o custo computacional do MCNC torna inviável a sua utilização.

O MAR consiste na substituição do processo difusivo por deslocamentos randômicos de partículas que carregam vorticidade, de modo a simular a evolução do campo de vorticidade devido à difusão viscosa, e foi desenvolvido para aplicação em escoamentos com alto número de Reynolds, conforme serão analisados na próxima seção referente aos testes de tempo longo. Dessa forma, serão apresentados, a seguir, dois casos de tempo curto para visualização da tendência de convergência, visando a validação do MAR. Este, em particular, refere-se a $Re = 1000$, e os parâmetros numéricos e dados de entrada estão dispostos na Tab. 6.5.

Tabela 6.5 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso V

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	1000
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	5.0

Assim, a Fig. 6.5 apresenta as curvas do coeficiente de arrasto para $\tau = 5.0$.

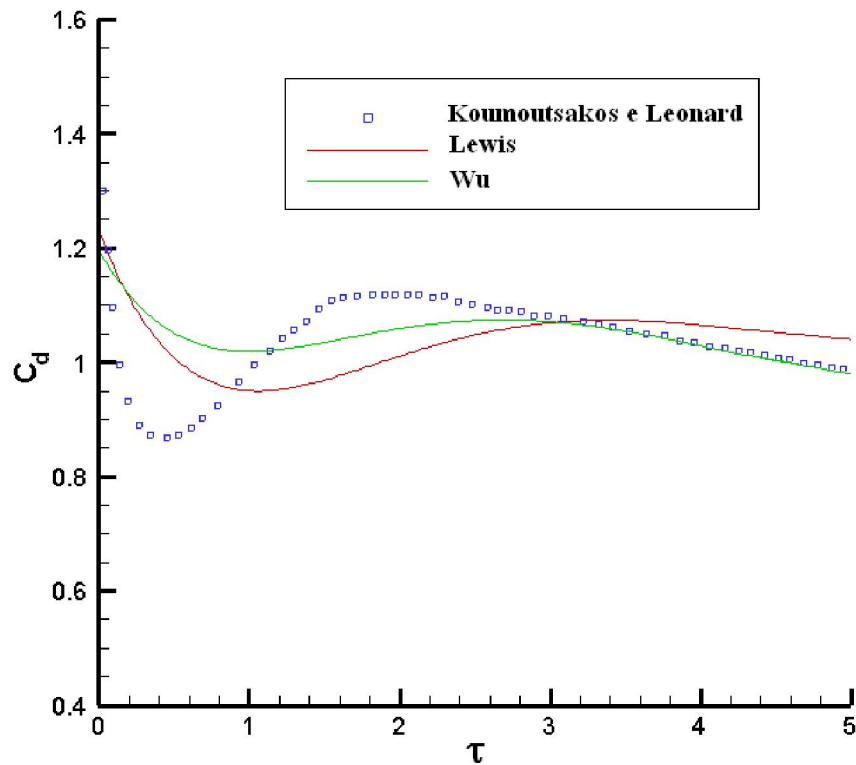


Figura 6.5 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 1000$ e $\tau = 5.0$

Percebe-se que, apesar de simular o processo de difusão viscosa corretamente, qualitativamente, os resultados apresentados a partir do emprego do MAR são inferiores aos mostrados nos casos anteriores que utilizavam o MCNC, especialmente nos instantes iniciais. A partir de $\tau = 2.5$, os resultados numéricos mostram uma concordância muito boa com os apresentados por KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995).

CASO VI

Finalmente, a Tab. 6.6 apresenta os parâmetros numéricos e dados de entrada para o último caso de tempo curto, referente a $Re = 3000$ e $\tau = 5.0$.

Tabela 6.6 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso VI

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	3000
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	5.0

Enfim, a Fig. 6.6 apresenta as curvas do coeficiente de arrasto para esse caso.

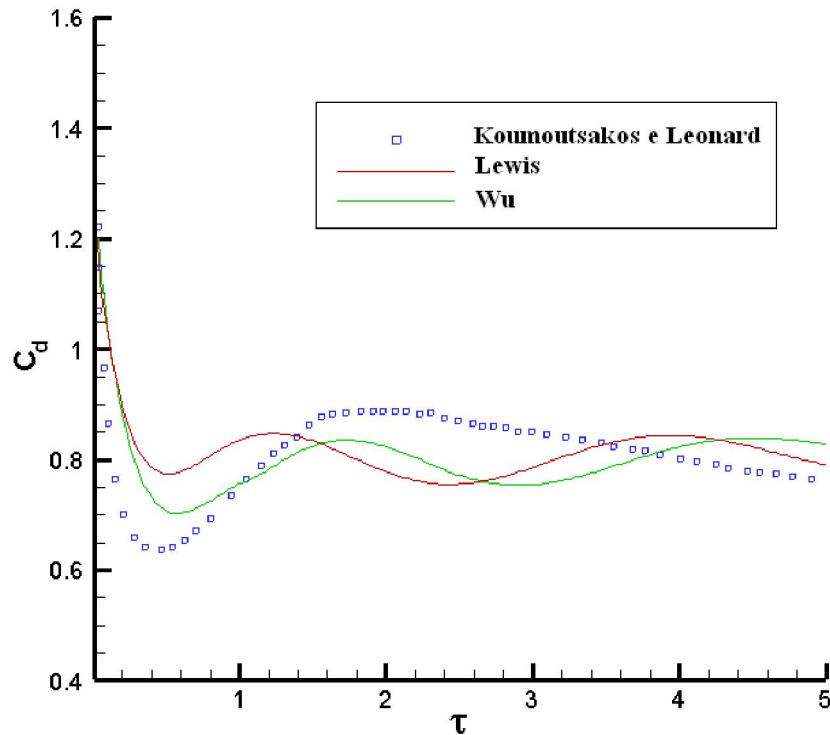


Figura 6.6 – Resultados do coeficiente de arrasto para $Re = 3000$ e $\tau = 5.0$

Com um incremento relativamente pequeno no número de Reynolds, observa-se a tendência dos resultados numéricos de acompanharem a curva de KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995), justificando o emprego do MAR para números de Reynolds maiores. Pode-se concluir, então, que o MAR se mostra bastante útil para a simulação da etapa difusiva do Método de Vórtices, pois concilia resultados bem satisfatórios com custo computacional baixo, se comparado ao do MCNC.

Vale ressaltar que as curvas do coeficiente de arrasto, apresentadas nesses seis casos, não correspondem aos resultados convergidos. Porém, estas permitem que se perceba que os parâmetros escolhidos se adequam à simulação do escoamento bidimensional, incompressível e não-permanente ao redor de um cilindro de seção circular e, portanto, novamente serão utilizados nas simulações para tempo longo, apresentadas na próxima seção.

6.2. Apresentação e Análise dos Resultados

Como mencionado anteriormente, nessa seção são apresentadas as simulações de tempo longo para cinco casos com valores do número de Reynolds localizados na região subcrítica, a saber: $Re = 10^3$, $Re = 5 \cdot 10^3$, $Re = 10^4$, $Re = 5 \cdot 10^4$ e $Re = 10^5$. Os valores escolhidos permitem a comparação com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. O transporte difusivo de vorticidade é simulado a partir do Método do Avanço Randômico (MAR).

CASO VII

A Tab. 6.7 apresenta os parâmetros e demais dados de entrada empregados na simulação do escoamento bidimensional, incompressível, não-permanente e com $Re = 10^3$ ao redor do cilindro circular para o instante de tempo $\tau = 25.0$.

Tabela 6.7 – Parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para o Caso VII

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	10^3
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	25.0

A Fig. 6.7 apresenta as linhas de corrente para o escoamento, onde se pode observar a formação da esteira de Von Karman, ainda que bastante assimétrica.

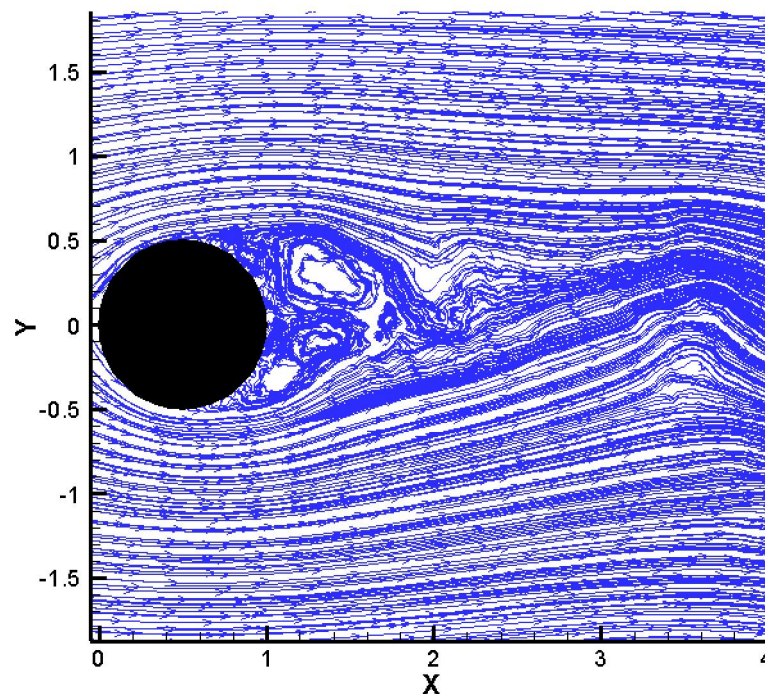
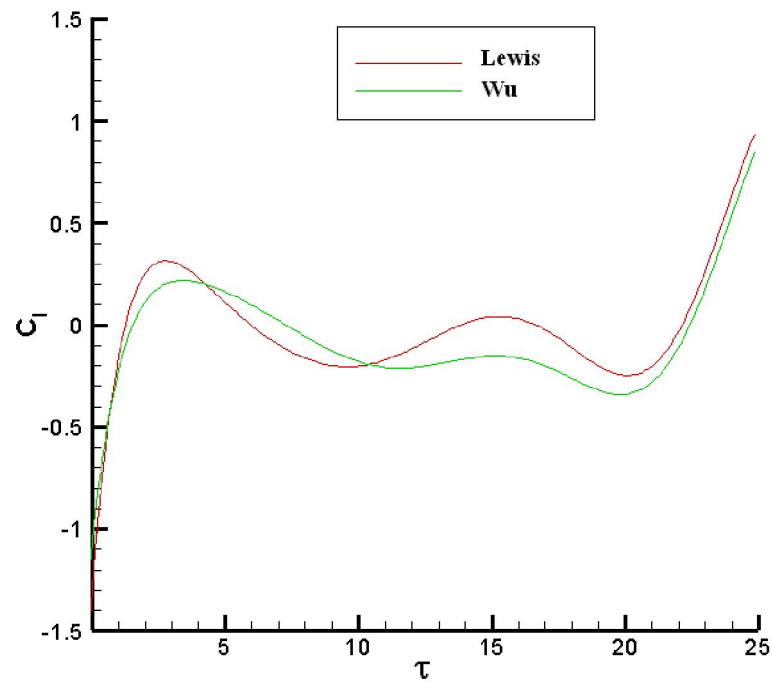
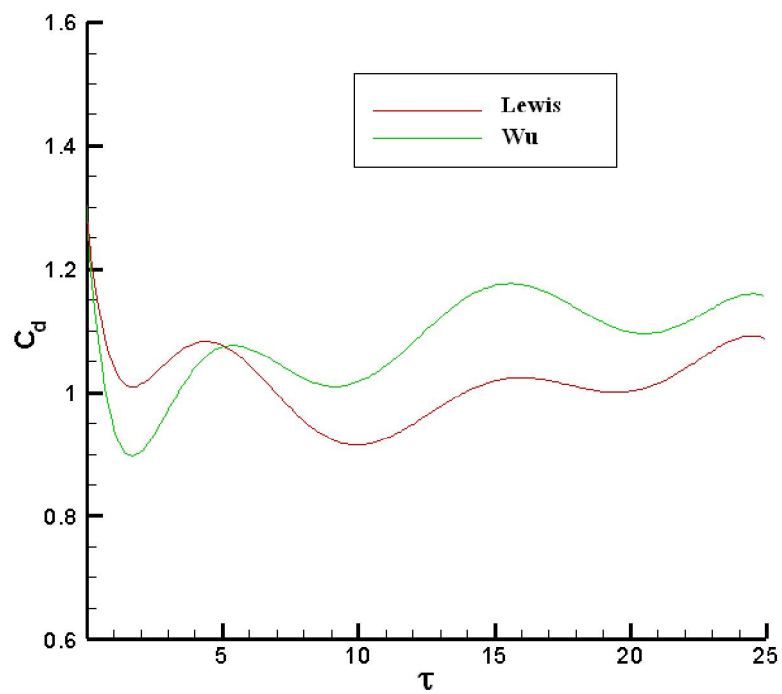


Figura 6.7 – Linhas de corrente para $Re = 10^3$ e $\tau = 25.0$

As Figs. 6.8a e 6.8b apresentam a história temporal dos coeficientes de sustentação e de arrasto, respectivamente, obtidos a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981).



(a)



(b)

Figura 6.8 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 10^3$ e $\tau = 25.0$

Como pode ser visto, a curva para o coeficiente de sustentação oscila em torno de zero, como esperado. A passagem de vórtices regulares com a configuração da rua de Von Karman na esteira de um corpo rombudo causa o aparecimento de uma periodicidade dominante em medições de velocidade na esteira. A frequência associada a esta periodicidade é expressa em função do número de Strouhal, que será o parâmetro de comparação com o resultado experimental fornecido por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), e numérico, por OGAMI e AYANO (1995). Assim, serão apresentados na Tab. 6.8 abaixo, os valores obtidos para a frequência adimensional da força de sustentação a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981) e os resultados experimental e numérico, para fins de comparação. Na Tab. 6.9 serão apresentados os erros associados.

Tabela 6.8 – Valores do número de Strouhal para o Caso VII

Resultados	Valores de St
LEWIS (1991)	0.208
WU (1981)	0.1875
Experimental por SCHLICHTING e GERSTEN (2000)	0.20
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	0.215

Tabela 6.9 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso VII

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	4.0
WU (1981)	6.25
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	7.5

Percebe-se que o número de Strouhal apresentou erros de 4.0% e 6.25% para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), respectivamente, com relação ao resultado experimental fornecido por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), e inferiores ao valor obtido numericamente por OGAMI e AYANO (1995), o que atesta a boa qualidade da simulação.

Analogamente, o valor médio do coeficiente de arrasto, bem como a comparação deste com o resultado experimental obtido por BLEVINS (1984) e numérico, por OGAMI e AYANO (1995) estão dispostos, abaixo, na Tab. 6.10. Na Tab. 6.11 serão apresentados os desvios percentuais.

Tabela 6.10 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso VII

Resultados	Valores de $\overline{C_d}$
LEWIS (1991)	1.037
WU (1981)	1.070
Experimental por BLEVINS (1984)	1.0
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	1.38

Tabela 6.11 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por BLEVINS (1984) para o Caso VII

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	3.7
WU (1981)	7.0
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	38.0

Observa-se que o coeficiente de arrasto médio apresentou erros de 3.7% e 7.0% para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), respectivamente, com relação ao resultado experimental fornecido por BLEVINS (1984), bem inferiores ao valor obtido numericamente por OGAMI e AYANO (1995), o que corrobora a boa qualidade dos resultados globais obtidos. Cabe ressaltar que, para valores do número de Reynolds superiores a 200, os efeitos tridimensionais se tornam importantes. As forças de sustentação e arrasto de cilindros, nominalmente bidimensionais, sofrem o efeito deste fenômeno, e o coeficiente de arrasto calculado para simulações bidimensionais é maior que o obtido através de experimentos. O número de Strouhal é mais insensível a esses efeitos.

Finalmente, a Fig. 6.9 apresenta a distribuição de pressão sobre o cilindro, obtida a partir da metodologia de LEWIS (1991).

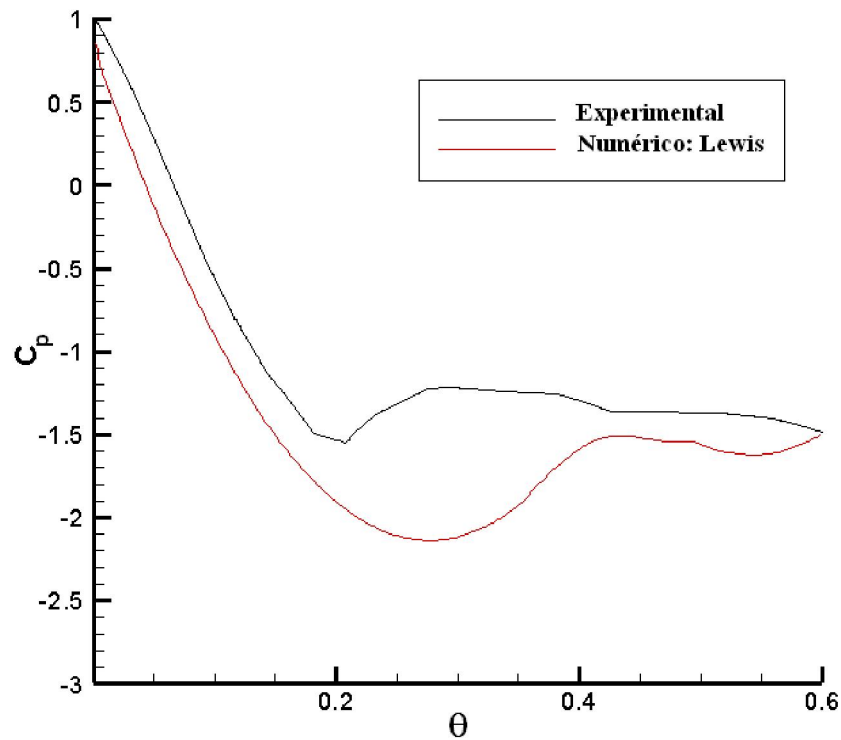


Figura 6.9 – Distribuição de pressão para $Re = 10^3$ e $\tau = 25.0$

A curva do coeficiente de pressão apresenta um comportamento suave e encontra-se relativamente próxima à curva experimental. O coeficiente de pressão de base, no entanto, é mais negativo, o que justifica o fato de o coeficiente de arrasto ser mais alto que os valores experimentais encontrados na literatura.

CASO VIII

A Tab. 6.12 apresenta os parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para $Re = 5 \cdot 10^3$ e instante de tempo $\tau = 25.0$.

Tabela 6.12 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso VIII

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	5.10^3
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	25.0

A Fig. 6.10 apresenta as linhas de corrente para o escoamento, onde é possível observar a formação da esteira de Von Karman, ainda que assimétrica.

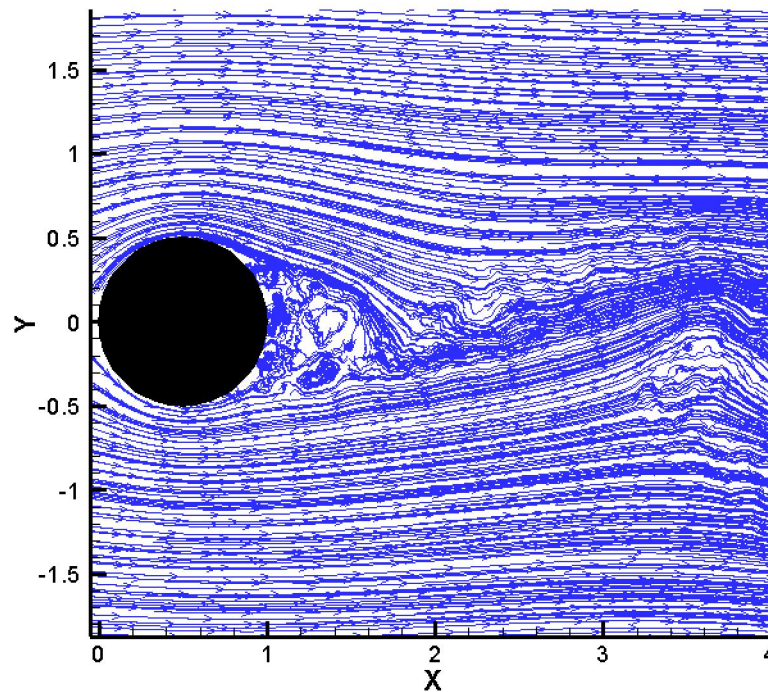
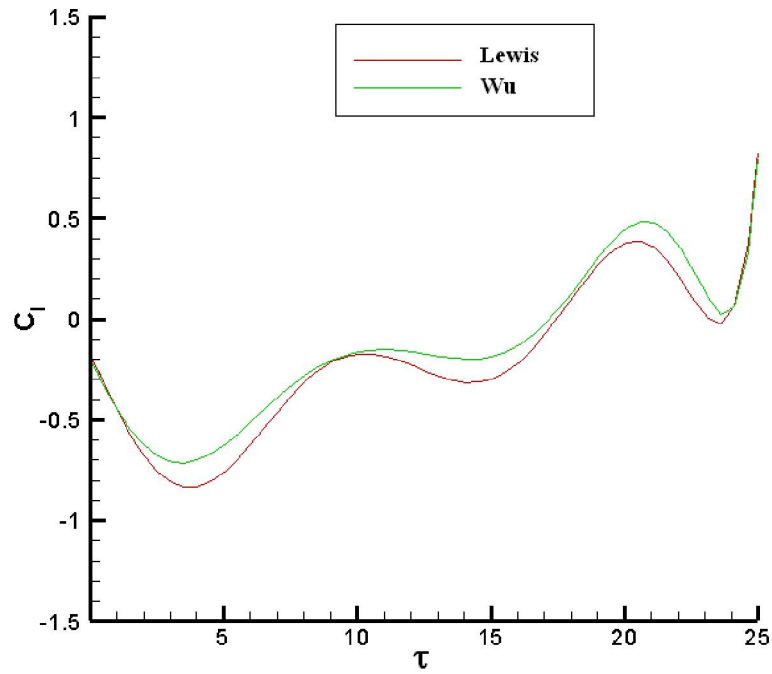
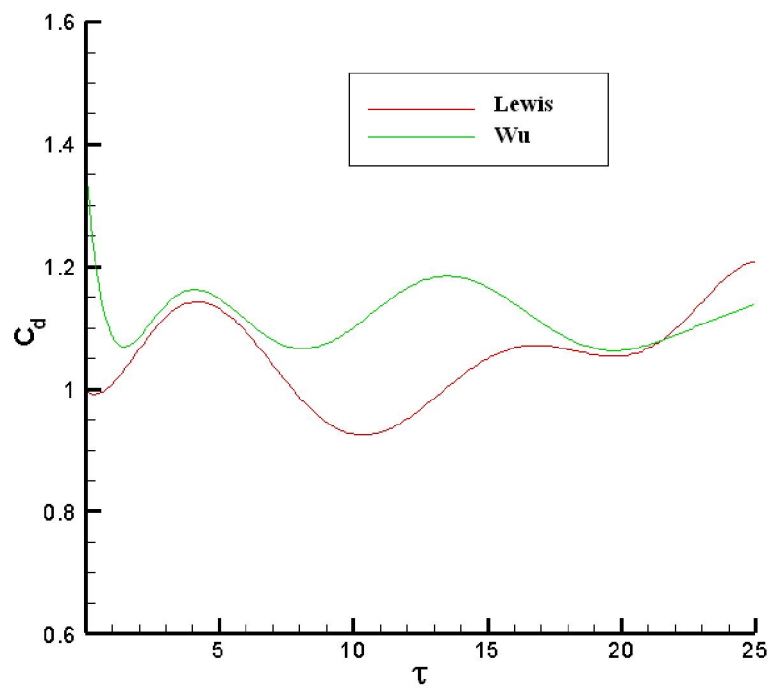


Figura 6.10 – Linhas de corrente para $Re = 5.10^3$ e $\tau = 25.0$

As Figs. 6.11a e 6.11b apresentam a evolução temporal dos coeficientes de sustentação e de arrasto, respectivamente, obtidos a partir de LEWIS (1991) e WU (1981).



(a)



(b)

Figura 6.11 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 5 \cdot 10^3$ e $\tau = 25.0$

Novamente, a curva para o coeficiente de sustentação oscila em torno de zero, como esperado. Na sequência, serão apresentados na Tab. 6.13 abaixo, os valores para o número de Strouhal obtidos a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), e o resultado experimental, por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), para fins de comparação. Na Tab. 6.14 serão apresentados os erros associados.

Tabela 6.13 – Valores do número de Strouhal para o Caso VIII

Resultados	Valores de St
LEWIS (1991)	0.206
WU (1981)	0.212
Experimental por SCHLICHTING e GERSTEN (2000)	0.20

Tabela 6.14 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso VIII

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	3.0
WU (1981)	6.0

Percebe-se que com o aumento do número de Reynolds, os valores para o número de Strouhal são mais acurados para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), em relação ao resultado experimental fornecido por SCHLICHTING e GERSTEN (2000).

Analogamente, o valor médio do coeficiente de arrasto, bem como a comparação deste com o resultado experimental obtido por ROSHKO (1961), estão dispostos, abaixo, na Tab. 6.15. Na Tab. 6.16 serão apresentados os desvios percentuais.

Tabela 6.15 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso VIII

Resultados	Valores de $\overline{C_d}$
LEWIS (1991)	1.071
WU (1981)	1.086
Experimental por ROSHKO (1961)	1.05

Tabela 6.16 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por ROSHKO (1961) para o Caso VIII

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	2.0
WU (1981)	3.4

Analogamente, com o incremento do número de Reynolds, observa-se a redução dos erros associados ao cálculo do coeficiente de arrasto para LEWIS (1991) e WU (1981), em relação ao resultado experimental fornecido por ROSHKO (1961).

Finalmente, a Fig. 6.12 apresenta a distribuição de pressão sobre o cilindro, obtida a partir da metodologia de LEWIS (1991).

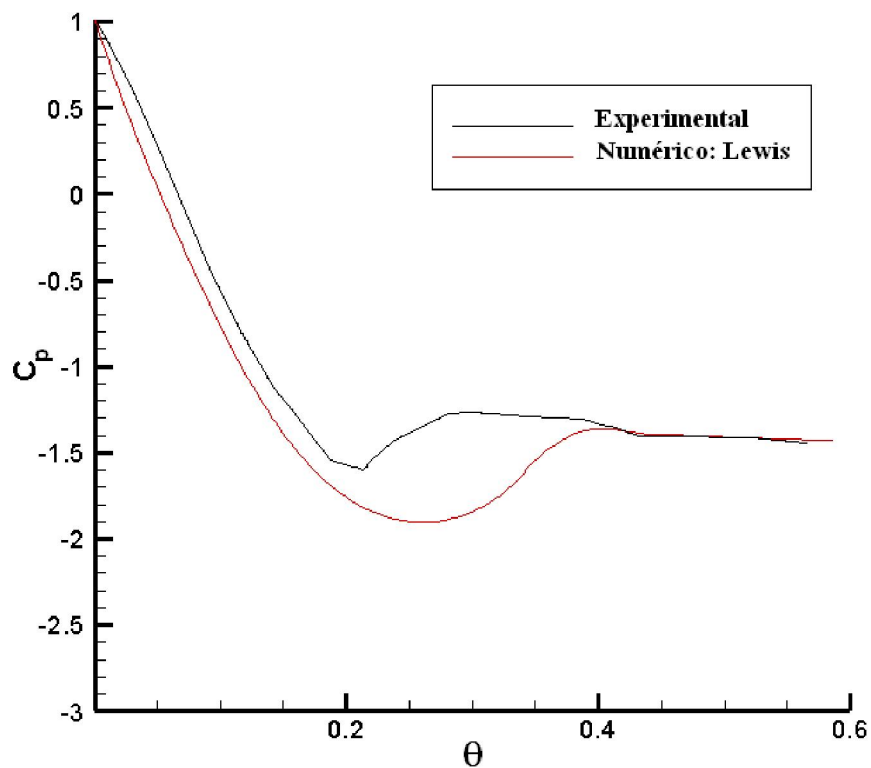


Figura 6.12 – Distribuição de pressão para $Re = 5.10^3$ e $\tau = 25.0$

Observa-se que há uma maior proximidade entre os resultados numérico e experimental nesse caso e que, novamente, o coeficiente de pressão de base é mais negativo, contribuindo para o aumento do coeficiente de arrasto.

CASO IX

A seguir, a Tab. 6.17 apresenta os parâmetros e dados de entrada utilizados na simulação para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$.

Tabela 6.17 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso IX

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	10^4
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	25.0

E a Fig. 6.13 apresenta as linhas de corrente para o escoamento, onde é possível observar a formação da esteira de Von Karman.

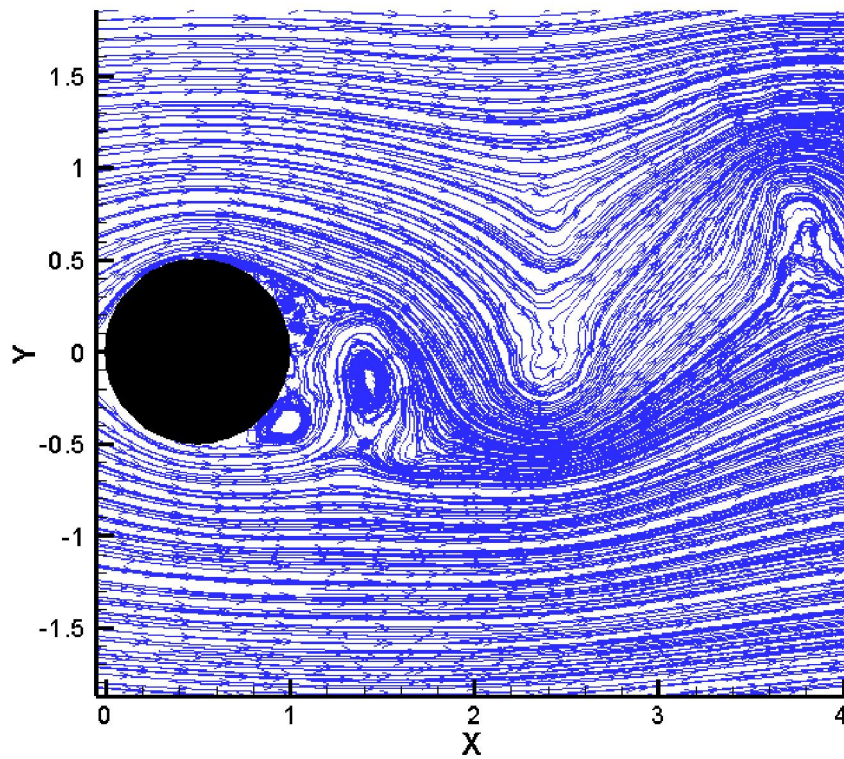
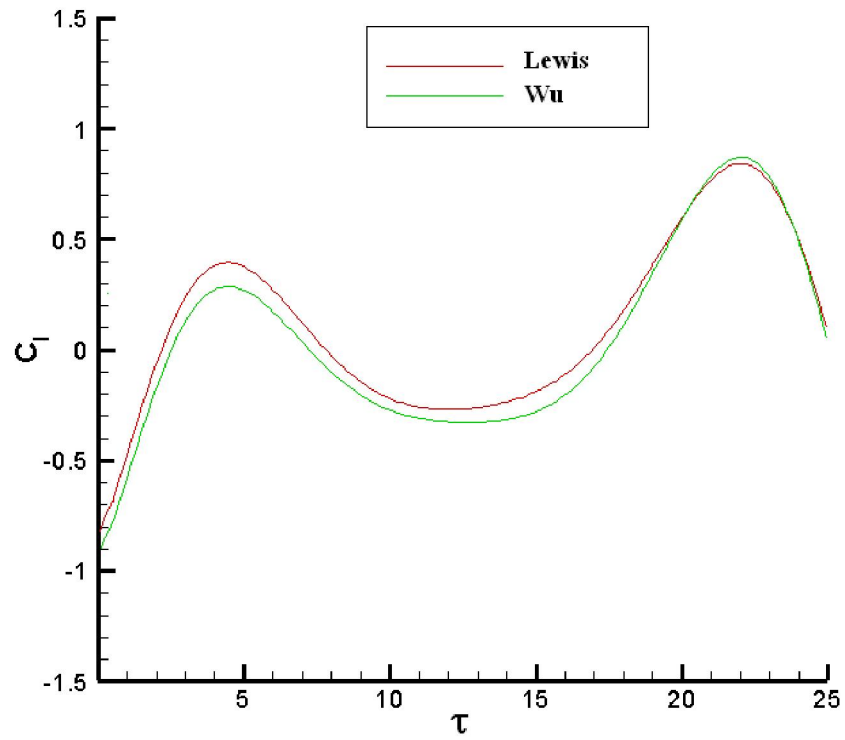
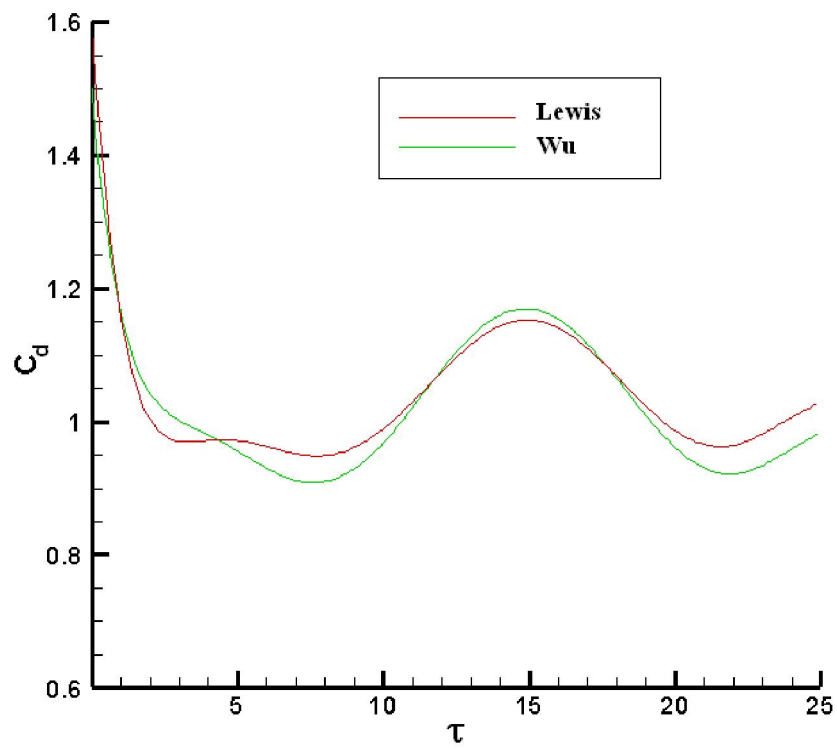


Figura 6.13 – Linhas de corrente para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$

Agora, as Figs. 6.14a e 6.14b apresentam a evolução no tempo dos coeficientes de sustentação e de arrasto, respectivamente, obtidos a partir de LEWIS (1991) e WU (1981).



(a)



(b)

Figura 6.14 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$

O valor do coeficiente de sustentação oscila em torno de zero, como previsto. A seguir, serão apresentados na Tab. 6.18 abaixo, os valores para o número de Strouhal obtidos a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), e o resultado experimental, por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), para fins de comparação, e na Tab. 6.19, os erros associados.

Tabela 6.18 – Valores do número de Strouhal para o Caso IX

Resultados	Valores de St
LEWIS (1991)	0.196
WU (1981)	0.190
Experimental por SCHLICHTING e GERSTEN (2000)	0.20

Tabela 6.19 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso IX

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	2.0
WU (1981)	5.0

Com o aumento do número de Reynolds, os valores para o número de Strouhal são ainda mais acurados, apresentando erros de 2.0% e 5.0%, respectivamente, para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), em relação ao resultado experimental fornecido por SCHLICHTING e GERSTEN (2000).

Analogamente, o valor médio do coeficiente de arrasto, bem como a comparação deste com o resultado numérico fornecido por OGAMI e AYANO (1995), e com o experimental obtido por BLEVINS (1984), estão dispostos, abaixo, na Tab. 6.20. Na Tab. 6.21 serão apresentados os desvios percentuais.

Tabela 6.20 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso IX

Resultados	Valores de $\overline{C_d}$
LEWIS (1991)	1.106
WU (1981)	1.103
Experimental por BLEVINS (1984)	1.10
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	0.84

Tabela 6.21 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por BLEVINS (1984) para o Caso IX

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	0.54
WU (1981)	0.27
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	23.63

Para $Re = 10^4$, o cálculo do coeficiente de arrasto médio apresentou erros bem inferiores ao valor obtido numericamente por OGAMI e AYANO (1995). Observa-se, ainda, a ótima concordância dos resultados numéricos, para ambas as metodologias abordadas nesse trabalho, com o experimental.

Finalmente, a Fig. 6.15 apresenta a distribuição de pressão sobre o cilindro, obtida a partir de LEWIS (1991).

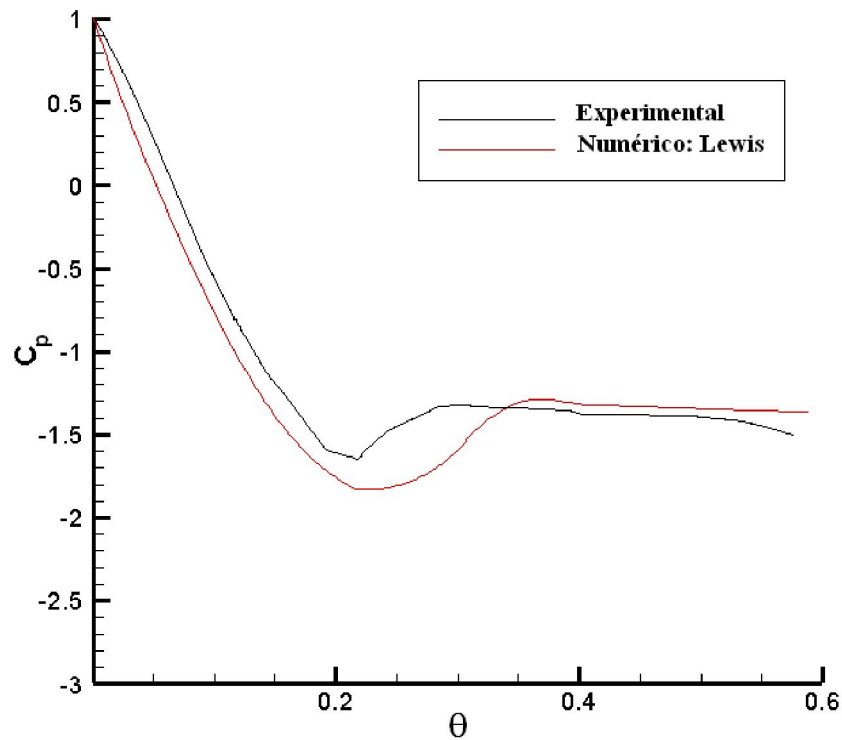


Figura 6.15 – Distribuição de pressão para $Re = 10^4$ e $\tau = 25.0$

A distribuição do coeficiente de pressão sobre o cilindro apresenta uma diferença significativa em relação ao caso anterior onde, aqui, o coeficiente de pressão de base encontra-se ainda mais próximo ao valor experimental, o que justifica uma diferença menor na estimativa do coeficiente de arrasto.

CASO X

Agora, a Tab. 6.22 apresenta os parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$.

Tabela 6.22 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso X

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	5.10^4
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	25.0

A Fig. 6.16 apresenta as linhas de corrente para o escoamento.

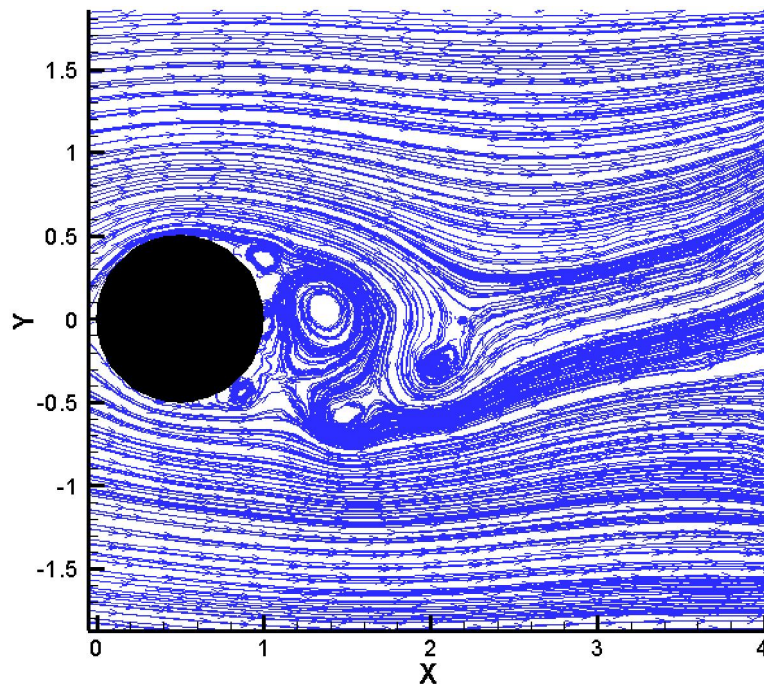
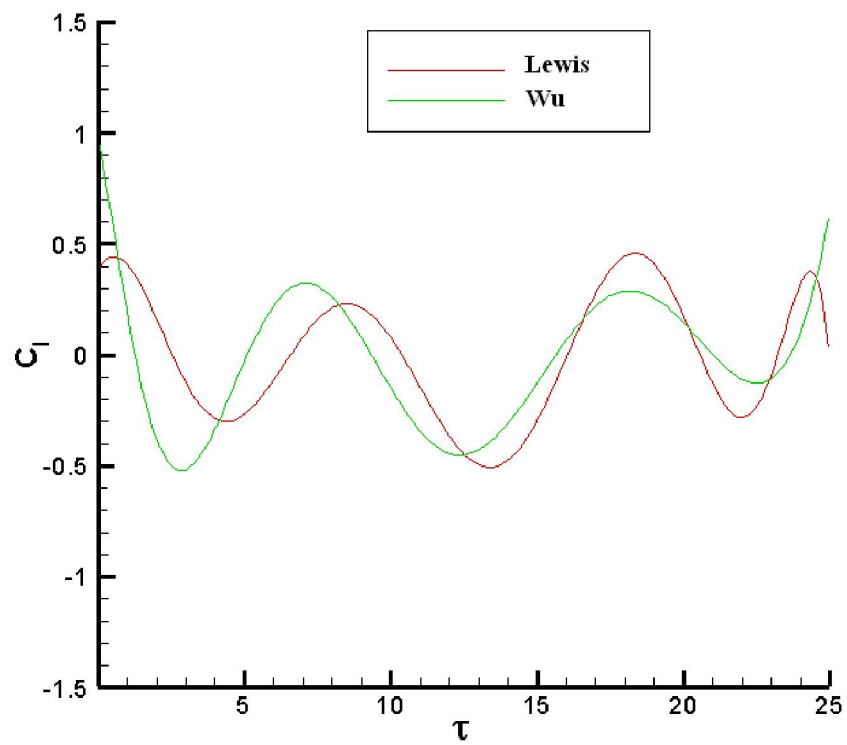
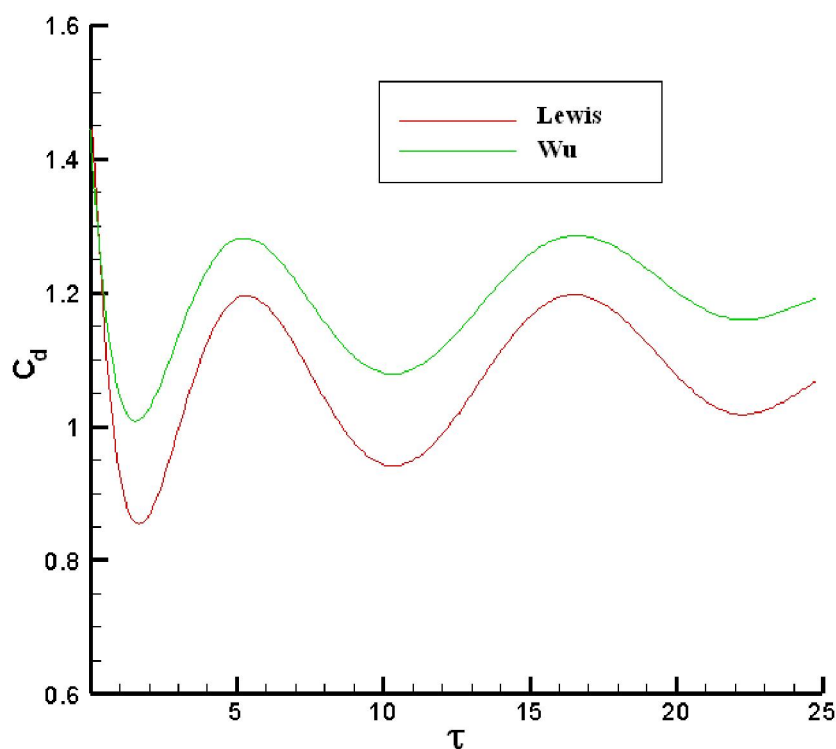


Figura 6.16 – Linhas de corrente para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$

A seguir, as Figs. 6.17a e 6.17b apresentam a variação no tempo dos coeficientes de sustentação e de arrasto, respectivamente, obtidos a partir de LEWIS (1991) e WU (1981).



(a)



(b)

Figura 6.17 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$

Conforme esperado, o valor do coeficiente de sustentação oscila em torno de zero. Dessa forma, serão apresentados na Tab. 6.23 abaixo, os valores para o número de Strouhal obtidos a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), e o resultado experimental, por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), para fins de comparação, e na Tab. 6.24, os desvios relacionados.

Tabela 6.23 – Valores do número de Strouhal para o Caso X

Resultados	Valores de St
LEWIS (1991)	0.188
WU (1981)	0.193
Experimental por SCHLICHTING e GERSTEN (2000)	0.185

Tabela 6.24 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso X

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	1.6
WU (1981)	4.3

Com o aumento do número de Reynolds, os valores para o número de Strouhal são ainda mais acurados, apresentando erros de 1.6% e 4.3%, respectivamente, para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), em relação ao resultado experimental fornecido por SCHLICHTING e GERSTEN (2000).

O valor médio do coeficiente de arrasto, bem como a comparação deste com o resultado experimental obtido por ROSHKO (1961), estão dispostos, abaixo, na Tab. 6.25. Na Tab. 6.26 serão apresentados os desvios percentuais.

Tabela 6.25 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso X

Resultados	Valores de $\overline{C_d}$
LEWIS (1991)	1.195
WU (1981)	1.203
Experimental por ROSHKO (1961)	1.20

Tabela 6.26 – Desvios de $\overline{C_d}$ em relação aos valores experimentais fornecidos por ROSHKO (1961) para o Caso X

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	0.42
WU (1981)	0.25

Para $Re = 5.10^4$, observa-se uma pequena redução nos erros numéricos em comparação ao caso anterior.

Finalmente, a Fig. 6.18 apresenta a distribuição de pressão sobre o cilindro, obtida a partir de LEWIS (1991).

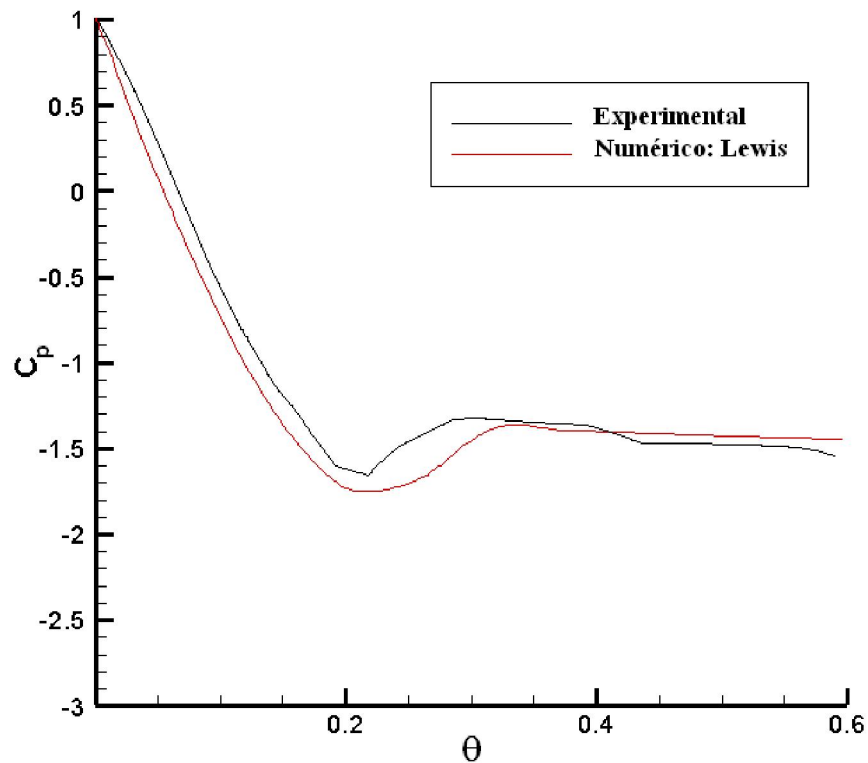


Figura 6.18 – Distribuição de pressão para $Re = 5.10^4$ e $\tau = 25.0$

Os resultados obtidos para a distribuição do coeficiente de pressão sobre o cilindro são qualitativamente melhores que os observados nos casos anteriores, o que justifica a boa acurácia dos resultados apresentados para o coeficiente de arrasto.

CASO XI

Finalmente, esse é o último caso apresentado neste trabalho para simulações de tempo longo. Assim, a Tab. 6.27 apresenta os parâmetros e dados de entrada empregados na simulação para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$.

Tabela 6.27 – Parâmetros e dados de entrada utilizados para o Caso XI

Parâmetro ou dado de entrada	Valor
Número de Reynolds – Re	10^5
Parâmetro de divisão dos vórtices do MCNC – α_{MCNC}	0.6
Razão entre o espaçamento entre os centros dos vórtices (h) e o raio do vórtice (σ_0) – h/σ_0	0.85
Número de painéis – N	100
Passo de tempo – $\Delta\tau$	0.01
Erro máximo na aglomeração – e	10^{-2}
Limite de corte no cut off – Γ_{corte}	10^{-4}
Número de subpainéis – N_{sub}	5
Tempo de simulação – τ	25.0

Logo, a Fig. 6.19 apresenta as linhas de corrente para o escoamento.

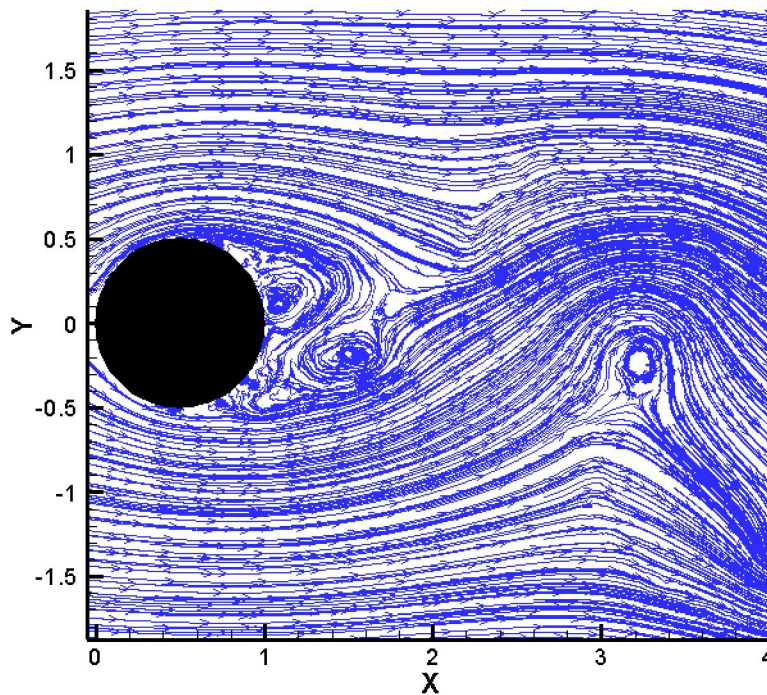
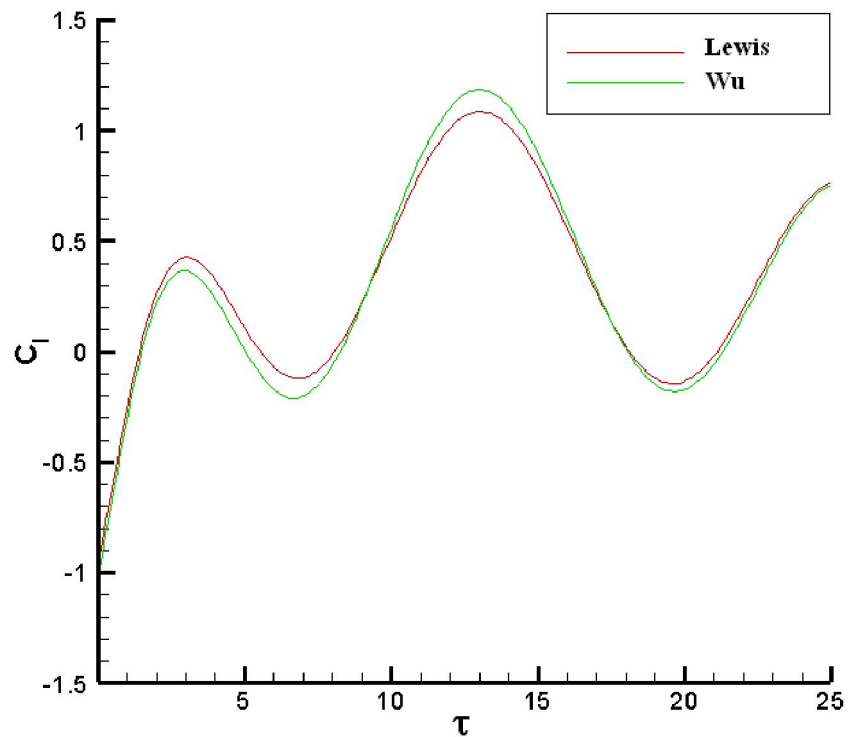
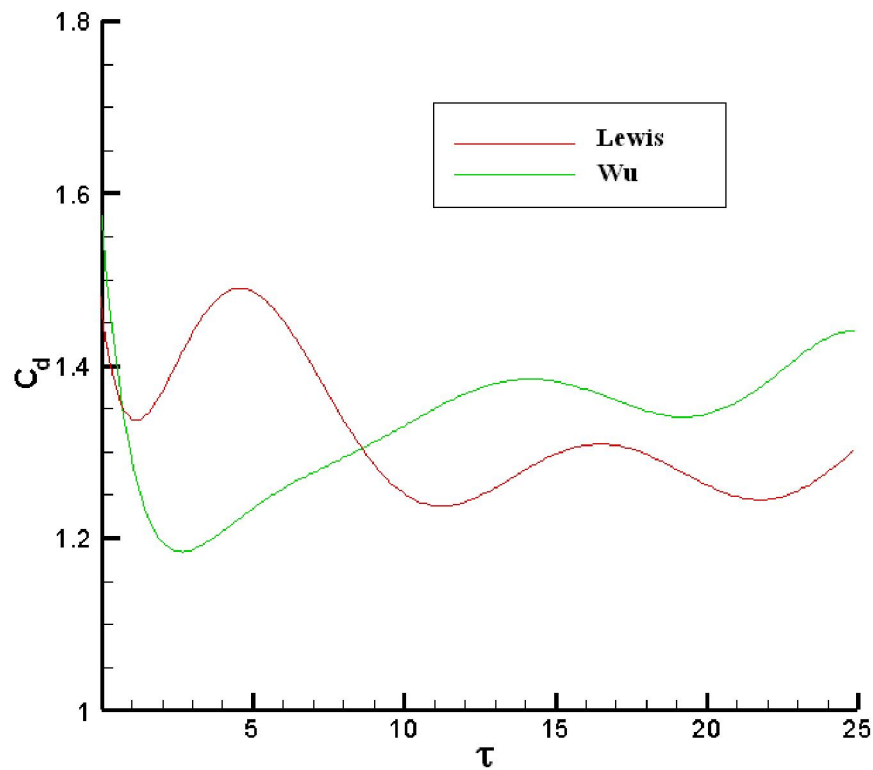


Figura 6.19 – Linhas de corrente para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$

A seguir, as Figs. 6.20a e 6.20b apresentam a história temporal dos coeficientes de sustentação e de arrasto, respectivamente, obtidos a partir de LEWIS (1991) e WU (1981).



(a)



(b)

Figura 6.20 – Coeficientes de sustentação e arrasto para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$

Novamente o valor do coeficiente de sustentação oscila em torno de zero. Então, serão apresentados na Tab. 6.28 abaixo, os valores para o número de Strouhal obtidos a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), e o resultado experimental, por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), para fins de comparação, e na Tab. 6.29, os desvios relacionados.

Tabela 6.28 – Valores do número de Strouhal para o Caso XI

Resultados	Valores de St
LEWIS (1991)	0.189
WU (1981)	0.192
Experimental por SCHLICHTING e GERSTEN (2000)	0.190

Tabela 6.29 – Desvios de St em relação aos valores experimentais fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) para o Caso XI

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	0.5
WU (1981)	1.0

Como esperado, esse caso possui os melhores resultados quando comparados ao valor experimental fornecido por SCHLICHTING e GERSTEN (2000).

O valor médio do coeficiente de arrasto, bem como a comparação deste com o resultado numérico apresentado por OGAMI e AYANO (1995), e o experimental obtido por BLEVINS (1984), estão dispostos, abaixo, na Tab. 6.30. Na Tab. 6.31 serão apresentados os desvios percentuais.

Tabela 6.30 – Valores médios do coeficiente de arrasto para o Caso XI

Resultados	Valores de $\overline{C}_d$
LEWIS (1991)	1.205
WU (1981)	1.202
Experimental por BLEVINS (1984)	1.20
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	1.07

Tabela 6.31 – Desvios de $\overline{C}_d$ em relação aos valores experimentais fornecidos por BLEVINS (1984) para o Caso XI

Resultados	Erro (%)
LEWIS (1991)	0.42
WU (1981)	0.17
Numérico por OGAMI e AYANO (1995)	10.83

Os valores dispostos na tabela acima confirmam a excelente concordância dos resultados numéricos apresentados nesse trabalho com o experimental, se comparados com os resultados obtidos por OGAMI e AYANO (1995).

Por fim, a Fig. 6.21 apresenta a distribuição de pressão sobre o cilindro, obtida a partir de LEWIS (1991).

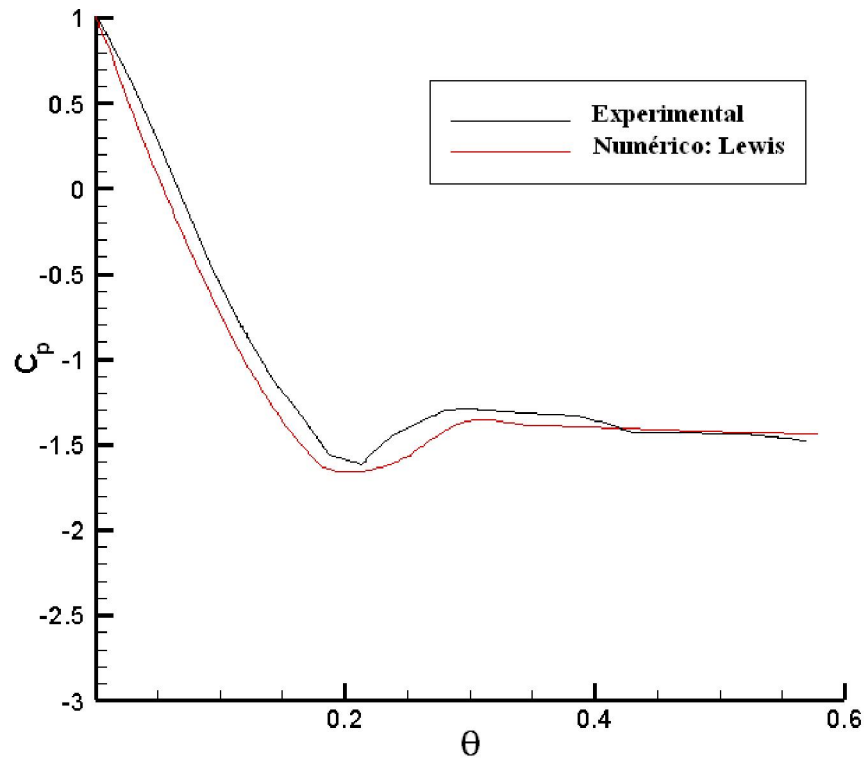


Figura 6.21 – Distribuição de pressão para $Re = 10^5$ e $\tau = 25.0$

Finalmente observa-se, para números de Reynolds elevados, como nesse caso, uma excelente concordância dos resultados numéricos com o experimental obtido a partir da literatura disponível. A partir desses resultados, pode-se afirmar que o esforço na superfície do corpo foi determinado de maneira precisa, o que atesta a boa acurácia da simulação realizada ao redor do cilindro de seção circular. Nas seções a seguir, será realizada uma comparação, em forma gráfica, dos valores para o coeficiente de arrasto e número de Strouhal em função do número de Reynolds, para os resultados apresentados nesse trabalho e pelos demais autores.

6.3. Coeficiente de Arrasto em Função do Número de Reynolds

Os valores numéricos do coeficiente de arrasto médio em função do número de Reynolds correspondentes aos casos VII a XI, para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), bem como os resultados experimentais, e os numéricos, fornecidos por OGAMI e AYANO (1995) encontram-se listados na Tab. 6.32.

Tabela 6.32 – Valores numéricos e experimentais do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds

Coeficiente de arrasto					
Casos	Re	LEWIS	WU	Num. por OGAMI e AYANO	Experimental
VII	10^3	1.037	1.070	1.38	1.0
VIII	5.10^3	1.071	1.086	–	1.05
IX	10^4	1.106	1.103	0.84	1.10
X	5.10^4	1.195	1.203	–	1.20
XI	10^5	1.205	1.202	1.07	1.20

A Fig. 6.22 fornece uma visão global dos resultados numéricos superpostos aos experimentais, mostrados, abaixo, no gráfico de $C_d \times Re$.

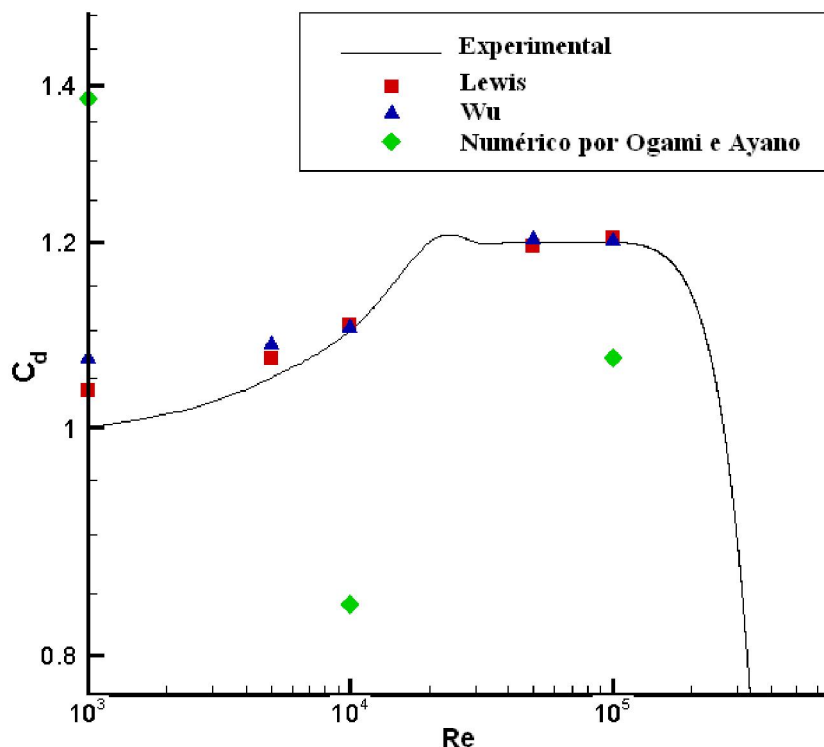


Figura 6.22 – Gráfico $C_d \times Re$

Os resultados obtidos para os casos VII a XI, para valores de Reynolds entre $10^3 \leq Re \leq 10^5$, localizados na faixa subcrítica, representam bem o comportamento esperado para as simulações. Observa-se, pelo gráfico, que os valores numéricos para o coeficiente de arrasto apresentam uma concordância muito boa com os valores experimentais, relembrando que os resultados numéricos são maiores devido aos efeitos tridimensionais inerentes ao escoamento real. Para os casos VII, IX e XI, os resultados numéricos apresentados nesse trabalho, para as duas metodologias de cálculo abordadas, são bem superiores aos obtidos numericamente por OGAMI e AYANO (1995).

6.4. Número de Strouhal em Função do Número de Reynolds

Os valores numéricos do número de Strouhal em função do número de Reynolds correspondentes aos casos VII a XI, para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), bem como os resultados experimentais obtidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000), e o numérico, por OGAMI e AYANO (1995) encontram-se listados na Tab. 6.33.

Tabela 6.33 – Valores numéricos e experimentais do número de Strouhal em função do número de Reynolds

Número de Strouhal					
Casos	Re	LEWIS	WU	Num. por OGAMI e AYANO	Experimental
VII	10^3	0.208	0.1875	0.215	0.20
VIII	$5 \cdot 10^3$	0.206	0.212	–	0.21
IX	10^4	0.196	0.190	–	0.20
X	$5 \cdot 10^4$	0.188	0.193	–	0.185
XI	10^5	0.189	0.192	–	0.190

A Fig. 6.23 ilustra os resultados numéricos superpostos aos experimentais, mostrados, abaixo, no gráfico de $St \times Re$.

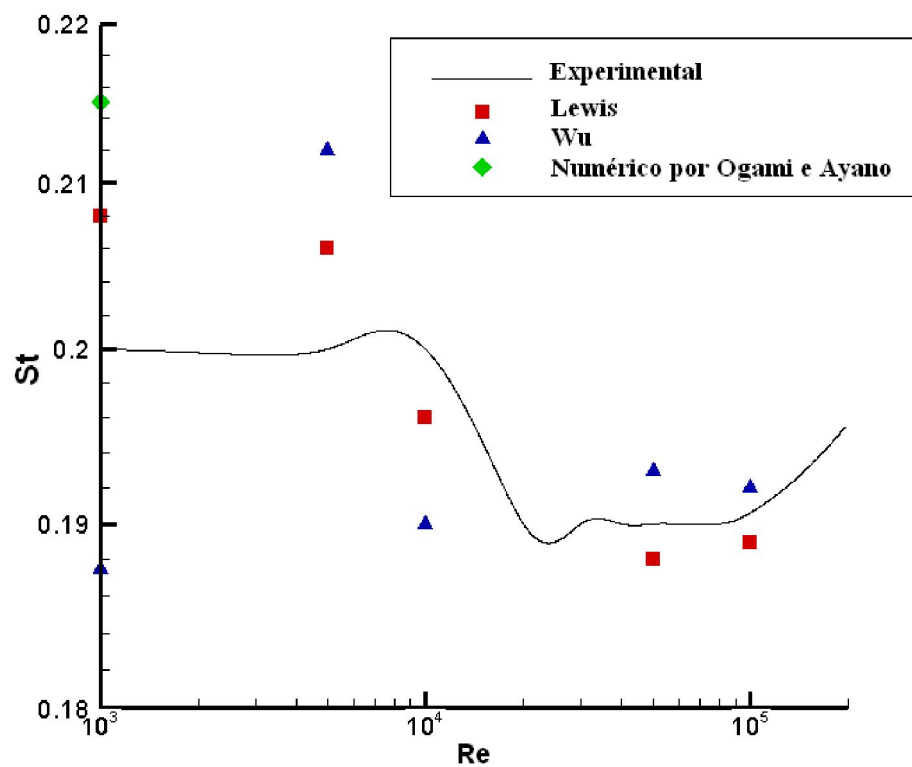


Figura 6.23 – Gráfico $St \times Re$

Observa-se, pelo gráfico, que os valores numéricos para o número de Strouhal, apresentados nesse trabalho, apresentam uma boa concordância com os valores experimentais, especialmente para $Re = 10^5$. Uma dispersão maior é percebida na comparação com o resultado obtido por OGAMI e AYANO (1995).

A partir dessas análises, pode-se afirmar que, em função dos resultados obtidos, o método desenvolvido é capaz de simular escoamentos extremamente complexos. Valores muito próximos dos experimentais foram obtidos nas simulações numéricas. As discrepâncias encontradas devem-se, sobretudo, à complexidade do escoamento, uma vez que o fenômeno de separação da camada limite e a consequente formação de uma extensa esteira oscilatória e turbulenta representam desafios a serem vencidos do ponto de vista numérico.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

A modelagem numérica apresentada neste trabalho objetiva simular escoamentos bidimensionais, incompressíveis e não-permanentes ao redor de corpos rombudos de seção circular.

As simulações numéricas são realizadas utilizando-se o Método de Vórtices, o qual lança mão de uma descrição puramente Lagrangiana e livre de malhas auxiliares de cálculo para simular a dinâmica do escoamento, através da evolução de uma nuvem de vórtices. No algoritmo empregado, vórtices de Lamb são gerados, a cada passo de tempo, próximos à superfície do corpo e se movem por convecção e difusão para simular a camada limite e a esteira viscosa. Tal modelo desingulariza o campo de velocidade induzido por um vórtice pontual, através da inclusão de um núcleo de raio não nulo. A convergência do método é alcançada quando se garante um alto grau de recobrimento entre os núcleos dos vórtices presentes na simulação.

A presença do corpo no escoamento é simulada através do Método dos Painéis, uma particularização do Método dos Elementos de Contorno, aplicado a escoamentos potenciais. Neste trabalho, o corpo é discretizado a partir de uma distribuição de elementos de vorticidade com variação linear ao longo da superfície sólida, o que garante a continuidade da função nos pontos nodais. Tradicionalmente, esse método permite a satisfação apenas da condição de impenetrabilidade na superfície. A partir da utilização simultânea de vórtices e painéis para a representação do corpo, o Método de Vórtices consegue satisfazer simultaneamente as condições de não-deslizamento e impenetrabilidade em cada ponto de controle, enriquecendo a simulação com a determinação de um fluxo de vorticidade mais representativo da situação física em questão. O fluxo de vorticidade, resultante da imposição simultânea das duas condições de contorno na parede, é calculado com alto grau de acurácia e, através do novo processo de geração de vórtices, é repassado para os vórtices nascentes.

A evolução dos modelos de difusão viscosa empregados no Método de Vórtices está intimamente relacionada à necessidade de uma representação satisfatória do campo de vorticidade. Para obter simulações de qualidade, objetiva-se preencher o domínio com a maior quantidade de vórtices possível, o que contribui para o aumento do custo computacional. Dois modelos de difusão viscosa são utilizados neste trabalho. Para a simulação do escoamento ao redor da placa plana, visando a validação do modelo, é empregado o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC). Este, ainda, é utilizado nas simulações para cilindro circular, porém para tempos curtos, inferiores a $\tau = 3.0$, onde τ é o tempo adimensional de simulação. Para tempos maiores, emprega-se o Método do Avanço Randômico (MAR). Ambos os métodos estudados simulam o processo de difusão viscosa corretamente, porém, como a acurácia dos resultados numéricos depende do grau de recobrimento dos núcleos dos vórtices e, conseqüentemente, do número de vórtices presentes na simulação, pode-se concluir que o MCNC, por realizar um refinamento espacial através da divisão dos vórtices em intervalos de tempo regulares, é o método mais indicado para simulações acuradas do Método de Vórtices, pois possui a melhor relação custo/benefício global, aliado à simplicidade de implementação.

A utilização do MCNC faz com que seja necessário recorrer ao emprego de mecanismos para o controle do número de vórtices presentes na simulação sem, no entanto, causarem perdas na convergência e na acurácia. O algoritmo de aglomeração de ROSSI (1997) se propõe a controlar o grau de recobrimento existente entre os raios dos vórtices, realizando a aglomeração dos núcleos em regiões onde a taxa de sobreposição é excessiva. Como consequência, o número de vórtices passa a ser controlado, reduzindo o custo computacional da simulação como um todo, que ainda é da ordem de M^2 , onde M é o número de vórtices presentes na simulação.

A etapa convectiva do Método de Vórtices inclui o cálculo da velocidade auto-induzida pela nuvem de vórtices. Este procedimento de cálculo também possui custo computacional da ordem de M^2 . Este trabalho emprega o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), proposto por CARRIER *et al.* (1988), que realiza a expansão em multipolos agrupando vórtices em caixas de tamanhos diferentes, de acordo com a densidade local dos mesmos. Dentro da mesma caixa é realizado, então, o cálculo direto vórtice-vórtice, ao

passo que as interações entre caixas diferentes são efetuadas pela expansão em multipolos. Tal procedimento permitiu a redução do custo computacional para a ordem de M .

Uma alternativa para diminuir o custo computacional envolvido na aglomeração, que utilizando apenas o algoritmo proposto por ROSSI (1997) era da ordem de M^2 , é realizá-la isoladamente em cada caixa resultante da divisão do domínio computacional estabelecida pelo MEMA. Esta estratégia permite a utilização do algoritmo de aglomeração em cada caixa separadamente, evitando avaliar as interações entre os vórtices que estão em caixas diferentes, o que reduz o custo computacional do processo. A eficiência da aglomeração é garantida pelo fato de que a densidade local de vórtices é mantida sobre controle durante a divisão do domínio em caixas executada pelo MEMA.

Vale ressaltar que o modelo numérico utilizado neste trabalho apresenta uma maneira inédita de implementação das condições de contorno na superfície do corpo, onde ambas as condições de impenetrabilidade e não-escorregamento são impostas explicita e simultaneamente. A qualidade dos resultados encontrados para os perfis de velocidade nas simulações do escoamento ao redor de uma placa plana atesta a capacidade do modelo para simular, de maneira representativa, o processo de geração de vorticidade na superfície sólida. Outra contribuição deste trabalho refere-se à implementação de um esquema uniforme de discretização da superfície do corpo, por ser mais adequado para representar as geometrias dos corpos que são objetos de estudo desse trabalho, apresentando, consequentemente, resultados mais acurados se comparados com trabalhos anteriores.

Foram utilizadas duas metodologias distintas de cálculo dos carregamentos sobre a superfície do corpo, a saber: LEWIS (1991) e WU (1981). A primeira baseia-se na integração da pressão na parede e parte da Equação de Navier-Stokes avaliada sobre a superfície, e a segunda propõe a avaliação da força na superfície, considerando o campo de vorticidade na parede e na esteira do escoamento como um todo. Os resultados encontrados mostram boa concordância entre as duas maneiras de cálculo apresentadas e demais resultados numéricos dispostos na literatura.

O Capítulo 5 apresenta os testes preliminares, a partir da realização de simulações do escoamento ao redor de uma placa plana de Blasius, paralela ao escoamento, necessários para estudar os parâmetros numéricos inerentes ao Método de Vórtices, para o modelo apresentado por SANTIAGO (2008), formando um código computacional completo que

simule, de maneira representativa, escoamentos viscosos ao redor de corpos, mantendo-se as hipóteses simplificadoras descritas no Capítulo 3, e respeitando-se as limitações computacionais existentes.

Os resultados servem para validar o modelo desenvolvido e avaliar a convergência do método diante dos parâmetros numéricos e físicos mais relevantes que controlam a simulação, tais como, α_{MCNC} , h/σ_0 , N , $\Delta\tau$ e Re . Para todos os casos, os testes mostram resultados cada vez mais representativos e acurados quando se refinam esses parâmetros. Os resultados são obtidos para três posições na placa, $x/C = 0.25$, $x/C = 0.50$, $x/C = 0.75$ e para diferentes instantes de tempo. Assim, para os mesmos instante de tempo e posição na placa, o melhor resultado do perfil de velocidade é obtido para o valor de α_{MCNC} maior, situação em que ocorre um refinamento espacial mais acentuado, provocado pela maior quantidade de divisões dos vórtices e o consequente aumento da nuvem. Melhores resultados também são percebidos para valores de h/σ_0 cada vez menores, pois representam uma maior razão de recobrimento dos núcleos dos vórtices. Da mesma forma, percebe-se que a qualidade da simulação é significativamente melhor à medida que se aumenta o número de painéis, N , pois a presença do corpo é melhor representada devido ao refinamento da discretização da vorticidade na superfície sólida e, finalmente, observa-se que os resultados são melhores à medida que o intervalo de tempo, $\Delta\tau$, diminui. Observa-se, para todos os casos, a tendência de convergência mais acelerada na região próxima ao bordo de ataque, devido ao fato de a espessura da camada limite ser menor nesta região, necessitando, portanto, de uma menor quantidade de vórtices para representá-la. Na análise da convergência das espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento e do coeficiente de atrito, observam-se melhores resultados na parte central da placa plana, especialmente para $0.25 < x/C < 0.6$, em comparação com os visualizados próximos às extremidades. Esta constatação é esperada, pelo fato de a teoria de camada limite ser aplicável apenas a regiões suficientemente distantes do bordo de ataque, assim como pelo fato de os efeitos associados à descontinuidade do bordo de fuga não serem contemplados, uma vez que a placa plana é considerada semi-infinita.

Os resultados convergidos para o perfil de velocidade são capazes de reproduzir o perfil de Blasius de maneira representativa, atestando a boa acurácia da simulação. Assim, pode-

se afirmar que o modelo numérico desenvolvido neste trabalho permite reproduzir, com boa representatividade, o processo de geração de vorticidade na superfície, o que o habilita a realizar simulações de escoamentos externos ao redor de corpos de diferentes geometrias, como cilindros de seção circular, pois possibilita a determinação dos esforços no corpo com precisão. Da mesma forma, os resultados convergidos obtidos para as espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento, assim como para o coeficiente de atrito, mostram muito boa concordância com as soluções teóricas disponíveis na literatura.

A escolha dos parâmetros numéricos utilizados nas simulações para o cilindro de seção circular teve como ponto de partida o estudo para placa plana, objetivando uma relação custo computacional/resultados viável e satisfatória. A escolha da geometria deve-se a maior quantidade de simulações e experimentos disponíveis na literatura, permitindo, portanto, a possibilidade de comparação dos resultados. O avanço temporal utilizado é o de Adams-Bashforth de segunda ordem.

Inicialmente são realizadas, nesse capítulo, três simulações de tempo bem curto, $\tau = 0.25$, de forma a permitir a visualização da tendência de convergência do método. Assim, são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir das metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981) para o coeficiente de arrasto para diferentes valores de Reynolds, bem como a comparação destes com os resultados numéricos obtidos por KOUMOUTSAKOS e LEONARD (1995). Observou-se que, como esperado, as soluções se tornam mais apuradas à medida que o número de Reynolds aumenta, e que especialmente para $Re = 1000$, os resultados numéricos apresentados nesse trabalho apresentam uma excelente concordância com os extraídos da literatura. Para verificar se a tendência se mantém, mais três simulações para tempos maiores são realizadas, a saber: $\tau = 3.0$ e $\tau = 5.0$. Para as simulações realizadas até o instante de tempo $\tau = 3.0$, empregou-se o Método do Crescimento do Núcleo Corrigido (MCNC) na etapa difusiva do Método de Vórtices, pois por realizar um refinamento espacial, é o método mais indicado para realizar simulações acuradas do Método de Vórtices. No entanto, para tempos de simulação maiores, é necessário empregar o Método do Avanço Randômico (MAR) para o cálculo do termo difusivo, pois o custo computacional do MCNC torna inviável a sua utilização. Assim, os dois últimos casos são simulados, visando a validação do MAR e, através da análise dos resultados, pode-se concluir que o MAR se mostra bastante útil para

a simulação da etapa difusiva do Método de Vórtices, pois concilia resultados bem satisfatórios com custo computacional baixo.

Em seguida, são realizadas simulações de tempo longo, $\tau = 25.0$, para cinco valores do número de Reynolds localizados na região subcrítica, a saber: $Re = 10^3$, $Re = 5.10^3$, $Re = 10^4$, $Re = 5.10^4$ e $Re = 10^5$. Os valores escolhidos permitem a comparação com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Assim, para cada caso, são apresentados a linha de corrente do escoamento, que permite a visualização da formação da esteira de Von Karman, a história temporal dos coeficientes de sustentação e arrasto, e a distribuição de pressão na superfície do corpo. Observa-se que a curva do coeficiente de sustentação oscila em torno de zero. Assim, a frequência adimensional da força de sustentação é o parâmetro de comparação dos resultados numéricos com os experimentais, fornecidos por SCHLICHTING e GERSTEN (2000) e numéricos, por OGAMI e AYANO (1995), conforme o caso. Da mesma forma, os valores médios do coeficiente de arrasto são comparados com os resultados experimentais obtidos por BLEVINS (1984) e ROSHKO (1961) e numéricos, por OGAMI e AYANO (1995). Com o incremento do número de Reynolds, percebe-se que o número de Strouhal e o coeficiente de arrasto médio apresentam erros significativamente baixos para as metodologias de LEWIS (1991) e WU (1981), com relação ao resultado experimental, e bem inferiores ao valor obtido numericamente por OGAMI e AYANO (1995), o que corrobora a boa qualidade dos resultados globais obtidos. Cabe ressaltar que, para valores do número de Reynolds superiores a 200, os efeitos tridimensionais se tornam importantes. As forças de sustentação e arrasto de cilindros, nominalmente bidimensionais, sofrem o efeito deste fenômeno, e o coeficiente de arrasto calculado para simulações bidimensionais é maior que o obtido através de experimentos. O número de Strouhal é mais insensível a esses efeitos. Para todos os casos, a curva do coeficiente de pressão apresenta um comportamento suave e encontra-se bem próxima à curva experimental. O coeficiente de pressão de base, no entanto, é mais negativo, o que justifica o fato de o coeficiente de arrasto ser mais alto que os valores experimentais encontrados na literatura.

Finalmente, é realizada uma comparação, em forma gráfica, dos valores para o coeficiente de arrasto e número de Strouhal em função do número de Reynolds, para os resultados apresentados nesse trabalho e pelos demais autores. Os resultados obtidos para o

número de Strouhal e o coeficiente de arrasto apresentam uma boa concordância com os valores experimentais, especialmente para $Re = 10^5$. Uma dispersão maior é percebida na comparação com o resultado obtido, numericamente, por OGAMI e AYANO (1995).

A partir dessas análises, pode-se afirmar que, em função dos resultados obtidos, o método desenvolvido é capaz de simular escoamentos extremamente complexos. Valores muito próximos dos experimentais foram obtidos nas simulações numéricas. As discrepâncias encontradas devem-se, sobretudo, à complexidade do escoamento, uma vez que o fenômeno de separação da camada limite e a consequente formação de uma extensa esteira oscilatória e turbulenta representam desafios a serem vencidos do ponto de vista numérico.

Pode-se concluir, dessa forma, que o Método de Vórtices utilizado neste trabalho possui enorme potencial para a simulação de escoamentos externos ao redor de corpos, podendo ainda evoluir bastante. Como sugestões para a continuação deste trabalho, pode-se citar a implementação e utilização de programação paralela; e a melhoria da representação do campo de vorticidade, através da utilização de funções de base de ordem espacial superior ou de técnicas que empregam malhas auxiliares temporárias para o reposicionamento dos vórtices no espaço.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACHENBACH, E., 1968, “Distribution of Local Pressure and Skin Friction around a Circular Cylinder in Cross-Flow Up to $Re = 5 \times 10^6$ ”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 34, pp. 625-639.
- BARBA, L. A., LEONARD, A., ALLEN, C. B., “Vortex Method with Fully Mesh-Less Implementation for High Reynolds Number Flow Computations”, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering – ECCOMAS*, Jyväskylä, Finland, 24-28 July 2005a.
- BARBA, L. A., LEONARD, A., ALLEN, C. B., 2005b, “Advances in Viscous Vortex Models – Meshless Spatial Adaption Based on Radial Basis Function Interpolation”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, pp. 387-421.
- BARNES, J. E., HUT, P., 1986, “A Hierarchical O (NlogN) Force-Calculation Algorithm”, *Nature*, v. 324, pp. 446-449.
- BATCHELOR, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- BEARMAN, P. W., 1969, “On Vortex Shedding From a Circular Cylinder in the Critical Reynolds Number Régime”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 37, n. 3, pp. 577-585.
- BLEVINS, R. D., 1984, *Applied Fluid Dynamics Handbook*. 1 ed. New York, Van Nostrand Reinhold Company, Inc.
- BOUFERROUK, A., CHERNYSHENKO, S. I., 2005, “Tikhonov Regularisation in Discrete Vortex Methods”, *Computers & Fluids*, v. 34, n. 2 (Fev), pp. 275-281.
- CARREIRO, F. R., 2002, *Simulação do Escoamento Bidimensional, Incompressível, de Alto Reynolds, em Torno de Corpos via Transformação Conforme e Método de Vórtices*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CARRIER, J., GREENGARD, L., ROKHLIN, V., 1988, “A Fast Adaptive Multipole Algorithm for Particle Simulations”, *SIAM Journal of Scientific Statistics and Computation*, v. 9, n. 4 (Jul), pp. 669-686.
- CHORIN, A. J., 1973, “Numerical Study of Slightly Viscous Flows”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 57, n. 4, pp. 785-796.

- CHORIN, A. J., BERNARD, P. S., 1973, "Discretization of a Vortex Sheet, with an Example of Roll up", *Journal of Computational Physics*, v. 13, n. 3 (Nov), pp. 423-429.
- CHURCHILL, R. V., BROWN, J. W., 1984, *Complex Variables and Applications*. 4 ed. New York, McGraw-Hill.
- CLARKE, N. R., TUTTY, O. R., 1994, "Construction and Validation of a Discrete Vortex Method for the Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations", *Computers & Fluids*, v. 23, n. 6 (Jul), pp. 751-783.
- COCLE, R., WINCKELMANS, G., DAENINCK, G., 2007, "Combining the Vortex-in-Cell and Parallel Fast Multipole Methods for Efficient Domain Decomposition Simulations", *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 4 (Fev), pp. 9091-9120.
- COLLINS, W. M., DENNIS, S. C. R., 1973a, "The Initial Flow Past an Impulsively Started Circular Cylinder", *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, v. 26, n. 1 (Dez), pp. 53-75.
- COLLINS, W. M., DENNIS, S. C. R., 1973b, "Flow Past an Impulsively Started Circular Cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, v. 60, n. 1, pp. 105-127.
- COTTET, G-H., KOUMOUTSAKOS, P., 2000, *Vortex Methods: Theory and Practice*. 2 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- COTTET, G-H., KOUMOUTSAKOS, P., SALIHI, M. L. O., 2000, "Vortex Methods with Spatially Varying Cores", *Journal of Computational Physics*, v. 162, pp. 164-185.
- DENNIS, S. C. R., CHANG, G. Z., 1970, "Numerical Solutions for Steady Flow Past a Circular Cylinder at Reynolds Number up to 100", *Journal of Fluid Mechanics*, v. 42, n. 3, pp. 471-489.
- DUGAS, R., 1988, *A History of Mechanics*, 1 ed. New York, Dover.
- ELDREDGE, J. D., 2007, "Numerical Simulation of Fluid Dynamics of 2D Rigid Body Motion with the Vortex Particle Method", *Journal of Computational Physics*, v. 221, n. 2 (Fev), pp. 626-648.
- GREENGARD, C., 1985, "The Core Spreading Vortex Method Approximates the Wrong Equation", *Journal of Computational Physics*, v. 61, pp. 345-348.
- GREENGARD, L., ROKHLIN, V., 1987, "A Fast Algorithm for Particle Simulations", *Journal of Computational Physics*, v. 73, pp. 325-348.

- GUEDES, V. G., 2003, *Estudo Numérico do Escoamento ao Redor de Cilindros Circulares e Retangulares Utilizando o Método de Vórtices*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- GUEDES, V. G., HIRATA, M. H., BODSTEIN, G. C. R., “Vortex Method Simulation of the Flow around a Circular Cylinder Using the Multipole Expansion Algorithm”, *Proceedings of the International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, pp. 101-108, Gazimagusa, TRNC, Turkey, 26-29 April 1999a.
- GUO, T., CHEW, Y. T., LUO, S. C., et al., 1998, “A New Numerical Simulation Method of High Reynolds Number Flow around a Cylinder”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 158, n. 3-4 (Jun), pp. 357-366.
- HESS, J. L., 1990, “Panel Methods in Computational Fluid Dynamics”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 22, pp. 255-274.
- IHLER, A. T., “An Overview of Fast Multipole Method”, *Area Exam, MIT*, Cambridge, Massachusetts, USA, April 23 2004.
- KAMEMOTO, K., “Development of the Vortex Methods for Grid-Free Lagrangian Direct Numerical Simulation”, *Proceedings of the 3th. JSME-KSME Fluids Engineering Conference*, pp. 542-547, Sendai, Japan, July 25-27 1994.
- KAMEMOTO, K., KAWAMATA, Y., “Representation of Two-Dimensional Boundary Layers by Discrete Vortices”, *Proceedings of the International Conference on Computational Mechanics*, Tokyo, Japan 1986.
- KARAMCHETI, K., 1980, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. 2 ed. Malabar, Krieger Publishing Company.
- KATZ, J., PLOTKIN, A., 2001, *Low-Speed Aerodynamics*. 2 ed. New York, McGraw-Hill.
- KEMPKA, S. N., STRICKLAND, J. H., 1993, *A Method to Simulate Viscous Diffusion of Vorticity by Convective Transport of Vortices at a Non-Solenoidal Velocity*. In: Report SAND--93-1763, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM.
- KIDA, T., NAKAJIMA, T., 1998, “Core Spreading Vortex Methods in Two-Dimensional Viscous Flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 160, n. 3-4 (Jul), pp. 273-298.
- KOUMOUTSAKOS, P., LEONARD, A., PÉPIN, F., 1994, “Boundary Conditions for Viscous Vortex Methods”, *Journal of Computational Physics*, v. 113, n. 1 (Jul), pp. 52-61.

- KOUMOUTSAKOS, P., LEONARD, A., 1995, “High Resolution Simulations of the Flow around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 296, pp. 1-38.
- KUNDU, P. K., COHEN, I. M., 2002, *Fluid Mechanics*. 2 ed. Orlando, Academic Press.
- KUWAHARA, K., 1978, “Study of Flow Past a Circular Cylinder by an Inviscid Model”, *Journal of Physics Society of Japan*, v. 45, pp. 292-297.
- KUWAHARA, K., TAKAMI, H., 1973, “Numerical Studies of Two-Dimensional Vortex Motion by a System of Point Vortices”, *Journal of Physical Society of Japan*, v. 34, n. 1, pp. 247-253.
- LAN, L., FENG, J., JIAN-REN, F., et al., 2005, “Recent Development of Vortex Method in Incompressible Viscous Bluff Body Flows”, *Journal of Zhejiang University – Science A*, v. 6, n. 4 (Set), pp. 283-288.
- LEE, S. H., JIN, D. S., YOON, J. S., 2002, “Comparisons of Two Viscous Modes for Vortex Methods in Parallel Computation”, *JSME International Journal Series B*, v. 45, n. 2 (Jul), pp. 231-239.
- LEONARD, A., 1980, “Vortex Methods for Flow Simulation”, *Journal of Computational Physics*, v. 37, n. 3 (Out), pp. 289-335.
- LEWIS, R. I., 1981, “Surface Vorticity Modelling of Separated Flows from Two-Dimensional Bluff Bodies of Arbitrary Shape”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 23, pp. 1-12.
- LEWIS, R. I., 1991, *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- MALISKA, C. R., 2004, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2 ed. Rio de Janeiro, LTC.
- MALTA, E. S. F., D., 1998, *Aplicação do Método de Vórtices ao Escoamento de Alto Números de Reynolds em Torno de um Cilindro Circular*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MARTINS, R. A., 1989, “O Vácuo e a Pressão Atmosférica da Antiguidade a Pascal”. In: *Cadernos de História e Filosofia das Ciências*, v. 1, número especial, pp. 9-48.

- MUSTTO, C. A. A., 1998, *Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Cilindro Circular Com e Sem Rotação Utilizando o Método de Vórtices Discretos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MUSTTO, C. A. A., 2004, *Simulação Numérica do Escoamento Turbulento em Torno de um Cilindro Circular via Método de Vórtices*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MUSTTO, C. A. A., HIRATA, M. H. & BODSTEIN, G. C. R., “Análise do Escoamento ao Redor de um Cilindro de Seção Circular”, *XIV COBEM*, Bauru, São Paulo, Brasil, 08-12 de Dezembro 1997.
- NUSSENZVEIG, H. M., 2002, *Curso de Física, v. 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. 4 ed. São Paulo, Ed. Edgard Blücher.
- OGAMI, Y., AKAMATSU, T., 1991, “Viscous Flow Simulation Using the Discrete Vortex Model – the Diffusion Velocity Method”, *Computers & Fluids*, v. 19, n. 3-4, pp. 433-441.
- OGAMI, Y., AYANO, Y., 1995, “Flows around a Circular Cylinder Simulated by the Viscous Vortex Model – the Diffusion Velocity Method”, *Computational Fluid Dynamics*, v. 4, n. 3 (Out), pp. 383-399.
- PATANKAR, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1 ed. New York, McGraw-Hill.
- PEREIRA, L. A. A., 1999, *Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtice Discretos*. Dissertação de M.Sc., EFEI, Itajubá, MG, Brasil.
- PEREIRA, L. H. G., 2005, *Análise do Desempenho do Método dos Painéis de Ordem Superior para o Cálculo do Escoamento em Torno de um Aerofólio*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- PEREIRA, L. H. G., BODSTEIN, G. C. R., “Método dos Painéis com Distribuições de Singularidade Quadráticas Aplicados a Escoamentos Bidimensionais sobre Aerofólios”, *ENCIT – 10º Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 29 de Novembro a 03 de Dezembro 2004.
- PEREIRA, L. H. G., SILVA, D. F. C., BODSTEIN, G. C. R., “Estudo Numérico do Escoamento Potencial em Torno de um Aerofólio Utilizando o Método dos Painéis”,

ENCIT – 10^o Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 29 de Novembro a 03 de Dezembro 2004.

- PLOUMHANS, P., WINCKELMANS, G. S., 2000, “Vortex Methods for High-Resolution Simulations of Viscous Flow Past Bluff Bodies of General Geometry”, *Journal of Computational Physics*, v. 165, n. 2 (Dez), pp. 354-406.
- PLOUMHANS, P., WINCKELMANS, G. S., SALMON, J. K., et al., 2002, “Vortex Methods for Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Bluff Body Flows: Application to the Sphere at $Re = 300, 500$, and 1000 ”, *Journal of Computational Physics*, v. 178, n. 2 (Mai), pp. 427-463.
- PORTHOUSE, D. T. C., LEWIS, R. I., 1981, “Simulation of Viscous Diffusion for Extension of the Surface Vorticity Method to Boundary and Separated Flows”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 23, pp. 157-167.
- ROSENHEAD, L., 1931, “The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity”, *Proceedings of Royal Society of London*, v. 134, n. 823, pp. 170-192.
- ROSENHEAD, L., 1963, *Laminar Boundary Layers*. 1 ed. Oxford, Clarendon Press.
- ROSHKO, A., 1961, “Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Very High Reynolds Number”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 10, n. 3 (Nov), pp. 345-356.
- ROSSI, L. F., 1996, “Resurrecting Core Spreading Vortex Methods: a New Scheme that is Both Deterministic and Convergent”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 17, n. 2 (Mar), pp. 370-397.
- ROSSI, L. F., 1997, “Merging Computational Elements in Vortex Simulations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 18, n. 4, pp. 1014-1027.
- ROSSI, L. F., 2005, “Achieving High-Order Convergence Rates with Deforming Basis Functions”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 26, n. 3, pp. 885-906.
- ROSSI, L. F., 2006a, “A Comparative Study of Lagrangian Methods Using Axisymmetric and Deforming Blobs”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 27, n. 4, pp. 1168-1180.
- ROSSI, L. F., 2006b, “Evaluation of the Biot-Savart Integral for Deformable Elliptical Gaussian Vortex Elements”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 28, n. 4, pp. 1509-1532.
- ROUVREAU, S., PERAULT, L., 2001, “Two-Dimensional Viscous Vortex Flow around a Circular Cylinder”, *Aerospace Science and Technology*, v. 5, n. 2 (Fev), pp. 85-94.

- SAFFMAN, P. G., 1992, *Vortex Dynamics*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- SANTIAGO, V. S., 2008, *Modelagem Numérica do Escoamento ao Redor de Corpos Aerodinâmicos Utilizando o Método de Vórtices*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SANTIAGO, V. S., BODSTEIN, G. C. R., “Estudo Comparativo de Quatro Diferentes Métodos de Difusão Viscosa para Aplicação no Método de Vórtices”, *ENCIT – 11º Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas*, Curitiba, PR, Brasil, 05-08 de Dezembro 2006.
- SANTIAGO, V. S., SILVA, D. F. C., BODSTEIN, G. C. R., “Análise de Desempenho do Método de Expansão em Multipolos Adaptativo Aplicado a Simulações Numéricas Via Método de Vórtices”, *ENCIT – 11º Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas*, Curitiba, PR, Brasil, 05-08 de Dezembro 2006.
- SARPKAYA, T., 1963, “Lift, Drag, and Added-Mass Coefficients for a Circular Cylinder Immersed in a Time-Dependent Flow”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 85, pp. 13-15.
- SARPKAYA, T., 1994, “Vortex Element Methods for Flow Simulation”, *Advances in Applied Mechanics*, v. 31, pp. 113-247.
- SCHLICHTING, H., GERSTEN, K., 2000, *Boundary Layer Theory*. 8 ed. Berlim, Springer-Verlag.
- SHANKAR, S., VAN DOMMELEN, L., 1996, “A New Diffusion Procedure for Vortex Methods”, *Journal of Computational Physics*, v. 127, n. 1 (Ago), pp. 88-109.
- SILVA, D. F. C., 2005, *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Aerofólios via Método de Vórtices Associado ao Método de Painéis*. Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SMITH, P. A., STANSBY, P. K., 1988, “Impulsively Started Flow around a Circular Cylinder by Vortex Method”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 194, pp. 45-77.
- SPREITER, J. R., SACKS, A. H., 1951, “The Rolling-Up of the Trailing Vortex Sheet and its Effect on Downwash behind Wings”, *Journal of Aeronautical Sciences*, v. 18, n. 1 (Jan), pp. 21-32, 72.

- STRICKLAND, J. H., GRITZO, L. A., BATY, R. S., et al., 1999, “Fast Multipole Solvers for Three-Dimensional Radiation and Fluid Flow Problems”, *Third International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods*, v. 7, pp. 408-417.
- TAKEDA, K., TUTTY, O. R., FITT, A.D., “A Comparison of Four Viscous Models for the Discrete Vortex Method”, *13rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Snowmass, CO, USA, 29th June – 2nd July 1997.
- TEIXEIRA, O. P. B., CINDRA, J. L., MONTEIRO, M. A. A., et al., “Utilizando a História da Ciência em Conteúdos Relacionados à Mecânica dos Fluidos”, *XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 24-28 de Janeiro 2005.
- TOKATY, G. A., 1994, *A History and Philosophy of Fluid Mechanics*. 1 ed. New York, Dover.
- VAN DYKE, M., 1975, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. 1 ed. Stanford, Parabolic Press.
- VAN DYKE, M., 1982, *An Album of Fluid Motion*. 10 ed. Stanford, Parabolic Press.
- WALTHER, J. H., LARSEN A., 1997, “Two Dimensional Discrete Vortex Method for Application to Bluff Body Aerodynamics”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 67-68, pp. 183-193.
- WANG, C. Y., 1967, “The Flow Past a Circular Cylinder which is Started Impulsively from Rest”, *J. Math. Phys.*, v. 46, pp. 195-202.
- WEE, D., GHONIEM, A. F., 2006, “Modified Interpolation Kernels for Treating Diffusion and Remeshing in Vortex Methods”, *Journal of Computational Physics*, v. 213, n. 1, pp. 239-263.
- WILLIAMSON, C. H. K., 1988, “The Existence of Two Stages in the Transition to Three-Dimensionality of a Cylinder Wake”, *Physics of Fluids*, v. 31, pp. 3165-3168.
- WILLIAMSON, C. H. K., 1996, “Vortex Dynamics in the Cylinder Wake”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 28, pp. 477-539.
- WU, J. C., 1981, “Theory for Aerodynamic Force and Moment in Viscous Flow”, *Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 19, n. 4 (Ago), pp. 432-441.

- YANG, R. -J., JENG, J. -C., WU, C. -H., 2003, "Computation of High Reynolds Number Flows by a Deterministic Vortex Method", *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, v. 24, n. 4, pp. 407-416.
- ZHAO, J., CHEW, Y. T., LUO, S. C., et al., 2007, "Generalized Transport Vortex Method", *Computers & Fluids*, v. 36, n. 6, pp. 1081-1091.
- ZHU, B., KAMEMOTO, K., 2003, "A Lagrangian Vortex Method for Flows over a Moving Bluff Body", *Computational Fluid Dynamics Journal*, v. 11, n. 3 (Jan), pp. 363-370.