

MODELAGEM NUMÉRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM GASODUTOS COM PADRÃO ESTRATIFICADO

David Eduardo Galdino Pimenta Bueno

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador(es): Gustavo César Rachid Bodstein
Felipe Bastos de Freitas Rachid

Rio de Janeiro
Dezembro de 2013

MODELAGEM NUMÉRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM GASODUTOS
COM PADRÃO ESTRATIFICADO

David Eduardo Galdino Pimenta Bueno

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Felipe Bastos de Freitas Rachid, D.Sc.

Prof. Albino José Kalab Leiroz, Ph.D.

Profa. Maria Laura Martins Costa, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 2013

Bueno, David Eduardo Galdino Pimenta

Modelagem numérica do escoamento bifásico em gasodutos com padrão estratificado/ David Eduardo Galdino Pimenta Bueno. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

IX, 75 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 63-68.

1. Escoamento Bifásico. 2. Gasodutos. 3. FCT. I. Bodstein, Gustavo César Rachid *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Dedico esse trabalho a Jesus Cristo, minha esposa Shimenne Bueno
e minha filha Deborah Bueno, meus pilares de sustentação.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me colocar de pé todos os dias e permitir que essa conquista fosse alcançada;

À minha esposa Shimenne Bueno e minha filha Deborah Bueno que me motivam a ir em frente e não desistir;

Aos orientadores Prof. Dr. Gustavo Bodstein e Prof. Dr. Felipe Rachid pelo apoio, incentivo, inúmeros esclarecimentos e orientações ao longo do desenvolvimento de todo o trabalho;

À PETROBRAS/CENPES pela oportunidade e completo apoio na execução deste trabalho;

Aos funcionários da Secretaria Acadêmica do Programa de Engenharia Mecânica da COPPE, com especial ênfase à Vera Noronha que sempre esteve presente e disponível para resolver as diversas questões de natureza administrativo-acadêmicas que ocorreram ao longo do programa;

Aos alunos do Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica (LabMFA) do Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ por todo apoio na realização desse trabalho;

A toda a minha família, meus pais, meus irmãos e amigos que me incentivaram e viveram a expectativa dessa conquista.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM NUMÉRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM GASODUTOS COM PADRÃO ESTRATIFICADO

David Eduardo Galdino Pimenta Bueno

Dezembro/2013

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho tem por objetivo propor uma modelagem numérica para um modelo teórico de escoamentos bifásicos com padrão estratificado amplamente difundido na literatura. De igual modo, esse trabalho visa apresentar um código matemático com a modelagem implementada. Uma vez pronto, o código permitirá a simulação de diferentes cenários de operação de gasodutos bifásicos. O modelo é resolvido através do método numérico conhecido como *Flux Corrected Transport* (FCT). Para validação do modelo, e conseqüentemente do código matemático, casos são apresentados para a comparação dos resultados com resultados de dois outros códigos, um deles, um simulador comercial de escoamento em dutos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TWO-PHASE FLOW NUMERICAL MODEL IN GAS PIPELINES WITH
STRATIFIED-FLOW PATTERN

David Eduardo Galdino Pimenta Bueno

December/2013

Advisors: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Department: Mechanical Engineering

This work aims to propose a numerical model for a theoretical two-phase flow model with stratified pattern found at the Literature. Moreover, this work intends to present a code containing the proposed numerical model already implemented. So, the code will allow simulating different scenarios of a two-phase gas pipeline operation. The model is solved by a numerical method known as Flux Corrected Transport (FCT). In order to validate the presented model, and also the code, some cases are created to compare the results with another two codes, one of those a commercial simulator pipeline flow.

SUMÁRIO

SUMÁRIO.....	viii
1. Introdução.....	1
1.1 Gasodutos: Histórico e Classificação.....	1
1.2 Objetivos.....	6
2. Revisão Bibliográfica	8
2.1 Introdução	8
2.2 Classificação de Escoamentos Bifásicos	9
2.3 Modelagem para Escoamentos Bifásicos.....	13
2.3.1 Modelo de Equilíbrio Homogêneo (HEM).....	14
2.3.2 Modelo Drift-Flux (DFM)	16
2.3.3 Modelo de Dois Fluidos (TFM)	17
2.4 Equações genéricas de conservação	19
2.4.1 Geometria do duto e das fases	19
2.4.2 Frações volumétricas para as Fases	20
2.4.3 Equação de Conservação da Massa	21
2.4.4 Equação de Conservação da Quantidade de Movimento	21
2.4.5 Equações de Fechamento.....	22
2.5 Demais Trabalhos Relevantes.....	23
3. Escoamento Bifásico	24
3.1 SPM-4: Definições e Hipóteses Adotadas	25
3.1.1 Limitações	28
4. Método Numérico.....	29
4.1 Discretização do Termo de Fluxo Conservativo.....	31
4.2 Métodos numéricos conservativos.....	32
4.2.1 Lax-Friedrichs	32
4.2.2 Ritchmyer	33
4.2.3 FORCE	33
4.2.4 TVD Lax-Friedrichs	33
4.3 Flux Corrected Transport (FCT).....	34
4.4 Estabilidade dos Métodos Explícitos Conservativos	37
4.5 Discretização do Termo de Fluxo Não Conservativo	38
4.6 Condições de Contorno.....	39

5.	Resultados e Discussões	41
5.1	Código EMAPS	41
5.2	Código OLGA.....	42
5.3	Descrição dos Casos	43
5.3.1	Objetivo	43
5.3.2	Dados do Duto	44
5.3.3	Fluidos	45
5.3.4	Pressão e Fatores de Atrito	48
5.3.5	Regime Permanente	50
5.3.6	Condições de Contorno	50
5.4	Resultados	51
5.4.1	Caso 1	51
5.4.2	Caso 2	54
5.4.3	Caso 3	58
6.	Conclusões.....	60
6.1	Introdução	60
6.2	Principais Conclusões	61
6.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	61
7.	Referências Bibliográficas.....	63
	Apêndice 1 – Estudo de Caso: Validação do FCT	69
	1. Equacionamento	69
	2. Resultados e Discussões	72
	Apêndice 2 – Regime Permanente.....	74

1. Introdução

1.1 Gasodutos: Histórico e Classificação

Segundo classificação da ANP, duto é a designação genérica de instalação constituída por tubos ligados entre si, destinado à movimentação de petróleo e seus derivados (oleodutos), gás natural e outros gases (gasodutos). Quando um oleoduto é utilizado para transporte de diversos tipos de produtos ele também pode ser chamado de poliduto. Os dutos têm uma classificação em relação ao meio que atravessam, podendo ser classificados como dutos de Transporte ou de Transferência (TERZIAN, 2005).

Segundo TERZIAN (2005), a utilização de dutos como meio de transporte de líquidos é conhecida desde tempos remotos pelos egípcios, gregos, romanos, astecas e chineses. Mas, foi em 1865 que o primeiro oleoduto de transporte foi construído ligando um campo de produção a uma estação de carregamento de vagões, a uma distância de 8 km na Pensilvânia. Em 1930, teve início o transporte de produtos refinados entre Nova York e a cidade de Pittsburg. Ainda de acordo com TERZIAN (2005), a participação dutoviária iniciou-se no Brasil nos anos 40 e 50, evoluiu gradativamente nos anos 60, tendo apresentado importante incremento na década de 70 e início da década de 80. A primeira linha brasileira que se tem registro foi construída na Bahia, com diâmetro de 2" e 1 km de extensão, ligando a Refinaria de Aratu ao Porto de Santa Luzia, com início de operação em maio de 1942.

Contudo, apenas em 1975, o primeiro gasoduto interestadual (GASEB) entrou em operação, ligando os estados de Sergipe e Bahia, com 235 km e diâmetro de 14". Hoje, segundo a ANP (GASNET, 2013), existem mais de 50 gasodutos de transporte operando no Brasil (vide Figura 1.1).

Gasodutos de transporte em operação no Brasil											
Nome	Origem	Município	UF	Destino	Município	UF	Diâmetro (pol.)	Comprim. (km)	Capac. de vazão (m³/dia)	Início	Operador
GARSOL	Urucu	Coari	AM	Coari	Coari	AM	18	281	6,85 milhões	2009	Transpetro
GASCOM	Coari	Coari	AM	Manaus	Manaus	AM	20	382	6,85 milhões	2009	Transpetro
UTE Aparecida (Ramal)	ERP Iranduba-Km 634,5 (Coari-Manaus)	Iranduba	AM	PE Aparecida	Iranduba	AM	14	18	NI	2011	Transpetro
GNL PECÉM	Pier Pecém	S.Gonçalo Amarante	CE	Gasfor	S.Gonçalo Amarante	CE	20	19	7 milhões	2009	Transpetro
RAMAL TERMOFORTALEZA	Pecém	S.Gonçalo Amarante	CE	Termofortaleza	Caucaia	CE	10	2	1,54 milhão	2006	Transpetro
GASFOR	Guamaré	Guamaré	RN	Pecém	S.Gonçalo Amarante	CE	12 e 10	383	2 milhões	1999	Transpetro
GASMEL	Alto Rodrigues	Alto Rodrigues	RN	Serra do Mel	Serra do Mel	RN	24	31	2,74 milhões	2007	Transpetro
NORDESTÃO	Guamaré	Guamaré	RN	Cabo	Cabo	PE	12	424	1,9 milhão	1986	Transpetro
VARIANTE NORDESTÃO	Km 382 (Nordestão)	Recife	PE	Km 403 (Nordestão)	Jaboatão dos Guararapes	PE	12	33	2,72 milhões	2010	Transpetro
RAMAL TERMOPERNAMBUCO	Ipojuca	Ipojuca	PE	Ipojuca	Ipojuca	PE	16	12	2,8 milhões	2006	Transpetro
SANTA RITA-SÃO MIGUEL DE TAIPU	Santa Rita	Santa Rita	PB	São Miguel de Taipu	São Miguel de Taipu	PB	8	25	450 mil	2005	Transpetro
GASALP	Pilar	Pilar	AL	Cabo	Cabo	PE	12	204	2,6 milhões	2006	Transpetro
PILAR - IPOJUCA	Pilar	Pilar	AL	Porto de Suape	Ipojuca	PE	24	190	15 milhões	2010	Transpetro
CANDEIAS-ARATU	UPGN-S Candeias	Candeias	BA	Aratu	Aratu	BA	12	22	1,7 milhão	1970	Transpetro
CANDEIAS-CAMAÇARI	UPGN Candeias	Candeias	BA	Camaçari	Camaçari	BA	12	37	1,5 milhão	1981	Transpetro
CANDEIAS-CAMAÇARI	UPGN-S Candeias	Candeias	BA	Camaçari	Camaçari	BA	14	37	3,2 milhões	2003	Transpetro
SANTIAGO-CAMAÇARI	UPGN Santiago	Pojuca	BA	Camaçari	Camaçari	BA	14	32	1,5 milhão	1975	Transpetro
SANTIAGO-CAMAÇARI	UPGN Santiago	Pojuca	BA	Camaçari	Camaçari	BA	18	32	2,9 milhões	1992	Transpetro
CATU-ITAPORANGA	Catu	Catu	BA	Itaporanga	Itaporanga	SE	26	198	12 milhões	2007	Transpetro
ITAPORANGA-CARMÓPOLIS	Itaporanga	Itaporanga	SE	Carmópolis	Carmópolis	SE	26	65	12 milhões	2007	Transpetro
CARMÓPOLIS-PILAR	Carmópolis	Carmópolis	SE	Pilar	Pilar	AL	26	175	10 milhões	2007	Transpetro
ATALAIA-ITAPORANGA	Atalaia	Aracaju	SE	Itaporanga	Itaporanga	SE	14	29	2 milhões	2007	Transpetro
GASEB	Atalaia	Atalaia	SE	Catu	Pojuca	BA	14	230	543 milhões	1974	Transpetro
FAFEN II - (FAFEN-SERGÁS)	Riachuelo	Riachuelo	SE	Fafen/SE	Laranjeiras	SE	8	23	1,8 milhão	2009	Transpetro
GASCAC	Cacimbas	Linhares	ES	Catu	Catu	BA	28	954	20 milhões	2010	Transpetro
CACIMBAS VITÓRIA	Cacimbas	Linhares	ES	Vitória	Vitória	ES	26 e 16	117	20 milhões	2007	Transpetro
GASVIT	Serra	Serra	ES	Viana	Viana	ES	8	43	NI	1996	Transpetro
LAGOA PARDA-VITÓRIA	Lagoa Parda	Linhares	ES	Vitória	Vitória	ES	8	100	1 milhão	1983	Transpetro
GASCAV-UTG-SUL CAPIXABA	XV-41-Km 220,46 (GASCAV)	Anchieta	ES	PE Anchieta	Anchieta	ES	10	9	2 milhões	2010	Transpetro

GASCAV	Cabiúnas	Macaé	RJ	Vitória	Vitória	ES	28	302	20 milhões	2008	Transpetro
GASDUC II	Tecab	Macaé	RJ	Reduc	Duque de Caxias	RJ	20	182	NI	1996	Transpetro
GASDUC III	Tecab	Macaé	RJ	Anel Campos Elíseos	Duque de Caxias	RJ	38	183	40 milhões	2010	Transpetro
GNL-BGB	Pier de GNL	Rio de Janeiro	RJ	Anel Reduc	Duque de Caxias	RJ	28	16	20 milhões	2009	Transpetro
RAMAL CAMPOS ELÍSEOS	Anel Reduc	Duque de Caxias	RJ	Anel Campos Elíseos	Duque de Caxias	RJ	20	2	14,7 milhões	2009	Transpetro
GASBEL	Reduc	Duque de Caxias	RJ	Regap	Betim	MG	16	357	NI	1996	Transpetro
GASBEL II	Tevol	Volta Redonda	RJ	São Brás do Suaçuí	São Brás do Suaçuí	MG	18	267	5 milhões	2010	Transpetro
GASPAL	Esvol	Volta Redonda	RJ	Recap	Capuava	SP	22	325	NI	1988	Transpetro
GASJAP	Japeri	Japeri	RJ	Reduc	Duque de Caxias	RJ	28	45,3	25,3 milhões	2009	Transpetro
GASVOL	Reduc	Duque de Caxias	RJ	Esvol	Volta Redonda	RJ	18	95	NI	1986	Transpetro
GASCAB I	Barra do Furado	Macaé	RJ	Tecab	Macaé	RJ	18	67	NI	1982	Transpetro
GASCAB II	Barra do Furado	Macaé	RJ	Tecab	Macaé	RJ	20	67	NI	2002	Transpetro
GASCAB III	Barra do Furado	Macaé	RJ	Tecab	Macaé	RJ	22	67	NI	2002	Transpetro
GASVOL	Esvol	Volta Redonda	RJ	Tevol	Volta Redonda	RJ	14	6	NI	1986	Transpetro
GASPAJ	Replan	Paulínia	SP	Jacutinga	Jacutinga	MG	14	80	1,25 milhão	2010	Transpetro
GASAN	Recap	Capuava	SP	RPBC	Cubatão	SP	12	42	NI	1993	Transpetro
GASCAR	Campinas	Campinas	SP	Japeri	Japeri	RJ	28	453	5,8 milhões	2007	Transpetro
MERLUZÃO	PTF Merluza	Praia Grande	SP	RPBC	Cubatão	SP	16	29	NI	1992	Transpetro
GASTAU	UTGCA	Caraguatatuba	SP	Taubaté	Taubaté	SP	28	67	20 milhões	2010	Transpetro
GASBOL TRECHO SUL	Campinas	Campinas	SP	Porto Alegre	Porto Alegre	RS	24 a 16	1190	12,5 milhões	2000	TBG
GASBOL PAULÍNIA-GARAREMA	Paulínia	Paulínia	SP	Guararema	Guararema	SP	24	153	9,3 milhões	1999	TBG
GASBOL TRECHO NORTE	Corumbá	Corumbá	MS	Replan	Paulínia	SP	32	1264	30 milhões	1999	TBG
GASPAL II	Terminal de Guararema	Guararema	SP	ECGM	Mauá	SP	22	55	12 milhões	2011	Transpetro
GASAN II	ECGM	Mauá	SP	ESB	S. Bernardo do Campo	SP	12 e 22	38	7,1 milhões	2011	Transpetro
URUGUAIANA-PORTO ALEGRE (TRECHO I)	Leito do Rio Uruguai	Divisa Brasil-Argentina	RS	Uruguaiana	Uruguaiana	RS	24	25	15 milhões	2000	TSB
URUGUAIANA-PORTO ALEGRE (TRECHO III)	Copesul	Triunfo	RS	Refap	Canoas	RS	24	25	12,2 milhões	2000	TSB
LATERAL CUIABÁ	San Matias	San Matias	Bolívia	Cuiabá	Cuiabá	MT	18	283	2,8 milhões	2001	Gasocidente

Fonte: Transportadoras / ANP/ Revista Brasil Energia - set / 2012

Figura 1.1 – Gasodutos de Transporte em Operação no Brasil (GASNET, 2013)

Na maioria desses gasodutos, uma abordagem bifásica é mais recomendada visto que, devido a parâmetros de operação, distância do duto e outros, o gás que escoar pelo gasoduto pode apresentar condensados. Outros tipos de dutos que também são considerados como apresentando um escoamento bifásico são os *risers*.

Risers, são dutos, flexíveis ou rígidos, que transportam os fluidos resultantes do processo de produção (óleo, gás, água) desde o poço de petróleo no fundo do mar até a plataforma de produção na superfície.

Segundo SILVA (2006), a produção de petróleo em um poço está geralmente associada ao escoamento bifásico uma vez que as frações mais leves de hidrocarbonetos são liberadas da fase líquida à medida que a pressão do reservatório diminui e atinge a pressão de bolha, ou à medida que o óleo escoar e perde pressão ao longo de seu escoamento através do poço. Isto pode ser ainda mais complicado, considerando que o escoamento pode também conter água e areia.

A ANP, através da Lei 11.909/09, de 29 de novembro de 2011, estabelece três definições de gasodutos: Gasoduto de Transferência, Gasoduto de Escoamento da Produção e Gasoduto de Transporte.

Gasoduto de Transferência é o gasoduto destinado à movimentação de gás natural, considerado de interesse específico e exclusivo de seu proprietário, iniciando e terminando em suas próprias instalações de produção, coleta, transferência, estocagem e processamento de gás natural. São gasodutos de menor porte.

Gasoduto de Escoamento da Produção são dutos integrantes das instalações de produção, destinados à movimentação de gás natural desde os poços produtores até instalações de processamento e tratamento ou unidades de liquefação. *Risers* estão incluídos nessa classificação.

Finalmente, Gasoduto de Transporte se define por gasoduto que realiza movimentação de gás natural desde instalações de processamento, estocagem ou outros gasodutos de transporte até instalações de estocagem, outros gasodutos de transporte e pontos de entrega a concessionários estaduais de distribuição de gás natural. Estão inseridos nessa classificação os gasodutos apresentados na Figura 1.1.

Por sua vez, a operação de gasodutos automatizada se deu por volta da segunda metade da década de 1980, com a difusão do uso de microcomputadores, bem como, a capacidade de comunicação entre instrumentos instalados no campo e tais computadores. No início da década de noventa, os primeiros sistemas supervisórios de dutos começaram a ser implantados no Brasil cuja função principal, qual seja, operar remotamente o duto.

Uma vez que os dutos são operados de maneira automatizada e remota, começam a aparecer as primeiras funções avançadas em tempo real para a gestão operacional e logística de dutos, tais como sistema de detecção, localização e quantificação de vazamentos, acompanhamentos de inventários, de diferentes bateladas de líquidos, de posições de pigs, de concentração de gases em gasodutos, otimizações diversas como de uso de compressores em gasodutos, dentre outras. Para gasodutos bifásicos, segundo FIGUEIREDO (2010), esse processo se deu na primeira década dos anos 2000. As principais dificuldades para tal surgimento podem ser listadas como sendo: (i) a necessidade de instrumentação de medição de ambas as fases presentes no gasoduto; (ii) a dificuldade de modelagem de escoamento em duas fases, para o correto funcionamento das funções avançadas de tempo real; e (iii) o tempo computacional requerido para executar simuladores comerciais e acadêmicos de tempo real que usam as modelagens de escoamento bifásico.

Este trabalho abordou a segunda dificuldade listada, procurando implementar uma modelagem numérica para um modelo teórico de escoamento bifásico existente, bem como desenvolver um algoritmo computacional simples, eficiente e em código aberto para o cálculo de um dado escoamento bifásico.

1.2 Objetivos

Como citado, este trabalho tem por objetivo propor uma solução numérica para um modelo teórico de escoamentos bifásicos amplamente difundido na literatura (OMGBA-ESSAMA, 2004; MASELLA *et al.*, 1998; CARNEIRO *et al.*, 2011, entre outros). De igual modo, apresentar um código aberto em linguagem *FORTRAN* com a modelagem implementada, de maneira a permitir futuramente, em outros trabalhos, o desenvolvimento de outros módulos. Esses módulos podem contemplar, por exemplo, funções avançadas de tempo real, como detecção de vazamentos e acompanhamento de *pigs*.

O escoamento bifásico no interior de um gasoduto é apresentado com uma fase predominantemente gasosa, modelado com base no modelo de dois fluidos, em abordagem unidimensional, isotérmica e transiente, com fase gasosa compressível. Um simulador comercial numérico de escoamento bifásico em dutos (OLGA) e um outro código computacional desenvolvido pelo grupo de computação e matemática aplicada da Universidade de Cranfield, sob o projeto multicliente TMF (*Transient Multiphase Flow*), do qual a PETROBRAS faz parte, também são usados para comparar e validar os resultados obtidos das modelagens acima descritas.

A modelagem escolhida, como dito, tem como base o modelo de dois fluidos, qual seja o SPM-4 (*Single Pressure Model*), que pressupõe a existência de uma única pressão para as fases gás e líquida, e é composto por quatro equações diferenciais,

sendo duas para a conservação de massa e duas para a conservação de quantidade de movimento, uma para cada fase (gás e líquido). Segundo BAPTISTA (2013), o modelo SPM-4 emprega uma modelagem transiente e trata a simulação em regime permanente como um transiente normal de acomodação das condições de contorno às condições iniciais, onde nenhuma alteração é introduzida a menos de permitir que o próprio passo de tempo avance. O modelo SPM-4 é resolvido utilizando o método *Flux Corrected Transport* (FCT), apresentado por BORIS e BOOK (1975).

É importante salientar que, embora trabalhos anteriores tenham apresentado a modelagem proposta, esse trabalho apresenta um código matemático que permite a troca do modelo de dois fluidos apresentado por outro semelhante, bem como das equações constitutivas escolhidas facilmente. Isso permite a elaboração de uma gama de futuros trabalhos relacionados à simulação de escoamento em gasodutos bifásicos.

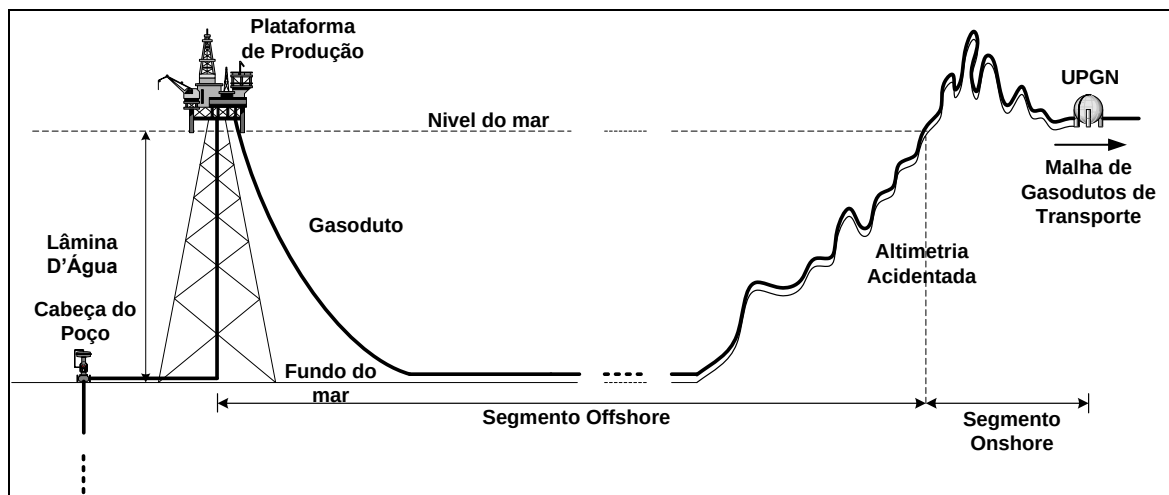


Figura 1.2 – Exemplo de um Gasoduto.

2. Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

O termo escoamento multifásico aplica-se quando mais de uma fase está presente e escoando simultaneamente. Por definição, fase subentende-se como sendo uma região do espaço delimitada por uma interface que limita em seu interior um material com composição química homogênea, propriedades de transporte e de estado definíveis. O termo fase frequentemente é usado como sinônimo do estado da matéria: gás, líquido ou sólido. Essa ambiguidade do uso do termo fase pode causar uma insegurança no emprego do termo multifásico uma vez que nem sempre o número de estados da matéria corresponde ao número de fases de uma mistura de materiais (ROSA, 2012).

O estudo de escoamentos multifásicos é algo extremamente difícil, dado a complexidade do problema analisado. A quantidade de informação necessária para realizar uma análise é grande, existe o dobro de variáveis requeridas pelo escoamento monofásico, uma quantidade superior de equações constitutivas para o fechamento do conjunto de equações e um maior conhecimento da viscosidade e densidade das fases, além das vazões mássicas das fases. Além disso, um escoamento bifásico pode mudar seu padrão de escoamento, mudando a natureza do problema abordado. Assim, todos esses aspectos tornam a análise desses escoamentos bem mais complicada, comparada com aquela realizada com escoamentos monofásicos.

Devido à grande dificuldade na compreensão da sua modelagem, o estudo de escoamentos bifásicos teve um avanço mais lento quando comparado com o estudo de escoamentos monofásicos, sendo esse encontrado largamente descrito na literatura.

Contudo, escoamentos bifásicos começaram a ser estudados recentemente, principalmente porque a criação de sistemas numéricos e computacionais permitiu a realização de simulações em que duas ou mais fases ocorrem simultaneamente. ROSA (2012) relata que estudos envolvendo escoamentos bifásicos tiveram início no começo do século XX e que, somente na década de 1940, surgiram as primeiras abordagens para modelar escoamentos bifásicos utilizando processos de médias. No entanto, este mesmo autor cita que esta metodologia só foi formalizada nas décadas de 1960 e 1970, conhecida hoje por modelo de dois fluidos e modelo de mistura.

2.2 Classificação de Escoamentos Bifásicos

Escoamentos bifásicos podem ser classificados de muitas formas, dependendo do critério que cada autor utiliza. Os fenômenos físicos, tais como os padrões de escoamento, interações entre as fases e modelagem matemática desses fenômenos para escoamento bifásico são avaliados conforme a visão e a priorização específica de cada autor.

Uma maneira de classificar esses escoamentos se dá através dos padrões de escoamentos de fluidos bifásicos. Segundo ISHII e HIBIKI (2006), a classificação dos padrões de escoamento é baseada na geometria da interface entre as fases, ou seja, cada padrão de escoamento é caracterizado por dois fluidos escoando simultaneamente em um duto e pela geometria de suas interfaces. O escoamento bifásico de óleo e gás pode ter então diversas classificações como, por exemplo, as classificações de padrões apresentadas por SHAHA (1999) e ISHII e HIBIKI (2006).

Para dutos horizontais ou quase horizontais (onde o duto tem uma inclinação formando um pequeno ângulo com a horizontal), tem-se a classificação conforme SHAHA (1999), o qual define uma classificação em quatro padrões principais, quais

sejam: bolhas, golfadas, estratificado e anular. Os outros padrões são apenas variações ou combinações destes principais, citados em artigos clássicos, como o de TAITEL e DUKLER (1976), referência clássica nesse assunto, e são ilustrados para escoamento horizontal (SHAHA, 1999) conforme a Figura 1.

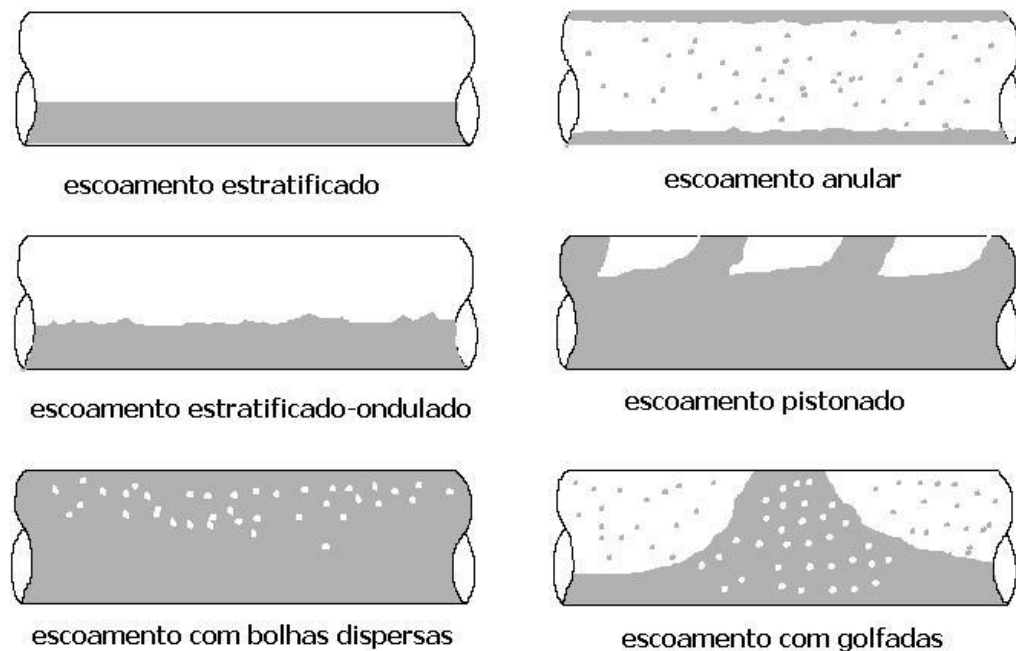


Figura 2.1 – Escoamento bifásico horizontal classificado por SHAHA (1999).

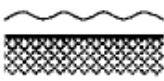
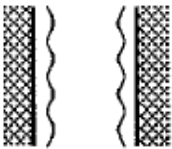
ISHII e HIBIKI (2006) também propõem uma classificação mais detalhada, dividindo o escoamento em classes e, ainda, subdividindo essas classes em padrões. As classes, em número de três, são chamadas de escoamento separado, escoamento de mistura ou transitório e escoamento disperso. Já os padrões representam as diferentes geometrias de interfaces. Este tipo de classificação está mais bem detalhado na tabela 1.

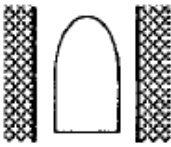
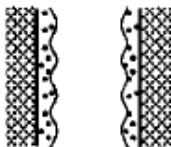
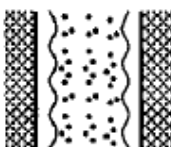
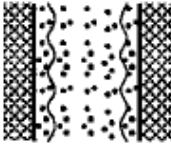
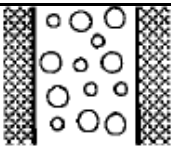
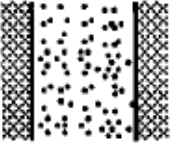
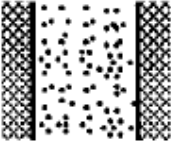
Existe um consenso na identificação de três padrões básicos para escoamentos gás-líquido aplicados para dutos verticais e inclinados, sejam eles: disperso, estratificados ou fases separadas e intermitentes (ROSA, 2012).

ROSA (2012) considera ainda que a forma da interface é outro assunto complexo de ser tratado. A interface plana ocorre para baixas velocidades de gás. À medida que a velocidade de gás aumenta, começam a surgir ondas bidimensionais seguidas por ondas tridimensionais na interface. A forma da interface deixa de ser plana e ondas passam a ascender às paredes do duto, aumentando o perímetro interfacial.

Esse mesmo autor apresentou, devido a complexidade da interface, uma caracterização experimental da interface e uma determinação do fator de atrito interfacial em escoamentos estratificados horizontais, mostrando a influência do aumento da velocidade do gás na forma da interface.

Tabela 2.1 – Escoamento bifásico classificado por ISHII e HIBIKI (2006).

Classe	Padrão	Geometria	Configuração	Exemplos
Escoamento Separado	Escoamento em Película		Película de líquido em gás. Película de gás em líquido.	Condensação em película. Ebulição em película.
	Escoamento Anular		Película de gás e núcleo líquido. Película de líquido e núcleo gás.	Ebulição em película. Aquecedores de água.
	Escoamento em Jato		Jato de líquido em gás. Jato de gás em líquido.	Atomização. Jato condensador.

Escoamento Misturado ou Transitório	Escoamento com Golfadas		Onda de gás em líquido.	Ebulição de sódio em convecção forçada.
	Escoamento Anular com Bolhas		Película de líquido com bolhas de gás e núcleo gás.	Evaporadores com ebulição nucleada em parede.
	Escoamento Anular Goticulado		Película de líquido e núcleo gás com gotas de líquido.	Gerador de vapor.
	Escoamento Anular Goticulado com Bolhas		Película de líquido com bolhas de gás coberto por gotas de gás.	Ebulição em canal de reator nuclear.
Escoamento Disperso	Escoamento com Bolhas		Bolhas de gás no líquido.	Reator químico.
	Escoamento Goticulado		Gotas de líquido no gás.	Resfriamento por borrifada.
	Escoamento com Partículas		Partículas sólidas em gás ou líquido.	Transporte de pó.

2.3 Modelagem para Escoamentos Bifásicos

Como a modelagem para escoamento bifásico compreende setores distintos do conhecimento, o desenvolvimento de algoritmos para cada um deles requer abordagens específicas. Porém, ao considerar a complexidade da descrição do comportamento de uma partícula de fluido à medida que ela flui através de uma região no espaço, não só é difícil segui-la, como também sua forma não pode ser determinada, pois ela (com suas propriedades) pode variar continuamente. Portanto, é mais vantajoso descrever o que acontece num ponto fixo ou numa região fixa do espaço. Este método é chamado de método Euleriano, e permite observar fenômenos em pontos de interesse, em vez de tentar seguir uma partícula através de uma região do espaço.

A modelagem Euleriana do escoamento bifásico em dutos pode ser encontrada na literatura com diversas formulações. Usando a classificação sugerida por FABRE e PERESSON (1989), existem três modelos disponíveis:

Modelo de Equilíbrio Homogêneo / Homogeneous Equilibrium Model (HEM)

Modelo Drift-Flux / Drift-Flux Model (DFM)

Modelo de Dois Fluidos / Two-Fluid Model (TFM)

Esses modelos serão descritos a seguir, nas seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, respectivamente.

Os modelos de escoamento para dois fluidos são usualmente desenvolvidos a partir de diferentes metodologias de definições de propriedades médias de elementos do escoamento. Essas médias podem se dar no tempo, no espaço assim como através do uso de médias amostrais.

Diferentes referências demonstram isso, tais como ISHII (1975), YADIGAROGLOU e LAHEY (1976), DREW (1983), LAHEY JR. e DREW (1988), DREW e PASSMAN (1999) e FABRE *et al.* (1989).

Para escoamentos isotérmicos em um duto com diâmetro interno constante, pode-se usar a média temporal empregada em BONIZZI *et al.* (2009) e CHAN e BANERJEE (1981), ou a média amostral aplicada a um conjunto de dados tal como realizada por YEOH e TU (2010), PAREDES *et al.* (2007) e PARK *et al.* (1998), para se obter o mesmo conjunto unidimensional de equações de conservação. As variações se dão nas diferentes equações constitutivas empregadas para o fechamento dos balanços, nos vários modelos específicos encontrados na literatura.

2.3.1 Modelo de Equilíbrio Homogêneo (HEM)

Para escoamento bifásico, o modelo de Equilíbrio Homogêneo é aquele que possui a formulação mais simples. Sua principal característica é supor que a velocidade, a pressão e a temperatura das duas fases e da interface são iguais. Esta hipótese se baseia na suposição de que as diferenças dessas variáveis entre as fases promovem a troca de massa, quantidade de movimento e energia rápidos o suficiente para que o equilíbrio termodinâmico seja atingido.

Uma das aplicações deste modelo é o caso em que o atrito entre as fases é um fator importante do escoamento. Nestes escoamentos, as fases estão acopladas e, portanto, suas velocidades estão muito próximas, podendo ser consideradas iguais. Podem-se citar como exemplo os casos em que uma fase encontra-se finamente dispersa em outra, como no escoamento de bolhas de ar (ou vapor) em água.

A formulação obedece a uma modelagem monofásica para as equações de balanço de massa, quantidade de movimento e energia, considerando ambas as fases como uma mistura. Neste caso, as propriedades físicas serão muito próximas as da fase predominante, pois considera uma pequena contribuição da outra fase. Além disso, o modelo de Equilíbrio Homogêneo utiliza, quando necessário, um termo fonte

correspondente. As propriedades desta mistura são determinadas através de equações de estado específicas (PENG-ROBINSON, 1976; e SOAVE, 1972). O termo fonte pode ser adotado de acordo com CORRADINI (1997). Há ainda o modelo de Equilíbrio Homogêneo modificado, onde sua formulação é desenvolvida de tal forma como no modelo *Drift-Flux* (Seção 2.3.2). Isso significa que é necessária apenas uma equação de quantidade de movimento, mas deve-se incluir um termo para expressar a diferença entre as velocidades.

Por se tratar de um modelo simples, há algumas imprecisões intrínsecas no modelo de Equilíbrio Homogêneo, como, por exemplo, na estimativa de propriedades de transporte como a viscosidade e a condutividade térmica. Algumas simplificações podem ser utilizadas, como usar os dados de viscosidade e condutividade térmica da fase predominante.

Dentre as várias aplicações de engenharia, o modelo de Equilíbrio Homogêneo pode ser classificado de várias formas. Uma delas é o modelo para escoamento isotérmico, cuja característica principal é cada fase ter sua equação da continuidade, e uma equação de quantidade de movimento para a mistura. Para essa discussão, o trabalho recente de GARG *et al.* (2009), bem com os trabalhos de MORI *et al.* (1976) e SHARMA *et al.* (1985) podem ser citados. Foram encontradas algumas críticas a este modelo em MANNINEN e TAIIVASSALO (1996). Conforme dito, este é um modelo limitado e, para ser usado, deve-se verificar sua validade para o caso a ser estudado. É determinante validar o equilíbrio termodinâmico com informações de prática ou de teorias bem conceituadas.

2.3.2 Modelo Drift-Flux (DFM)

Como no modelo de Equilíbrio Homogêneo, o modelo Drift-Flux utiliza a mesma pressão e temperatura para as duas fases e para a interface, mas as velocidades são distintas para cada fase. O principal fator responsável pela diferença de velocidade entre as fases se deve às forças de corpo, com a força da gravidade e a força centrífuga. O equilíbrio termodinâmico continua sendo estabelecido através de processos suficientemente rápidos, como já explicados. A relaxação da hipótese de velocidades iguais entre as fases, utilizada no modelo de Equilíbrio Homogêneo, se torna mais importante quando a diferença entre as massas específicas de cada fase é muito grande na presença de campos gravitacionais e gradientes de pressão não desprezíveis. Dada uma diferença de massa específica, efeitos de empuxo tendem a introduzir uma diferença de velocidade da fase dispersa em relação à fase contínua.

Nesta formulação, é necessária apenas uma equação de quantidade de movimento, que deve conter um termo para representar a diferença de velocidade das fases. Várias nomenclaturas são utilizadas na literatura, tais como *Drift Flux Model*, de MASELLA *et al.* (1998), e *Local Equilibrium Model*, de JOHANSEN *et al.* (1990). A nomenclatura mais empregada nos trabalhos desenvolvidos nos últimos anos é *Drift Flux Model* e, por essa razão, também foi escolhida neste trabalho. Como ainda não há em português um termo padrão para o modelo, usa-se na forma original. Este modelo também tem suas limitações, e é sempre importante verificar sua validade para o caso a ser estudado. É necessário também validar a hipótese de equilíbrio termodinâmico com informações de aplicações práticas, experimentos ou teorias bem conceituadas. A formulação do modelo *Drift Flux* foi explorada em muitos trabalhos como os de PAUCHON *et al.* (1993), MASELLA *et al.* (1998) e FAILLE e HEINTZE (1999).

Dentro do modelo *Drift Flux* as velocidades de cada fase são determinadas através das equações constitutivas correspondentes ao caso a ser estudado. Neste modelo as fases devem estar acopladas de forma que a mistura formada pelo escoamento contenha partículas de líquido e não partículas de gás (caso mais bem resolvido através do modelo de Equilíbrio Homogêneo).

Para um caso específico de escoamento isotérmico, os modelos de Equilíbrio Homogêneo e *Drift Flux* possuem formulações com pequenas diferenças entre si. Como no modelo *Drift Flux* as velocidades para cada fase são diferentes, têm-se duas equações de balanço de massa. Comparado com o modelo de Equilíbrio Homogêneo, o modelo *Drift Flux* é mais complexo, ou seja, as velocidades relativas das fases são calculadas através de uma formulação de balanço de forças para a fase dispersa, ou através de uma correlação algébrica.

2.3.3 Modelo de Dois Fluidos (TFM)

Esta é a forma mais complexa de formular um problema de escoamento bifásico, uma vez que as fases são identificadas e tratadas de forma totalmente independente. Cada fase tem sua equação de balanço de massa, quantidade de movimento e energia. Assim, as variáveis de velocidade, pressão e temperatura são distintas (pressão e temperatura não eram distintas nos modelos anteriores). Como no modelo *Drift Flux*, as velocidades são determinadas através da relação entre as massas específicas de cada fase.

O tempo relativo de transferência de calor entre as fases na interface, necessário para atingir o equilíbrio termodinâmico, é o que determina as temperaturas de cada fase. O conhecimento desse tempo relativo é importante para que se perceba as variações de vazão devidas a mudanças de área de seção transversal (diâmetro), tanto em regime

permanente como transiente. CORRADINI (1997) calculou esse tempo considerando as condições de vazão prescritas, necessárias para se determinar um número de Fourier característico para o sistema. Para o modelo bifásico, quando uma equação de energia para cada fase é utilizada, pode-se determinar a temperatura relativa entre as fases onde o caso de desequilíbrio termodinâmico for detectado.

Para o estado de desequilíbrio termodinâmico, a formulação do modelo para pressão foi considerada mais complexo por ISHII e HIBIKI (2006). Na maioria das aplicações de engenharia, a variação de pressão em uma interface é diretamente proporcional à tensão superficial e inversamente proporcional ao raio de curvatura da interface. Este fator é, em geral, pequeno, exceto em escoamentos de gotas em gás ou bolhas em líquido. A diferença de pressão entre as fases pode também ocorrer por motivos relacionados a efeitos dinâmicos, onde a pressão relativa em uma fase é alta, por exemplo. É possível também se detectar uma diferença de pressão relativa entre as fases quando há um grande fluxo de massa na interface devido à mudança de fase (evaporação ou condensação). Esses são os principais métodos para determinar as diferenças de pressão nas fases.

Na maioria das aplicações do modelo de Dois Fluidos, o desequilíbrio termodinâmico só é considerado quando ocorrem em uma escala de tempo semelhante às escalas de tempo associadas às taxas de mudança de fase e às oscilações de pressão. Para casos onde a velocidade do escoamento excede ou iguala a velocidade do som, o desequilíbrio é importante para determinar a diferença de pressão entre as fases.

As formulações dos modelos bifásicos são constituídas no mínimo por equações de balanço de massa e quantidade de movimento para cada uma das fases separadamente, e também relações constitutivas e coeficientes de transporte interfacial definido para cada caso. Essa formulação considera as interações entre as fases ao

utilizar um campo de velocidade e uma equação de quantidade de movimento independente para cada fase. A desvantagem desse modelo é necessitar de dados experimentais confiáveis em várias situações para formular detalhadamente as interações interfaciais, mas é vantajoso por definir rigorosamente o real processo de transporte.

O modelo deverá ser aplicado em casos onde as fases estão pouco acopladas, isto é, as ondas de pressão se propagam com velocidades relativamente diferentes entre elas. Como as equações de quantidade de movimento das fases quantificam as instabilidades e a dinâmica das interfaces, e esses são os principais fatores que determinam os padrões de escoamento, conclui-se que, para os casos de fenômenos ondulatórios e para definir padrões de escoamento, esse modelo é o mais indicado, pois os outros dois (modelo de Equilíbrio Homogêneo e *Drift Flux*) são considerados mais simples.

2.4 Equações genéricas de conservação

São descritas abaixo as equações genéricas de conservação para as fases, além da definição da geometria, de algumas conceituações básicas e hipóteses simplificadoras.

2.4.1 Geometria do duto e das fases

Considere um duto de seção transversal circular de diâmetro D_i , inclinado de um ângulo β (entre a linha do escoamento e a horizontal), conforme mostra a Figura 2.3 bem como Figura 2.2 a seguir.

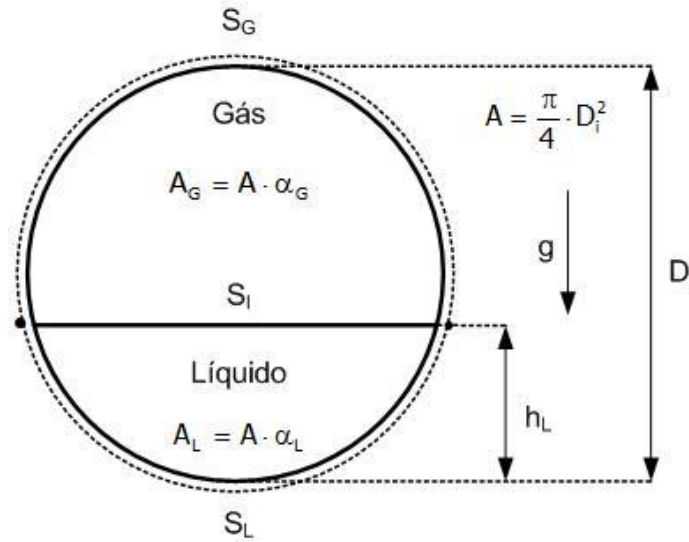


Figura 2.2 – Seção transversal do escoamento

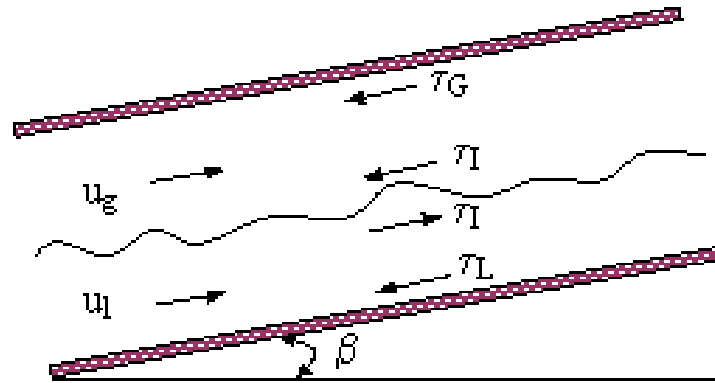


Figura 2.3 – Perfil lateral de escoamento estratificado

2.4.2 Frações volumétricas para as Fases

Considere as definições das frações volumétricas de líquido e de gás como:

$$\alpha_L = \frac{V_L}{V_L + V_G} \quad (2.1)$$

$$\alpha_G = \frac{V_G}{V_L + V_G} \quad (2.2)$$

onde V_L e V_G são respectivamente os volumes ocupados pela fase gás e líquida. Assim, tem-se:

$$\alpha_G + \alpha_L = 1 \quad (2.3)$$

Para tornar genérica a referência às fases, define-se o subscrito k , onde k pode assumir os valores L ou G . Observa-se por oportuno que em algumas referências, tipicamente de indústria, esta fração leva o nome de *holdup*. Se a referência for genérica, i.e., não amarrar a fase e citar apenas genericamente o termo *holdup*, a referência é sempre para a fase líquida.

2.4.3 Equação de Conservação da Massa

Numa modelagem unidimensional transiente bifásico tem-se a seguinte equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \alpha_k) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho_k \alpha_k u_k) = \Gamma_k \quad (2.4)$$

onde k define a fase considerada, α_k a fração volumétrica da fase k , u_k a velocidade da fase k e Γ_k a taxa de transferência da massa entre as fases por unidade de volume.

2.4.4 Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Analogamente, tem-se a seguinte equação de momentum que descreve o modelo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \alpha_k u_k) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho_k \alpha_k u_k^2) = & -\alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial X} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}[\alpha_k (\tau_k + \tau_k^T)] \\ & + M_{ki} + M_{kw} + \Gamma_k u_{ki} - \rho_k \alpha_k g \sin \beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde M_{kw} é a contribuição de quantidade de movimento linear referente ao atrito entre cada fase e a parede do duto, τ_k é o tensor tensão, τ_k^T é o tensor tensão turbulento, M_{ki} é a contribuição de quantidade de movimento linear referente ao atrito na interface entre as fases, o produto $\Gamma_k u_{ki}$ descreve a troca de quantidade de movimento entre as fases

devido à transferência de massa dada pelo termo Γ_k e a última parcela da Eq. (3.9) considera a componente de força devido à gravidade.

A pressão termodinâmica em cada fase é denotada por p_k , ao passo que a grandeza Δp_{ki} descreve a variação de pressão na fase k , i.e., a diferença entre pressão termodinâmica na fase p_k e a pressão na interface entre as fases, p_{ki} . Observa-se por oportuno que, numa modelagem mais rigorosa, onde se considera os efeitos de tensão superficial, podem-se ter diferentes pressões interfaciais por fase.

As tensões τ_k e τ_k^T referem-se às tensões viscosas e às tensões turbulentas de Reynolds na fase k , respectivamente.

2.4.5 Equações de Fechamento

Considere as equações de fechamento a seguir para o modelo proposto:

$$\sum_k \alpha_k = 1 \quad (2.6)$$

$$\sum_k \Gamma_k = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_k M_{ki} - \Gamma_k u_{ki} = 0 \quad (2.8)$$

onde na primeira equação, o somatório das frações volumétricas de cada fase é unitário. Nas duas equações seguintes, tem-se a condição de salto na interface de fase para a massa e quantidade de movimento, respectivamente.

Tal modelo é composto por 22 (vinte e duas) variáveis e apenas 7 (sete) equações.

Considerando que os efeitos de difusão viscosa molecular e turbulenta são desprezíveis, e que não há transferência de massa entre as fases, pode-se desprezar as grandezas τ_k , τ_k^T , Γ_k .

O modelo simplificado passa então a apresentar 14 (catorze) variáveis e 6 (seis) equações. As 14 (catorze) variáveis são: ρ_L , ρ_G , α_L , α_G , u_L , u_G , p_L , p_G , Δp_{Li} , Δp_{Gi} , M_{Lw} , M_{Gw} , M_{Li} , M_{Gi} .

2.5 Demais Trabalhos Relevantes

Dentre os trabalhos realizados recentemente com escoamentos bifásicos, cita-se o realizado por FIGUEIREDO (2010) aonde foram realizadas simulações em escoamentos bifásicos fazendo uso dos códigos EMAPS e OLGA. De acordo com a autora, o simulador OLGA, muito utilizado pela indústria de petróleo, mostrou-se mais eficiente, com tempos de CPU bem inferiores em relação ao código EMAPS, porque o OLGA utiliza um código paralelizado, enquanto o EMAPS não.

Ainda sobre escoamentos bifásicos, FIGUEIREDO *et al.* (2012), fazendo uso do código EMAPS, utilizando o método *Flux Corrected Transport* (FCT), proposto por BORIS e BOOK (1975), avaliaram a sua acurácia no espaço e no tempo, pelo método de diferenças finitas. O método FCT é utilizado para resolver o modelo de dois fluidos com quatro equações, pressão única entre as fases, sob as hipóteses de escoamento unidimensional com fase gasosa compressível, que ocorre em tubulações horizontais caracterizadas pelo padrão de escoamento estratificado. Neste trabalho os autores mostraram que o método é de primeira ordem no tempo e de segunda ordem no espaço, tendo consequências importantes na escolha da malha para uma dada acurácia.

3. Escoamento Bifásico

Segundo FIGUEIREDO (2010), os modelos de escoamento para dois fluidos são usualmente desenvolvidos a partir de diferentes metodologias de definição de propriedades médias de acordo com os trabalhos de ISHII (1975), YADIGAROGLOU e LAHEY (1976), DREW (1983), LAHEY JR. e DREW (1988), DREW e PASSMAN (1999), resultando em formulações completas de equações tridimensionais. Entretanto, para diversas aplicações de engenharia, especialmente as que envolvem escoamento em dutos, uma abordagem unidimensional é adotada.

OMGBA-ESSAMA (2004) afirma que para escoamento isotérmico em dutos com diâmetro constante, pode-se usar a média temporal ou a média estatística Euleriana, pois ambas fornecem o mesmo conjunto de equações de conservação unidimensionais.

Desta maneira, embora uma grande variedade de modelos teóricos empregados na análise de escoamentos bifásicos em tubulações possa ser encontrada na literatura, os modelos de dois fluidos unidimensionais são mais amplamente utilizados devido à sua reconhecida capacidade de descrever diferentes topologias de escoamento (FIGUEIREDO, 2010). Nestes tipos de modelos, os fluidos não apenas possuem cinemáticas independentes como também podem possuir propriedades termodinâmicas independentes, como pressão e temperatura. A descrição do movimento unidimensional dos fluidos é feita postulando-se equações de balanço de massa, quantidade de movimento linear e conservação de energia para cada uma das fases.

Nessa modelagem leva-se em consideração a compressibilidade na fase gás, sendo esta a mais compressível, embora se tenha a noção que a fase líquida também é compressível, especialmente para os condensados em escoamentos bifásicos de fase

predominante gás. A compressibilidade da fase gás é, então, determinada através do uso de uma equação de estado.

3.1 SPM-4: Definições e Hipóteses Adotadas

Um modelo de dois fluidos, utilizando quatro equações, é apresentado por OMGBA-ESSAMA (2004). Esse modelo é aqui denominado *Single Pressure Model*, ou simplesmente modelo SPM-4. Este modelo pressupõe a existência de uma única pressão para as fases gás e líquida, e é formado por quatro equações diferenciais, sendo duas para a conservação de massa e duas para a conservação de quantidade de movimento, uma para cada fase (gás e líquido).

O termo de correção de pressão para o gás e uma equação de estado para o líquido são implicitamente adicionados ao SPM-4 sem, no entanto, alterar a estrutura de suas equações.

Segundo BAPTISTA (2013), a modelagem transiente do modelo SPM-4 completo trata a simulação em regime permanente como um transiente normal de acomodação das condições de contorno às condições iniciais, onde nenhuma alteração é introduzida a menos de permitir que o próprio passo de tempo avance. Assim, a solução vai se acomodando, na maioria dos casos, uma vez que eventuais desbalanceamentos mássicos no interior dos contornos do problema vão sendo compensados.

Tomam como hipóteses básicas um escoamento isotérmico, a ausência de transferência de massa entre as fases e a igualdade das pressões em ambos os lados da interface líquido-gás. Assim, as equações do modelo SPM-4, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \alpha_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_G \alpha_G u_G) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L \alpha_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_L \alpha_L u_L) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_G u_G \alpha_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G p) = p \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + B_{fG} + T_I + T_{GW}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L u_L \alpha_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L p) = (p - p_c) \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} + B_{fL} - T_I + T_{LW}, \quad (3.4)$$

onde p representa a pressão na seção do duto, p_c é um termo de correção na pressão, B_{fG} e B_{fL} são as forças de corpo para as fases, T_I é a tensão interfacial e T_{GW} e T_{LW} são as tensões entre cada fase e a parede. As equações acima são submetidas à condição:

$$\alpha_L + \alpha_G = 1, \quad (3.5)$$

para $x \in (0, L)$ e $t \in (0, \infty)$, sendo L o comprimento da tubulação. Nas equações acima, u_k , α_k e ρ_k , com $k \in \{L, G\}$ (sendo L e G os índices atribuídos à fase líquida e gasosa, respectivamente), denotam a velocidade, a fração volumétrica e a massa específica dos constituintes que integram ambas as fases. A inclinação do duto com a horizontal é representada pelo ângulo β e a área de seção reta do duto por A . O perímetro molhado e a tensão de cisalhamento na parede do duto para a fase k são representadas por S_k e τ_{wk} respectivamente, enquanto que S_i e τ_i se referem a estas mesmas propriedades quando avaliadas na interface líquido-gás e p_c o termo de correção de pressão.

Admitindo-se que a interface gás-líquido é plana, pode-se escrever os perímetros molhados S_k , com $k \in \{L, G\}$, e S_i podem ser expressos em termos da altura de líquido h_L e da fração volumétrica de líquido α_L , com base nas expressões abaixo:

$$S_L = D \left[\pi - \cos^{-1}(X) \right] \quad (3.6)$$

$$S_G = \pi D - S_L \quad (3.7)$$

$$S_i = D \sqrt{(1 - X^2)} \quad (3.8)$$

com

$$\alpha_L = \frac{1}{\pi} \left[\pi - \cos^{-1}(X) + X \sqrt{1 - X^2} \right], \text{ sendo } X = 2 \frac{h_L}{D} - 1, \text{ com } -1 \leq X \leq 1. \quad (3.9)$$

As equações de estado para o líquido e o gás pode ser especificadas de forma geral como:

$$p = \hat{p}_L(\rho_L) \quad ; \quad p = \hat{p}_G(\rho_G), \quad (3.10)$$

com

$$\frac{d\hat{p}_k}{d\rho_k} > 0, \text{ com } k \in \{L, G\}, \quad (3.11)$$

para a fase k . O sistema de equações se torna completo adicionando-se equações constitutivas para os termos de correção de pressão de ambas as fases em conjunto com equações para as forças de corpo B_{fG} e B_{fL} e para a tensão interfacial T_I e para as tensões entre cada fase e a parede T_{GW} e T_{LW} , bem como equações constitutivas para as tensões de cisalhamento, as quais pressupõem escoamento totalmente desenvolvido. Essas equações são dadas por:

$$B_{fk} = -\rho_k \alpha_k g \sin(\beta), \text{ com } k \in \{L, G\}, \quad (3.12)$$

$$T_{kw} = -\frac{\tau_k S_k}{A}, \text{ sendo } \tau_k = \frac{1}{2} f_k \rho_k u_k |u_k| \text{ com } k \in \{L, G\}, \quad (3.13)$$

$$T_i = \frac{\tau_i S_i}{A}, \text{ com } \tau_i = \frac{1}{2} f_i \rho_G (u_G - u_L) |u_G - u_L|. \quad (3.14)$$

onde f_k e f_i representam os fatores de fricção para as fases e para a interface líquido-gás. Dessa forma, as variáveis dependentes do modelo são: a pressão p , a fração volumétrica de gás α_G ou a fração volumétrica de líquido α_L e as velocidades dos fluidos u_L e u_G , todas sendo funções do par de variáveis independentes (x, t) .

Conforme descrito em OMGBA-ESSAMA (2004), a utilização de termos de correção de pressão específicos para p_c é capaz de descrever escoamentos

estratificados e escoamentos com bolhas, que são os principais padrões observados em escoamentos bifásicos em gasodutos. Para o SPM-4, os termos de correção de pressão são dados por:

$$p_c = \rho_L \alpha_L g \cos(\beta) \frac{dh_L}{d\alpha_L}, \quad (3.15)$$

$$\frac{dh_L}{d\alpha_L} = \frac{\pi D}{4} \frac{\sqrt{1-X^2}}{(1-X^2)}, \text{ com } X = \frac{2h_L}{D} - 1, \quad (3.16)$$

O termo de correção p_c se faz necessário devido à influência da coluna de líquido no cálculo da pressão, na fase referida.

Finalmente, é importante ressaltar que para esse termo de correção de pressão, a hiperbolicidade do sistema de equações formado por Eq. (3.1-3.4) pode ser assegurado, pelo menos para uma faixa usual de velocidades do líquido e do gás.

3.1.1 Limitações

Segundo BAPTISTA (2013), a formulação SPM-4 apresenta algumas limitações, quais sejam: (i) a impossibilidade da configuração de um perfil altimétrico; (ii) abordagem isotérmica; (iii) ausência de um modelo de acompanhamento de golfadas de líquido mais abrangente, que permita calcular os efeitos destes na pressão do escoamento, especialmente frente a golfadas de terreno; (iv) a ausência do termo de transferência de massa entre fases, o que não permite o aparecimento de líquido no duto, a qual é comumente observada em casos reais; (v) o fato de considerar a fase líquida incompressível, o que pode introduzir problemas de natureza numérica no caso de escoamentos com condensados caracterizados por transientes rápidos e/ou com a formação de golfadas.

4. Método Numérico

Visando-se apresentar a estratégia proposta para se obter uma aproximação numérica para o problema de valor inicial e de contorno definido anteriormente, é conveniente reescrever o sistema de equações apresentado no capítulo anterior (Eqs. 3.1 a 3.4) na forma canônica de lei de conservação, deixando em evidência os termos conservativos e não conservativos. Denomina-se $\mathbf{Q}$ o vetor das quantidades conservadas, $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ o vetor de fluxo, $\mathbf{W}$ o vetor das variáveis primitivas, $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{W})$ o vetor do termo não conservativo e $\mathbf{S}=\mathbf{S}(\mathbf{W})$ o vetor representativo do termo de fonte e/ou sorvedouro, definidos como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G \\ \rho_L \alpha_L \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \end{bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G p \\ \rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L p \end{bmatrix}; \quad (4.1a,b)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} p \\ \alpha_L \\ u_G \\ u_L \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{\rho_L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p-p_c}{\rho_L} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.2a,b)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{fG} + T_i + T_{Gw} \\ B_{fL} - T_i + T_{Lw} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

onde:

$$p_c = \rho_L \alpha_L g \cos(\beta) \frac{dh_L}{d\alpha_L}, \quad (4.4)$$

$$\frac{dh_L}{d\alpha_L} = \frac{\pi D}{4} \frac{\sqrt{1-X^2}}{(1-X^2)}, \text{ com } X = \frac{2h_L}{D} - 1, \quad (4.5)$$

$$B_{fk} = -\rho_k \alpha_k g \sin(\beta), \text{ com } k \in \{L, G\}, \quad (4.6)$$

$$T_{kw} = -\frac{\tau_k S_k}{A}, \text{ sendo } \tau_k = \frac{1}{2} f_k \rho_k u_k |u_k| \text{ com } k \in \{L, G\}, \quad (4.7)$$

$$T_i = \frac{\tau_i S_i}{A}, \text{ com } \tau_i = \frac{1}{2} f_i \rho_G (u_G - u_L) |u_G - u_L|. \quad (4.8)$$

Com as definições acima, o sistema de equações do modelo SPM-4 (Eqs. 3.1 a 3.4) pode ser escrito na forma compacta como:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{S}. \quad (4.9)$$

Antes de apresentar a estratégia numérica é conveniente notar que se o vetor $\mathbf{Q}$ for conhecido, então o vetor das variáveis primitivas $\mathbf{W}$ também será e vice-versa. Dado $\mathbf{W}$ a determinação de $\mathbf{Q}$ é direta. Em vista da condição expressa pela inequação (3.11), a existência da inversa das funções definidas na Eq. (3.10) é assegurada, isto é, $\rho_k = \hat{p}_k^{-1}(p)$, para $k \in \{L, G\}$, o que permite computar as massas específicas de líquido e gás baseadas na pressão. De posse das massas específicas, da fração volumétrica de gás e das velocidades do líquido e do gás as componentes de $\mathbf{Q}$ são facilmente calculadas. A transformação reversa de $\mathbf{Q}$ para $\mathbf{W}$ requer a solução da seguinte equação em termos de p , a partir do conhecimento de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$:

$$\alpha_L \rho_L \hat{p}_G^{-1}(p) + \alpha_G \rho_G \hat{p}_L^{-1}(p) = \hat{p}_L^{-1}(p) \hat{p}_G^{-1}(p). \quad (4.10)$$

De posse da pressão p , as outras componentes de $\mathbf{W}$ são facilmente determinadas.

Embora diferentes abordagens possam ser utilizadas para o tipo de malha a ser empregada na construção da solução numérica (fixa, escalonada ou móvel), optou-se pela malha fixa devido a sua simplicidade. Para isso, o comprimento da tubulação L é

discretizado em N células computacionais de tamanho regular $\Delta x = L/N = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, com $x_{j-1/2} = (j-1)\Delta x$ e $x_{j+1/2} = j\Delta x$, para $j = 1, \dots, N$, de tal forma que o centro de cada célula está localizado na posição $x_j = (j-1/2)\Delta x$.

Se $\mathbf{Q}_j^n$ representa uma aproximação de $\mathbf{Q}(x = x_j, t = t^n)$ na posição x_j e no instante de tempo t^n uma possível aproximação numérica explícita da solução do problema de valor inicial e de contorno caracterizado pela Eq. (4.9) pode ser expressa, usando diferenças finitas, para calcular o valor de $\mathbf{Q}_j^{n+1}$ no instante de tempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$ como:

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] + \Delta t^n \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_j^n + \Delta t^n \mathbf{S}_j^n, \quad (4.11)$$

na qual Δt^n representa o intervalo de avanço no tempo do instante corrente t^n para t^{n+1} , $\mathbf{S}_j^n = \mathbf{S}(\mathbf{W}_j^n)$ e $\mathbf{F}_{j+1/2}^n$ e $\mathbf{F}_{j-1/2}^n$ são aproximações do cálculo do termo de fluxo no instante t^n nas posições espaciais $x_{j+1/2}$ e $x_{j-1/2}$, respectivamente.

4.1 Discretização do Termo de Fluxo Conservativo

Diferentes aproximações numéricas podem ser utilizadas no termo de fluxo $\mathbf{F}$, conforme observado na literatura. Visando-se permitir a representação de diferentes aproximações, o termo de fluxo é em geral expresso como funções genéricas dos estados à esquerda e à direita das células adjacentes tal como:

$$\mathbf{F}_{j-1/2}^n = \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n) \quad ; \quad \mathbf{F}_{j+1/2}^n = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}(\mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n). \quad (4.12)$$

A escolha das funções $\hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}$ e $\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}$ determina os diferentes esquemas numéricos disponíveis na literatura.

4.2 Métodos numéricos conservativos

Para métodos de aproximação numérica conservativos, dois conjuntos de esquemas numéricos completamente explícitos podem ser escolhidos. O primeiro conjunto engloba os métodos centrados, os quais não requerem a solução dos problemas de Riemann associados. Nesta categoria, vários métodos podem ser citados, tais como os métodos propostos por Friedrichs e Richtmyer, ambos detalhados em TORO (1997), e o método FCT (*Flux Corrected Transport*), descrito em BORIS e BOOK (1973, 1976) e BOOK *et al.* (1975), assim como outros esquemas TVD (*Total Variation Diminishing*), que são centrados de primeira ordem (HIRSCH, 1990; FLETCHER, 1988). O segundo conjunto é referido como métodos *upwind*, os quais são menos dissipativos e mais acurados do que aqueles pertencentes ao primeiro conjunto. As desvantagens dos métodos *upwind* estão na complexidade e no alto custo computacional vinculado à solução dos problemas de Riemann associados. Nesta classe, incluem-se os métodos TVD de segunda ordem *upwind*, tais como WAF (*Weighted Average Flux*) (TORO, 1997) e MUSCL (*Monotonic Upstream-Centred Scheme for Conservation Laws*) (VAN LEER, 1979). A seguir, alguns desses métodos serão apresentados.

4.2.1 Lax-Friedrichs

O método de Lax-Friedrichs é um esquema central de primeira ordem baseado na obra de HIRSCH (1990) e TORO (1997). O termo de fluxo é dado pela equação 4.13:

$$\hat{F}_{j+1/2}^{LF} = \frac{1}{2} \cdot \left[F(Q_j^n) + F(Q_{j+1}^n) - \frac{1}{\tau} \cdot (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \right] \quad (4.13)$$

4.2.2 Ritchmyer

O método Ritchmyer (também conhecido como Lax Wendroff de Duas Etapas), é caracterizado por um esquema de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço descrito por HIRSCH (1990).

Os vetores de estado e do termo de fluxo são dados pelas Eqs. 4.14 a 4.16:

$$\mathbf{Q}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{Q}_{j+1}^n + \mathbf{Q}_j^n) \quad (4.14)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_{j+1/2}^n = \mathbf{Q}_{j+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1^n)] - \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^n) \quad (4.15)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{RI} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{F}(\overline{\mathbf{Q}}_{j+1/2}^n)] \quad (4.16)$$

4.2.3 FORCE

FORCE (*First-Order-Centred Scheme*) é um método de esquema central de primeira ordem, e como o nome sugere, um método de primeira ordem no espaço e no tempo baseado em TORO (1997). O termo de fluxo é dado pela equação 4.17:

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{FORCE} = \frac{1}{2} \cdot [\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{LF} + \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{RI}] \quad (4.17)$$

4.2.4 TVD Lax-Friedrichs

O método é descrito em YEE (1989), o qual propõe uma abordagem TVD (*“Total Variation Diminishing”* – uma variação dentro dos métodos das diferenças finitas) empregada em conjunto com o trabalho de VAN LEER (1979) para limitar a excessiva difusão numérica do método.

O esquema numérico resultante é um pouco mais dissipativo que aquele encontrado na abordagem *upwind* de primeira ordem. Variações são também

encontradas na literatura, tais como os trabalhos de BARMIN *et al.* (1996), que traz uma abordagem simplificada, bem como o de TOTH e ODSREIL (1996), abaixo descrito:

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{TDVLF} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^L) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^R)] - \frac{1}{2-\tau} \cdot \Phi_{j+1/2}^{LR} \quad (4.18)$$

São definidos “vetores de estado” para os lados esquerdo e direito, representados respectivamente por $\mathbf{Q}^L$ e $\mathbf{Q}^R$, os quais são formados a partir de um estado intermediário $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ e das diferenças limitadas $\Delta \bar{\mathbf{Q}}^n$ definidas como:

$$\mathbf{Q}_{j+1/2}^L = \mathbf{Q}_j^{n+1/2} + \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{Q}}_j^n, \quad \mathbf{Q}_{j+1/2}^R = \mathbf{Q}_{j+1}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{j+1}^n \quad (4.19)$$

O estado intermediário, também conhecido como preditor de valor de passo, é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{Q}_j^{n+1/2} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\tau}{2} \left[\mathbf{F} \left(\mathbf{Q}_j^n + \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{Q}}_j^n \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{Q}_j^n - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{Q}}_j^n \right) \right] \quad (4.20)$$

O limitador de dissipação Φ^{LR} , presente na equação (4.18) é função de algumas médias simétricas $\mathbf{Q}^{LR}$ de $\mathbf{Q}^L$ e $\mathbf{Q}^R$.

$$\Phi^{LR} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \lambda_{j+1/2}^{\max} \cdot (\mathbf{Q}^R - \mathbf{Q}^L) \quad (4.21)$$

A diferença $\Delta \mathbf{Q}^{LR} = \mathbf{Q}^R - \mathbf{Q}^L$. Muitas outras expressões de funções limitadoras são encontradas em YEE (1989).

4.3 Flux Corrected Transport (FCT)

FCT (*Flux Corrected Transport*) é um esquema central de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço, baseado na solução dos termos conservativos, desenvolvido originalmente por BORIS e BOOK (1976) e BOOK *et al.* (1975), e

posteriormente por LEZEAU e THOMPSON (1998). É um esquema conservativo, para resolução de equações hiperbólicas, como as que aparecem em problemas de dinâmica dos gases, problemas aerodinâmicos e que envolvem magnetismo, por exemplo. Também é muito utilizado em problemas com presença de ondas de choque ou presenças de descontinuidades.

Considerando-se que o método FCT é de simples implementação e foi empregado com relativo sucesso na modelagem de escoamentos bifásicos, conforme relatado em OMGBA-ESSAMA (2004), FIGUEIREDO (2010) e BAPTISTA (2013), obtendo inclusive resultados melhores que outros métodos em alguns casos, optou-se por empregá-lo no âmbito deste trabalho. A escolha foi reforçada após analisar o estudo de caso apresentado em FLETCHER (1988), comparando os métodos FCT, Ritchmyer e MacCormack para um escoamento em um gasoduto monofásico com a presença de uma onda de choque (Anexo I).

Tomando como base HIRSCH (1990), FLETCHER (1988) e OMGBA-ESSAMA (2004), apresenta-se, a seguir, um roteiro de 6 (seis) passos da operacionalização do FCT, com vistas a sua implementação:

- 1) Obtenção de uma aproximação inicial $\tilde{\mathbf{Q}}_j^*$ de $\mathbf{Q}_j^{n+1}$:

A aproximação inicial $\tilde{\mathbf{Q}}_j^*$ é obtida via versão Ritchmyer do esquema a dois passos do método de Lax-Wendroff, escrita como:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_j^* = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left(\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}^{\text{RI}} \right), \quad (4.22)$$

na qual o esquema de cálculo do fluxo é atribuído a Ritchmyer sendo definido como:

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}^*). \quad (4.23)$$

sendo que o vetor solução intermediário $\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}^*$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{j+1}^n + \mathbf{Q}_j^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j^n)]. \quad (4.24)$$

2) Geração dos fluxos difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^d = \nu_{j+1/2} (\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n). \quad (4.25)$$

3) Geração dos fluxos anti-difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{ad} = \mu_{j+1/2} (\tilde{\mathbf{Q}}_{j+1}^* - \tilde{\mathbf{Q}}_j^*). \quad (4.26)$$

4) Difusão da solução:

$$\mathbf{Q}_j^d = \tilde{\mathbf{Q}}_j^* + (\mathbf{F}_{j+1/2}^d - \mathbf{F}_{j-1/2}^d). \quad (4.27)$$

5) Cálculo da primeira diferença de $\mathbf{Q}_j^d$:

$$\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}^d = \mathbf{Q}_{j+1}^d - \mathbf{Q}_j^d. \quad (4.28)$$

6) Limitação dos fluxos anti-difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{cad} = S \max \left[0, \min \left[S \Delta \mathbf{Q}_{j-1/2}^d, |\mathbf{F}_{j+1/2}^{ad}|, S \Delta \mathbf{Q}_{j+3/2}^d \right] \right], \quad (4.29)$$

na qual,

$$S = \text{sgn } \mathbf{F}_{j+1/2}^{ad}. \quad (4.30)$$

7) Geração do fluxo entre as células $\mathbf{F}_{j+2}^n$ definido na Eq. (4.11):

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^n = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{FCT}} = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} + \frac{\Delta x}{\Delta t^n} (\mathbf{F}_{j+1/2}^{cad} - \mathbf{F}_{j+1/2}^{ad}). \quad (4.31)$$

Conforme proposto por LEZEAU e THOMPSON (1998) e XIAO (2004), nos passos 3 e 4 do algoritmo descrito anteriormente, os coeficiente difusivos $\nu_{j+1/2}$ e anti-difusivos $\mu_{j+1/2}$ são iguais e tratados como constantes que assumem o valor de 0.125.

4.4 Estabilidade dos Métodos Explícitos Conservativos

Para esquemas explícitos, o avanço no tempo Δt^n é escolhido com base na condição CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) (HIRSCH, 1990; TORO, 1997), a qual é expressa por:

$$\Delta t^n = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}^n}, \quad (4.32)$$

na qual o parâmetro CFL é um número positivo, geralmente menor do que 1 ou 0.5 (dependendo da natureza específica do esquema numérico empregado na discretização do termo conservativo definido na Eq. (4.12)), de forma a assegurar estabilidade do esquema. De uma forma geral, quanto mais próximo do seu limite superior o parâmetro CFL se encontrar, mais eficiente o esquema numérico será. Na Eq. (4.27), o parâmetro $\lambda_{\max}^n$ representa a maior velocidade de frente de onda em valor absoluto relacionado o problema de autovalor associado à Eq. (4.9) em todo o domínio no instante de tempo t^n . Para um sistema de quatro equações com o definido pela Eq. (4.9) num domínio espacial com N células, $\lambda_{\max}^n$ é dado por:

$$\lambda_{\max}^n = \max_j \left[\max_k |\lambda_j^k| \right], \quad \text{para } j = 1, \dots, N \text{ e } k = 1, \dots, 4. \quad (4.33)$$

Os trabalhos de TOUMI (1996), MASELLA *et al.* (1998) e BAPTISTA (2007) demonstram que para a maioria dos escoamentos encontrados em dutos de óleo e gás, a velocidade relativa, que caracteriza a velocidade de escorregamento entre as fases, é em geral da ordem de 1 m/s, enquanto a velocidade do som no gás é da ordem de 300 a 400 m/s dependendo da composição do gás. Desta forma podem-se assumir valores estimados para $\lambda_{\max}^n$ uma vez que não fugirão muito a esse intervalo. Para o nosso trabalho consideramos $\lambda_{\max}^n$ constante e igual a 400 m/s. Dessa maneira, o valor de Δt^n utilizado também foi constante.

4.5 Discretização do Termo de Fluxo Não Conservativo

O termo não conservativo $\left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_j^n$ na Eq. (4.11), deve ser especial abordado

por um método. Para tal, o Esquema Minmod (COQUEL *et al.*, 1997) é sugerido. Sua versão de primeira ordem é expressa por:

$$\left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\mathbf{H}_j^n}{\Delta x} \cdot \text{Minmod}(\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_j^n - \mathbf{W}_{j-1}^n) \quad (4.34)$$

onde a função Minmod é definida por:

$$\text{Minmod}(x, y) = \frac{1}{2} (\text{sign}(x) + \text{sign}(y)) \cdot \min(|x|, |y|) \quad (4.35)$$

Essa versão de primeira ordem, contudo, mostrou-se por demais difusiva. Assim é necessária a utilização de uma discretização de segunda ordem, proposta por HARTEN (1983), e utilizado por OMGBA-ESSAMA (2003), qual seja:

$$\left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\mathbf{H}_j^n}{\Delta x} m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (4.36)$$

na qual $\mathbf{H}_j^n = \mathbf{H}(\mathbf{W}_j^n)$, sendo a função $m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ definida como

$$m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv \begin{cases} s \cdot \min[|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, |\mathbf{z}|], & \text{if } \text{sgn}(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{y}) = \text{sgn}(\mathbf{z}) = s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.37)$$

com

$$\mathbf{x} \equiv 2(\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n), \mathbf{y} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_{j-1}^n), \mathbf{z} \equiv 2(\mathbf{W}_j^n - \mathbf{W}_{j-1}^n). \quad (4.38)$$

Em contrapartida, o termo S (equação 4.11) é calculado tal qual a equação (4.3).

4.6 Condições de Contorno

Para a resolução do problema, é necessário 4 (quatro) condições de contorno, dadas pelo vetor das variáveis primitivas $\mathbf{W}$ (Eq. 4.2a). Segundo OMGBA-ESSAMA (2004), ao calcular os autovalores desse problema nos contornos do duto, i.e. na entrada e saída do duto, encontraremos 3 valores positivos e 1 negativo. Dessa maneira, propõe-se considerar três condições de contorno (u_G , u_L e α_L), por conta dos 3 autovalores positivos, na entrada do duto e uma condição (p), por conta do autovalor negativo, na saída do duto. As variáveis foram assim posicionados conforme outros trabalhos como OMGBA-ESSAMA (2004), BAPTISTA (2013), MASELLA *et al.* (1998), entre outros.

Essas condições de contorno são impostas próximas às fronteiras fixas ($x=0$ e $x=L$), com auxílio de células fictícias, ou fantasmas, criadas fora do domínio computacional. Na entrada da tubulação, uma célula fantasma $j=0$ é artificialmente criada à esquerda de $x=0$. A quantidade conservada $\mathbf{Q}_{j=0}^n$, a qual aparece no termo de fluxo $\mathbf{F}_{1/2}^n$ na Eq. (4.11) para computar o valor de $\mathbf{Q}_{j=1}^{n+1}$, é aproximada com base nas condições de contorno em $x=0$ dado pelas equações do modelo com os seguintes valores do vetor das variáveis primitivas $\mathbf{W}_{j=0}^n$:

$$\mathbf{W}_{j=0}^n = \begin{bmatrix} p_{j=1}^n & (\hat{\alpha}_L)_0(t^{n+1}) & (\hat{u}_G)_0(t^{n+1}) & (\hat{u}_L)_0(t^{n+1}) \end{bmatrix}^T. \quad (4.39)$$

Analogamente, na saída da tubulação, uma célula fantasma $j=N+1$ é artificialmente criada à direita de $x=L$. A quantidade conservada $\mathbf{Q}_{j=N+1}^n$, a qual aparece no termo de fluxo $\mathbf{F}_{N+1/2}^n$ na Eq. (4.11) para computar o valor de $\mathbf{Q}_{j=N}^{n+1}$, é aproximada com base nas condições de contorno em $x=L$ dado pela Eqs. De 3.1 a 3.4 com os seguintes valores do vetor das variáveis primitivas $\mathbf{W}_{j=N+1}^n$:

$$\mathbf{W}_{j=N+1}^n = \begin{bmatrix} \hat{p}_L(t^{n+1}) & (\alpha_L)_{j=N}^n & (u_G)_{j=N}^n & (u_L)_{j=N}^n \end{bmatrix}^T. \quad (4.40)$$

Contudo, verifica-se que algumas considerações precisam ser feitas, visto que alguns termos de fluxo do método FCT próximos dos contornos para serem calculados necessitariam de informações de fluxos para além da fronteira, o que não acontece. Dessa maneira, alguns passos foram reescritos para o contorno como seguem:

1) Obtenção de uma aproximação inicial $\tilde{\mathbf{Q}}_j^*$ de $\mathbf{Q}_j^{n+1}$:

A aproximação inicial $\tilde{\mathbf{Q}}_j^*$, obtida via versão Ritchmyer (Eq. 4.22), é reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_0^* = \mathbf{Q}_0^n, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_N^* = \mathbf{Q}_N^n \quad (4.41a, b)$$

4) Difusão da solução:

A difusão da solução (Eq 4.27) é reescrita como segue:

$$\mathbf{Q}_0^d = \tilde{\mathbf{Q}}_0^* = \mathbf{Q}_0^n, \quad \mathbf{Q}_N^d = \tilde{\mathbf{Q}}_N^* = \mathbf{Q}_N^n \quad (4.42a, b)$$

6) Limitação dos fluxos anti-difusivos:

A limitação dos fluxos anti-difusivos (Eq. 4.29) é reescrita como segue:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{\text{cad}} = S \max \left[0, \min \left[\left| \mathbf{F}_{1/2}^{\text{ad}} \right|, S \Delta \mathbf{Q}_{3/2}^d \right] \right] \quad (4.43)$$

$$\mathbf{F}_{N-1/2}^{\text{cad}} = S \max \left[0, \min \left[S \Delta \mathbf{Q}_{N-3/2}^d, \left| \mathbf{F}_{N-1/2}^{\text{ad}} \right| \right] \right] \quad (4.44)$$

As demais equações são resolvidas normalmente.

5. Resultados e Discussões

Um código matemático contendo o modelo SPM-4 e os métodos numéricos apresentados (FCT e Esquema Minmod) para o cálculo de um escoamento bifásico foi programado em linguagem FORTRAN, tendo como base o código FCT apresentado por FLETCHER (1988), descrito e testado no Apêndice I deste trabalho. O código original disponibilizado por FLETCHER (1988) foi adaptado, visto que o mesmo se aplicava a escoamento monofásico e resolvia um problema de valor inicial de três equações diferenciais. Em nosso caso, entretanto, temos um escoamento bifásico e desejamos resolver um problema de valor de contorno envolvendo quatro equações diferenciais – Eqs. (3.1) a (3.4). O programa FORTRAN desenvolvido neste trabalho é aqui denominado código FCT.

Devido a falta de dados reais de escoamento em gasodutos bifásicos significativos presentes na literatura, os resultados foram comparados com os resultados de um simulador numérico de escoamento bifásico em dutos comercial, chamado aqui de Código OLGA, e um outro código computacional desenvolvido pelo grupo de computação e matemática aplicada da Universidade de Cranfield, e apresentado por OMGBA-ESSAMA (2003), chamado aqui de Código EMAPS.

5.1 Código EMAPS

O EMAPS (*Eulerian Multiphase Adaptive Pipeline Solver*) é um código computacional desenvolvido pelo grupo de computação e matemática aplicada da Universidade de Cranfield, sob o projeto multicliente TMF (*Transient Multiphase*

Flow), do qual a PETROBRAS faz parte. Este código traz as principais modelagens para escoamentos bifásicos, bem como diversos métodos numéricos.

Segundo BAPTISTA (2013), trata-se de um código escrito em FORTRAN fazendo uso intensivo de recursos de orientação a objetos tais como herança, polimorfismo, tipos abstratos de dados, alocação dinâmica de memória e referências avançadas de tipos indexados (matrizes), requerendo dessa forma as versões mais atuais dos compiladores FORTRAN.

Sua versão principal (versão 3.5, 2006) foi inicialmente desenvolvida para o ambiente Linux, sendo portada para o ambiente Windows e apresentada por FIGUEIREDO (2010) e BAPTISTA (2013).

Conceitualmente, o código EMAPS se aproxima mais dos *solvers* de pacotes comerciais CFD (*Computational Fluid Dynamics*), i.e., sua proposta é ser um módulo com diversos núcleos de soluções, representados pelos diferentes modelos bem como diferentes métodos numéricos, e não uma ferramenta direcionada a um único domínio, como é o caso dos simuladores comerciais de escoamento.

5.2 Código OLGA

O Código OLGA (*Oil-Liquid-Gas Analyser*) é um simulador numérico unidimensional de escoamento polifásico em dutos e instalações de produções dedicado à indústria de óleo e gás. Seu histórico se confunde com a história da aplicação de royalties de petróleo no desenvolvimento técnico-científico, hoje difundido praticamente de forma globalizada.

Durante suas mais de três décadas, seu desenvolvimento esteve sob diferentes comandos. A referência clássica descrição deste código é o trabalho de BENDIKSEN *et al.* (1991).

A descrição conceitual considera, além da fase gás, a fase líquida dividida em duas frentes, uma na parede e outra dispersa no interior do duto, que desconsidera os efeitos da parede. Essa fase dispersa é chamada de gotículas de líquido (*Liquid droplets*).

A versão 7 apresenta duas variações importantes em relação às anteriores: (i) separa as fases líquidas por miscibilidade, criando novas equações para água independentes das equações para óleo, tanto na abordagem de massa, quanto de quantidade de movimento; (ii) utiliza o recurso de computação de alto desempenho OpenMPTM (processamento em paralelo para máquinas com mais de um núcleo de processamento, onde tais núcleos fazem todos referência à mesma memória RAM).

5.3 Descrição dos Casos

5.3.1 **Objetivo**

Definiu-se inicialmente um cenário típico de interesse, aqui chamado Caso 1, caracterizado por um duto de 25 km, com a presença de um escoamento bifásico estratificado de óleo e gás. O duto é completamente horizontal, i.e. o perfil altimétrico é plano. O gasoduto em questão tem apenas uma entrada e uma saída. A Figura 5.1 mostra o esquema desse duto configurado no OLGA. A pressão em sua chegada (saída do duto) é de 2 atm. A discretização usada no caso base foi de $\Delta x=25$ m, i.e. todo o segmento está discretizado em 1000 partes, e o valor do parâmetro CFL foi de 0,45. Busca-se analisar aspectos da solução em regime permanente e transiente. O objetivo maior desta investigação é apreciar a qualidade da solução em relação ao código OLGA e ao código EMAPS. Em um segundo cenário, um duto de 100 km, com características semelhantes ao primeiro duto foi utilizado. A pressão na saída do duto é de 30 bar. A discretização neste caso foi de $\Delta x=100$ m e o valor do parâmetro CFL foi de 0,45.

Esse segundo caso foi o mesmo apresentado por FIGUEIREDO (2010), como intuito de validar o método FCT do código EMAPS ao compará-lo com o código OLGA.

Por fim, um terceiro caso, com configuração semelhante ao primeiro, contendo entretanto uma descontinuidade de pressão no meio do duto é calculado de maneira a verificar o comportamento do código em uma situação tipicamente transiente. Duas equações constitutivas distintas para o cálculo do fator de atrito interfacial foram utilizadas para se verificar o impacto nos cálculos do código.

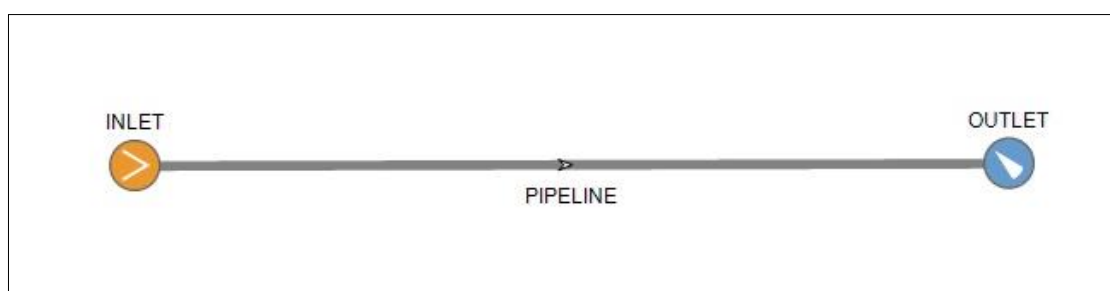


Figura 5.1 – Esquema do gasoduto configurado no OLGA

5.3.2 Dados do Duto

Os dados de configuração do gasoduto para os Casos 1 e 3 seguem na Tabela 5.1 abaixo. Os dados do Caso 2 seguem na Tabela 5.2.

Tabela 5.1 – Dados de configuração do duto de referência para os Casos 1 e 3.

Diâmetro (in)	11,938
Comprimento (km)	25,0
Rugosidade (in)	0,0018
Inclinação (graus)	0,0

Tabela 5.2 – Dados de configuração do duto de referência para o Caso 2.

Diâmetro (in)	11,938
Comprimento (km)	100,0
Rugosidade (in)	0,0018
Inclinação (graus)	0,0

Ambos os casos foram discretizados no espaço em 1000. Ou seja, para os casos 1 e 3 o valor de $\Delta x = \text{constante} = 25\text{m}$ e, para o caso 2, $\Delta x = \text{constante} = 100\text{m}$.

5.3.3 Fluidos

Os fluidos configurados, em todos os casos, foram utilizados considerando uma mistura de gás e condensado comumente encontrada no poço ESS-089 do campo de Peroá, na Bacia do Espírito Santo, fornecido pela PETROBRAS. A Figura 5.2 apresenta a variação das massas específicas de óleo e gás em função da pressão, na temperatura de 20 °C.

É importante destacar que o código OLGA apresenta duas formas distintas para definir a condição de contorno de *holdup* (fração da seção transversal preenchida com líquido) na entrada do duto, no caso permanente. Para fluidos apolares fracamente miscíveis, que é o caso de uma mistura ar-água, por exemplo, é preciso criar uma condição de contorno informando a fração de gás ou, complementarmente, de líquido. Já no caso de hidrocarbonetos em diferentes fases, que é o nosso cenário, o equilíbrio líquido-vapor vem direto das condições de pressão-volume-temperatura (PVT) informadas pela tabela de propriedades PVT fornecida ao código. Entretanto, tanto para o código EMAPS quanto para o código criado neste problema, a massa específica do óleo é considerada como constante, i.e. a fase líquida é considerada incompressível. Assim, a modelagem SPM-4 utilizada pelo código EMAPS e escolhida para esse trabalho corrige apenas a massa específica da fase gás, usando, para esse fim, uma equação de estado simplificada que leva em conta apenas os efeitos de pressão, uma vez que sua modelagem é isotérmica.

O OLGA por sua vez apresenta uma modelagem térmica mais abrangente, onde resolve a equação da energia para a mistura de fases, como parte das equações que governam o fenômeno físico modelado. Em adição, faz uso de uma tabela PVT gerada

por outro simulador (PVT Sim, 2008) que emprega um conjunto de opções de equação de estado, dentre elas a equação de SOAVE-REDLICH-KWON (1972), com a correção de PENELOUX E RAUZY (1982) para a massa específica de líquido.

De maneira a evitar estas disparidades o caso em todo os códigos foram tratados como isotérmicos ($T = 20^{\circ}\text{C}$).

Para a viscosidade, também foram considerados valores constantes tanto para o gás quanto para o óleo.

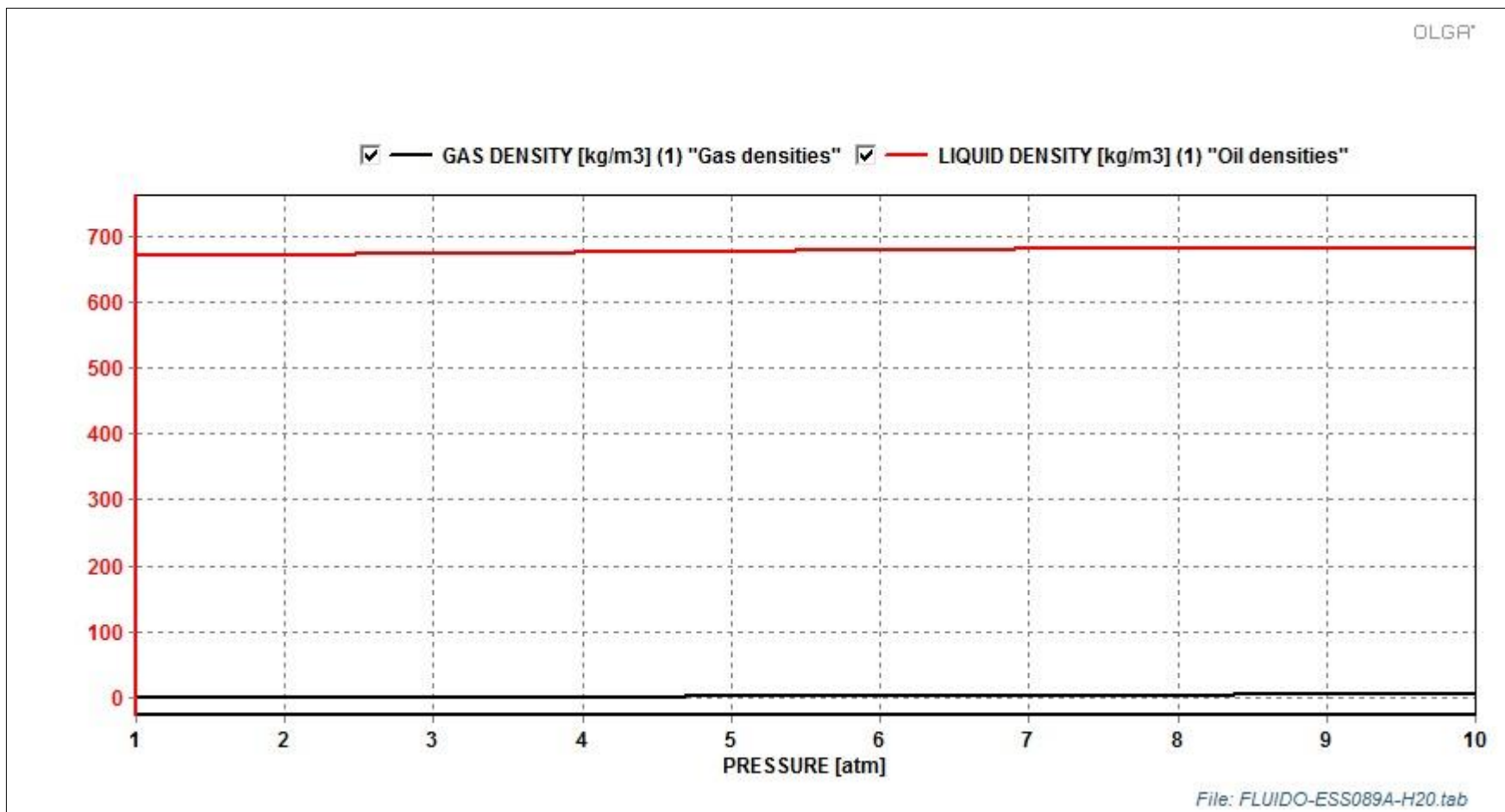


Figura 5.2 – Massa específica x Pressão, para T=20°C, fluido do poço ESS-089.

5.3.4 Pressão e Fatores de Atrito

A partir da Equação (3.6), a pressão foi calculada como sendo uma função da massa específica do gás, como segue:

$$p = \rho_G R T \quad (5.1)$$

Como a hipótese de que não há mudança de fase é considerada, a equação (5.1) pode ser utilizada, desde que se altere o valor da constante R. Para o caso base, o valor de R foi calculado como sendo uma constante igual a 438,12 J/Kg.K.

Além disso, a grandeza p_c é apresentada como uma correção na pressão líquida nas equações de quantidade de movimento – Eqs. (3.3) e (3.4). As modelagens mais recentes (OMGBA-ESSAMA, 2003) tendem a usá-la para corrigir distorções de pressão, e. g. propagação de ondas de pressão em escoamento estratificado. A correção proposta em BONIZZI *et al.* (2001), pode ser escrita como:

$$p_c = \rho_L \alpha_L g (\cos \beta) \frac{dh_L}{d\alpha_L} \Rightarrow p_c \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = \rho_L \alpha_L g (\cos \beta) \frac{dh_L}{dx} \quad (5.2a, b)$$

Para o cálculo da perda de carga entre cada fase e a parede do duto, usou-se a correlação de MOODY (1944), para os respectivos fatores de atrito (fase gás e fase líquida):

$$f_k = 0,001375 \left\{ 1 + \left[2 \times 10^4 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + 10^6 \text{Re}_k \right]^{1/3} \right\} \quad (5.3)$$

A correlação de MOODY fornece ótimos resultados para tubos rugosos em regime turbulento. O número de Reynolds Re_k para a fase k definido como:

$$\text{Re}_k = \frac{\rho_k D_{hk} |u_k|}{\mu_k} \quad (5.4)$$

A grandeza D_{hk} representa o diâmetro hidráulico equivalente para o escoamento na fase k , com $k \in \{L, G\}$, definidos como:

$$D_{hG} = 4 \frac{A_G}{S_G + S_i} \quad (5.5)$$

$$D_{hL} = 4 \frac{A_L}{S_L} \quad (5.6)$$

onde S_G , S_L e S_i são os perímetros molhados na fase gás, fase líquida e interface, respectivamente, e A_G e A_L são as áreas superficiais da fase gás e fase líquida respectivamente, definidas como:

$$A_G = A\alpha_G \text{ e } A_L = A\alpha_L \quad (5.7a, b)$$

Os perímetros são calculados a partir das Equações (3.6) a (3.9).

Para o cálculo da perda de carga interfacial, utilizou-se duas correlações para o fator de atrito entre as fases gás e líquido: TAITEL e DUKLER (1976) e ANDREUSSI e PERSEN (1987), respectivamente, dados por:

$$f_I = f_G \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} f_I = f_G & \text{se } Fr_G \leq 0,36 \\ f_I = f_G \left[1 + 29,7 \cdot (Fr_G - 0,36)^{0,67} \left(\frac{h_L}{D} \right)^{0,2} \right] & \text{se } Fr_G > 0,36 \end{cases} \quad (5.9)$$

onde Fr_G é o número de Froude da fase gás, definido como:

$$Fr_G = u_G \sqrt{\left(\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G} \right) \left(\frac{dA_L/dh_L}{A_G} \right) \left(\frac{1}{g \cos \beta} \right)} \quad (5.10)$$

Segundo TAITEL e DUKLER (1976), a equação (5.8) pode ser utilizada para fluidos como óleo, água e gás. Também pode ser utilizada em sistemas bifásicos e trifásicos, para escoamento estratificado com pouco gás. Também é utilizado em transições para regimes do tipo *slug* e anular. Além disso, melhores resultados são obtidos quando $Re \leq 2500$.

Segundo ANDREUSSI e PERSEN (1987), a equação (5.10) apresenta bons resultados para o escoamento estratificado em até duas dimensões. A primeira equação (para $Fr_G \leq 0,36$) é utilizada para regime estratificado do tipo “smooth”, enquanto que a segunda equação (para $Fr_G > 0,36$) é melhor utilizado quando há presença de ondas 2D na interface do regime estratificado.

5.3.5 Regime Permanente

Os códigos apresentam diferentes formas de lidar com o regime permanente. O código EMAPS e o código FCT, apresentado por esse trabalho, empregam a modelagem transiente completa e tratam a simulação como um transiente normal de acomodação das condições de contorno às condições iniciais onde nenhuma alteração é introduzida a menos de permitir que o próprio passo de tempo avance. Assim, a solução vai evoluindo até que a solução de regime permanente seja atingida. O critério para se determinar o regime permanente no código FCT é apresentado no Apêndice 2.

O código OLGA, em versões anteriores, procedia de forma análoga. Na versão 7 atual, entretanto, a abordagem muda para simular o regime permanente: todos os termos transientes são retirados da formulação e o sistema gerado é resolvido iterativamente.

5.3.6 Condições de Contorno

Considere a Tabela 5.3, a qual traz as condições de contorno usadas nos diferentes casos 1 e 3, enquanto que a Tabela 5.4 apresenta as condições do Caso 2. A imposição de tais condições respeita a forma com que tais simuladores as requerem, i.e., cada código o faz de uma maneira diferente.

Tabela 5.3 – Condições de contorno dos Casos 1 e 3.

	$p \text{ (atm)}^{E,O}$	$u_G \text{ (m/s)}^E$	$u_L \text{ (m/s)}^E$	α_L
Entrada	C	8,023	0,7519	0,0579
Saída	2	C	C	C

Tabela 5.4 – Condições de contorno do Caso 2.

	p (bar) ^{E,O}	u_G (m/s) ^E	u_L (m/s) ^E	α_L
Entrada	C	5.091	1,736	0.0155
Saída	30	C	C	C

Os índices O e E correspondem às condições de contorno dos softwares OLGA e EMAPS/código FCT, respectivamente. A letra C representa a variável a ser calculada na simulação. Para completar as condições de contorno para o código OLGA, para o Caso 1 foi considerada uma vazão mássica total de entrada igual a 10 kg/s, enquanto que para o Caso 2 a vazão igual 20 kg/s. A composição de cada fase é calculada a partir da tabela PVT contida no mesmo.

5.4 Resultados

5.4.1 Caso 1

Após rodar o caso 1 nos diferentes códigos, foram obtidos os seguintes resultados:

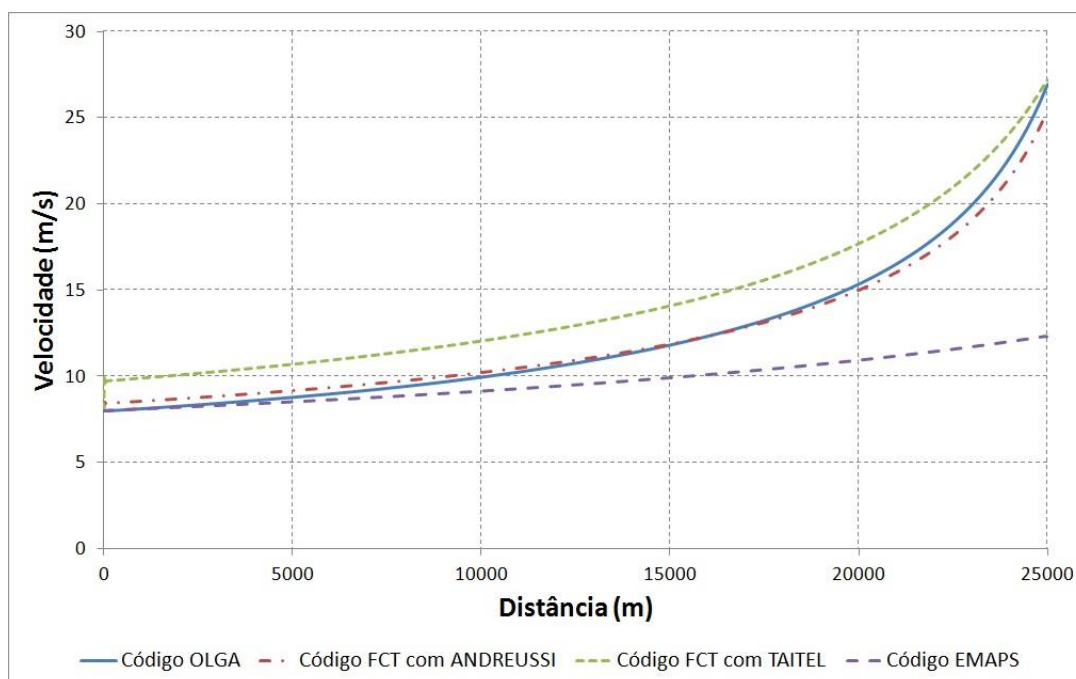


Figura 5.3 – Velocidade de gás ao longo do duto nos diferentes códigos.

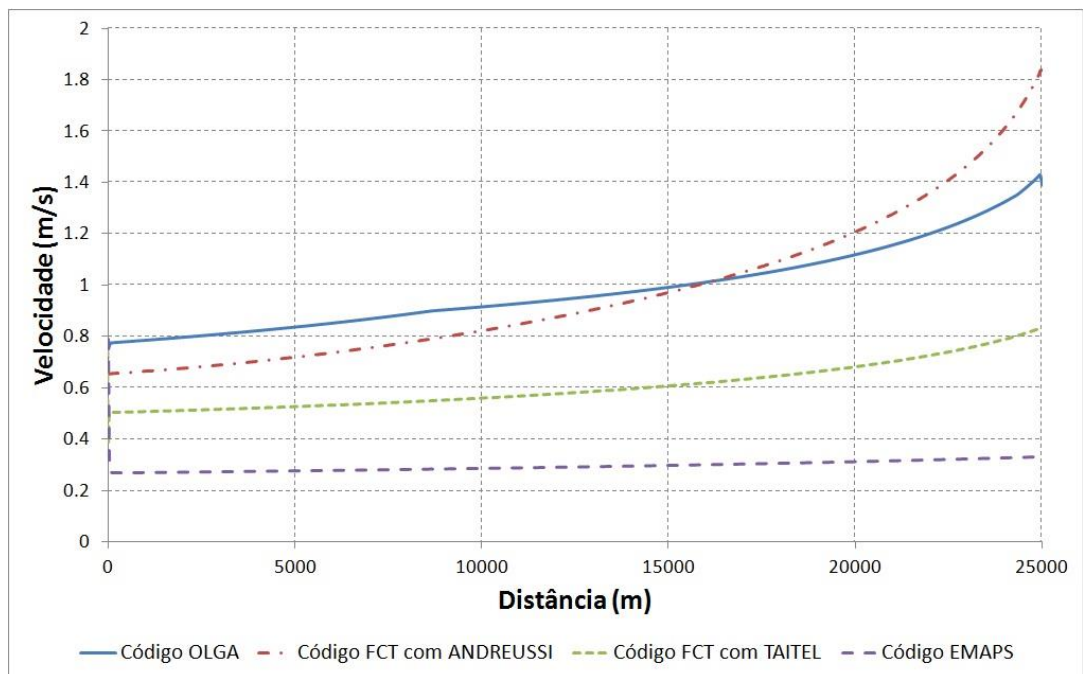


Figura 5.4 – Velocidade de líquido ao longo do duto nos diferentes códigos.

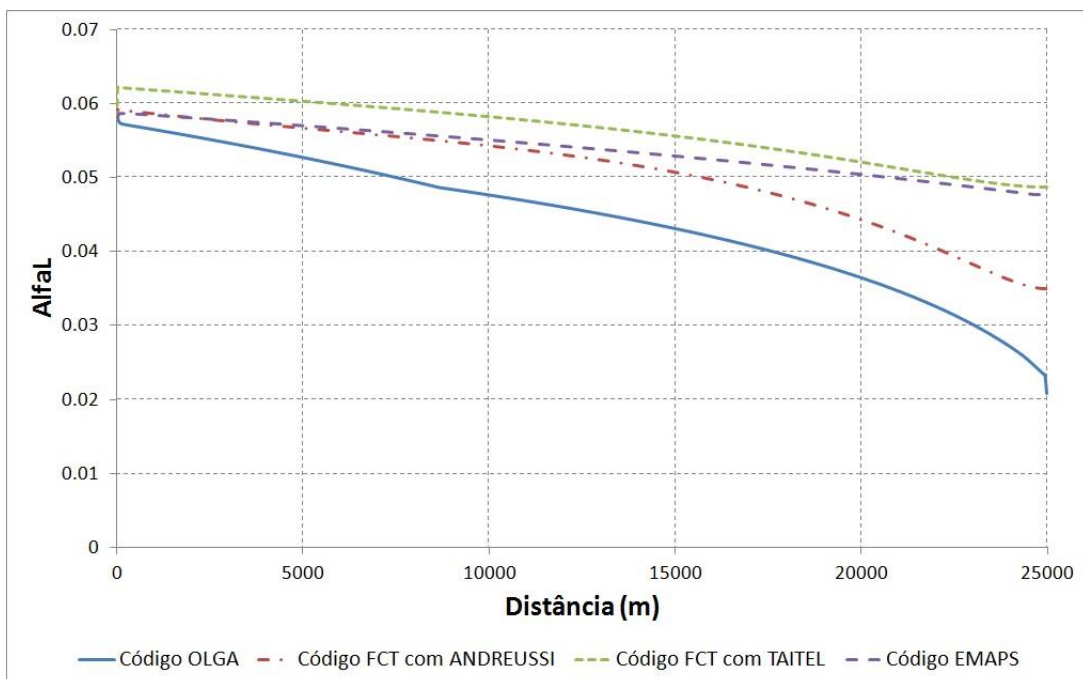


Figura 5.5 – Fração volumétrica de líquido ao longo do duto nos diferentes códigos.

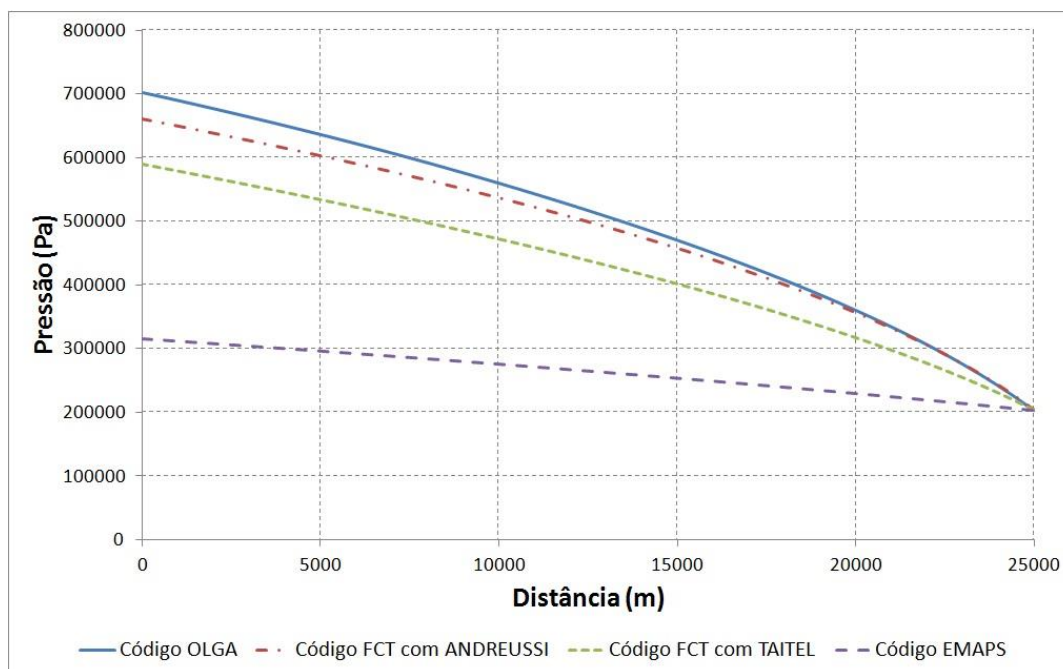


Figura 5.6 – Pressão ao longo do duto nos diferentes códigos.

Como podemos verificar em ambos os gráficos, o código FCT contendo a modelagem proposta neste trabalho, apresenta resultados distintos dependendo da correlação utilizada para o cálculo do fator de fricção na interface (utilizando Moody, Eq. 5.5., ou Andreussi, Eq. 5.6).

Quando comparado com o código OLGA, que é um simulador comercial com correlações diferentes, o código FCT apresenta bons resultados, principalmente com relação às curvas de velocidade de gás (Figura 5.3) e pressão (Figura 5.6), utilizando a correlação de Andreussi para o cálculo do fator de atrito interfacial. As outras duas curvas entretanto, velocidade de líquido (Figura 5.4) e de fração volumétrica de líquido (Figura 5.5) não apresentaram um resultado próximo ao do código OLGA.

Quando comparado com o código EMAPS, embora utilizando as mesmas correlações e hipóteses simplificadoras, os resultados não foram parecidos. O código EMAPS apresentou resultados diferentes quando comparado com o código FCT e com o código OLGA.

Para melhor comparar os resultados, o erro foi calculado nos contornos com relação aos resultados do código OLGA, e são apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Erros Calculados nos Contornos.

Variável	Posição	Código Olga	Código FCT - Taitel	Erro (%)	Código FCT - Andreussi	Erro (%)	Código Emaps	Erro (%)
u_G (m/s)	Saída	26.931	27.183	-0.94	25.376	5.77	12.314	54.27
u_L (m/s)	Saída	1.390	0.835	39.91	1.836	-32.12	0.329	76.31
α_L	Saída	0.021	0.049	-133.72	0.035	-68.21	0.048	-128.82
p (Pa)	Entrada	701881	589669.93	15.99	660044.45	5.96	315803	55.01

Como pode-se verificar o Código FCT com a correlação de Andreussi obteve os menores erros quando comparados com os demais, obtendo os melhores resultados para o cálculo da pressão (5.96%) e para a velocidade de gás (5.77%). Podemos concluir que o uso da correlação de Andreussi é melhor do que o da correlação de Taitel.

5.4.2 Caso 2

Para o caso 2, o resultado obtido para a curva de pressão por FIGUEIREDO (2010), gerado pelos códigos EMAPS e OLGA, foram plotados com os resultados gerados pelo código FCT, como segue na Figura 5.7.

Nele é possível notar que o código FCT apresenta resultados mais próximos aos resultados do código OLGA, embora o código EMAPS também apresente bons resultados. A correlação para o cálculo do fator de atrito na interface tanto para o código EMAPS quanto para o código FCT utilizada foi a correlação de Andreussi.

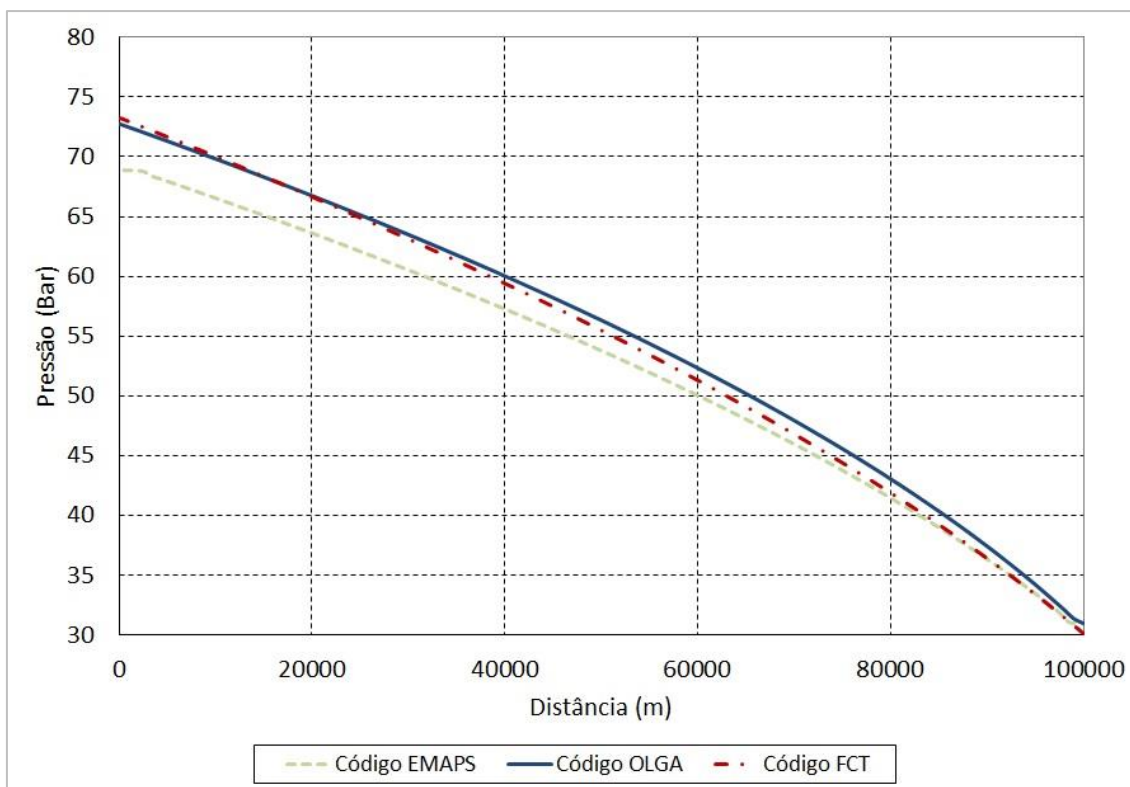


Figura 5.7 – Pressão ao longo do duto nos diferentes códigos.

O erro foi calculado como para o Caso 1 anterior e são apresentados na Tabela 5.6. Como pode-se verificar, mais uma vez o Código FCT com a correlação de Andreussi obteve melhores resultados, com um erro de -0.6%.

Tabela 5.6 – Erros Calculados nos Contornos.

Variável	Posição	Código Olga	Código FCT - Andreussi	Erro (%)	Código Emaps	Erro (%)
Pressão (bar)	Entrada	72.763	73.202	-0.60	68.874	5.35

As Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 apresentam as variações de holdup, velocidade de gás e velocidade de líquido ao longo do duto, respectivamente. Os resultados não foram

comparados visto que o trabalho utilizado apresenta apenas os resultados para a variação de pressão ao longo do duto.

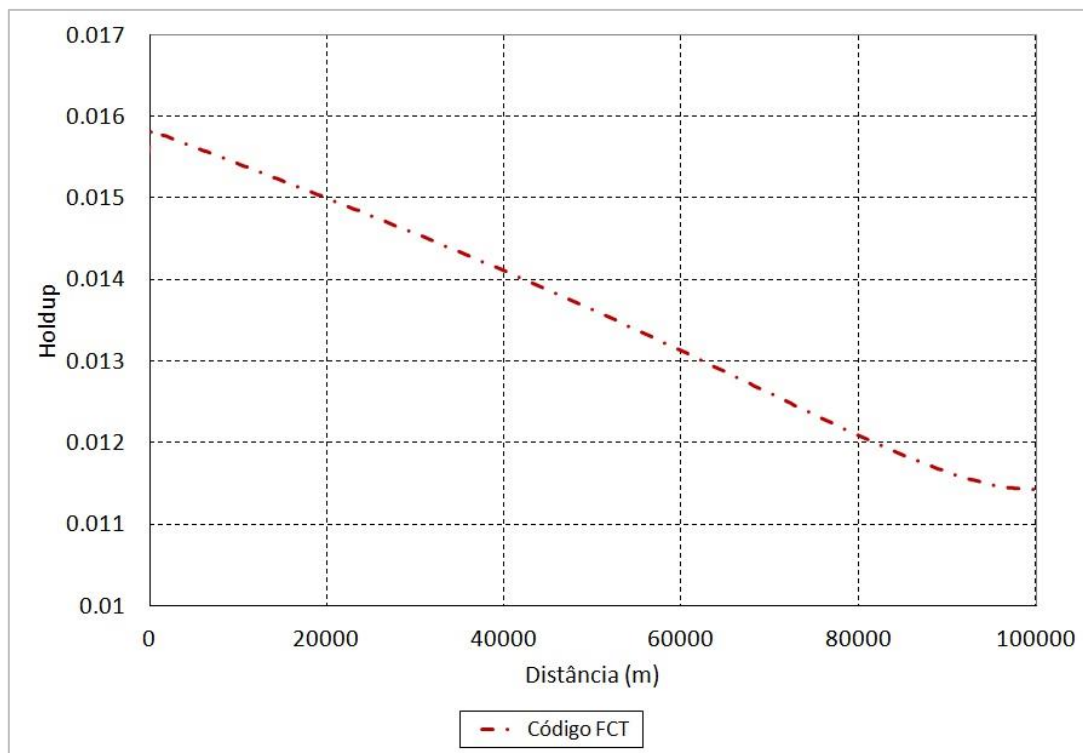


Figura 5.8 – Holdup ao longo do duto.

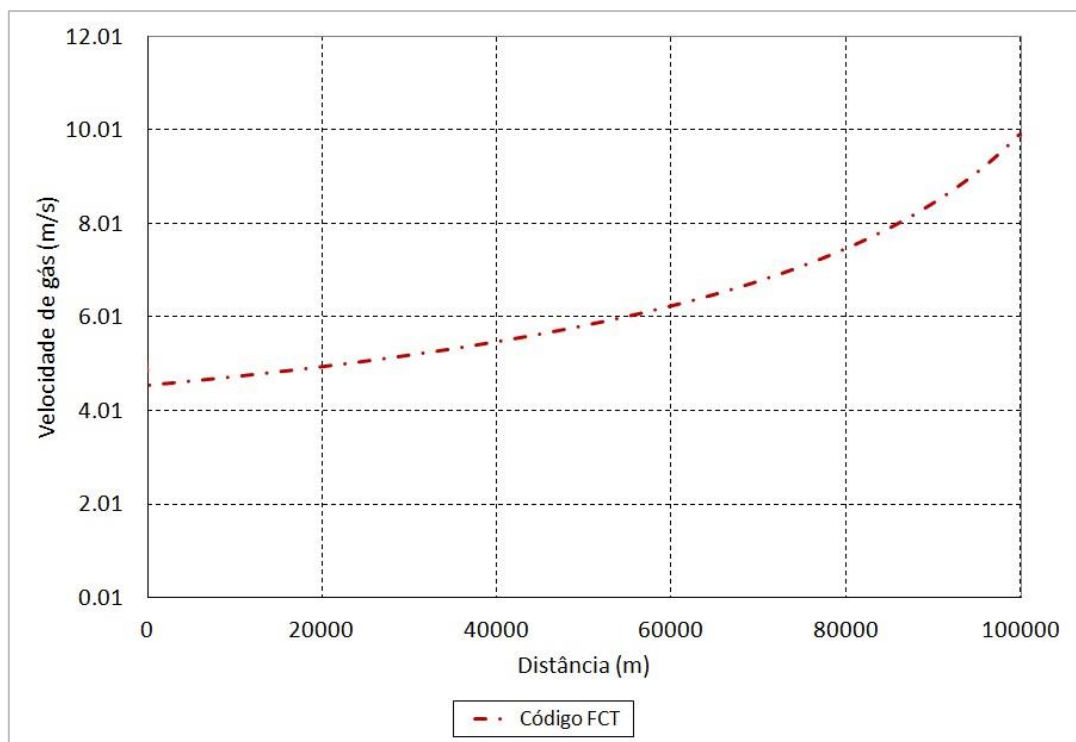


Figura 5.9 – Velocidade de gás ao longo do duto.

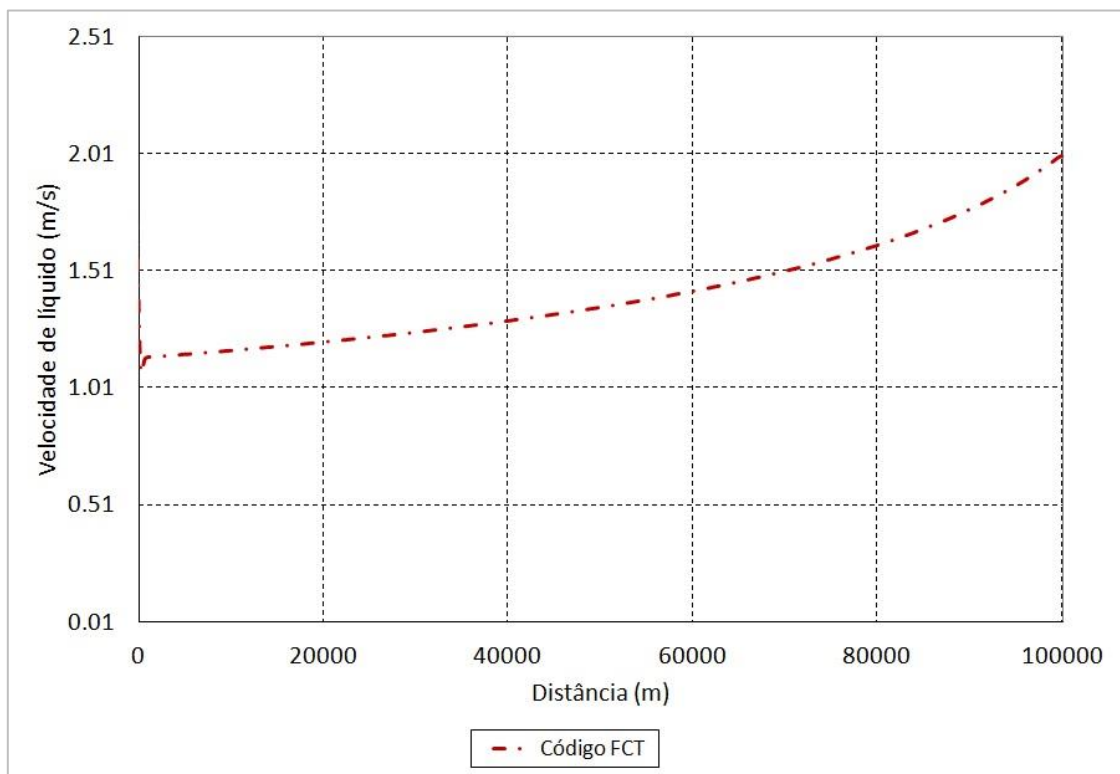


Figura 5.10 – Velocidade de líquido ao longo do duto.

5.4.3 Caso 3

Para o Caso 3, o código foi testado para uma descontinuidade de 10% na pressão posicionada exatamente no meio do duto.

A pressão foi monitorada para n números ($\Delta t = \text{constante} = 0,031$) de passos no tempo em $t=0s$, $0,31s$, $3,1s$, $31s$ e $310s$, e sua variação é apresentada na Figura 5.11.

Como podemos ver nessa figura, o método FCT amortiza as oscilações de pressão ao redor da descontinuidade, ao contrário de outros métodos. Dessa maneira, as ondas que apareceriam à esquerda e à direita da descontinuidade não são “retratadas” pelo método. É possível notar também a influência do contorno sobre os valores ao longo do duto a partir de $t = 3,1s$.

O gráfico apresentado na Figura 5.12 mostra a condição inicial ($n = 0$, $t = 0s$) com a presença da descontinuidade de pressão e o passo final, quando o regime permanente é alcançado ($n = 321815$, $t = 9976,26s$):

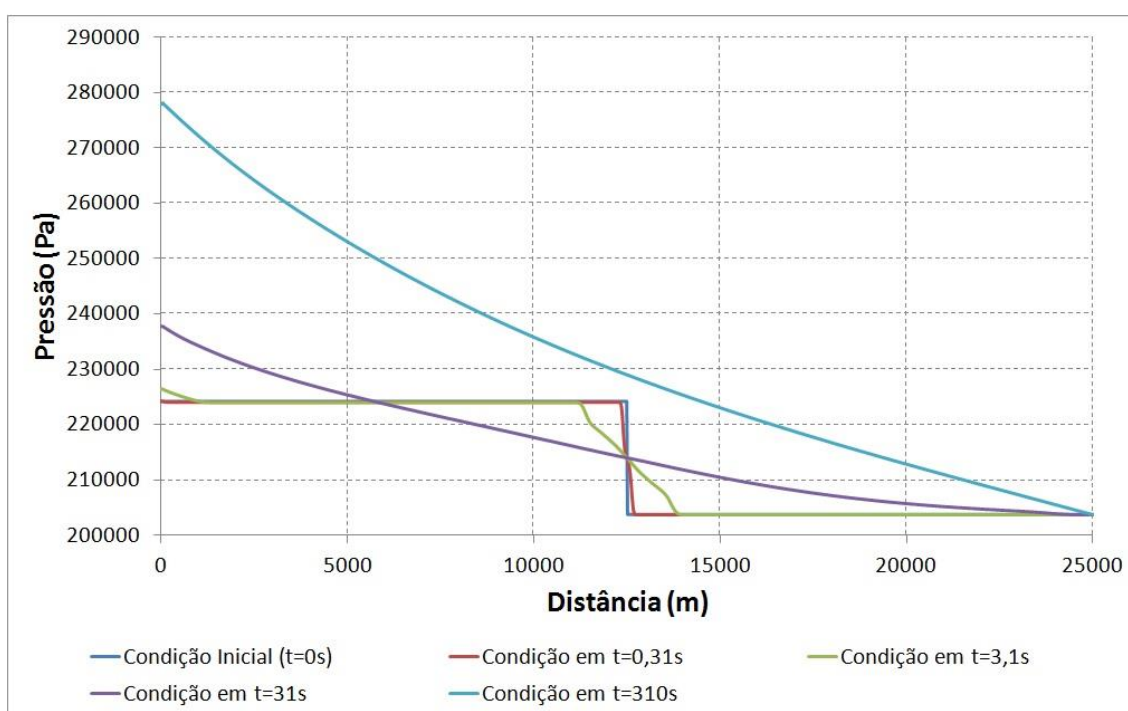


Figura 5.11 – Pressão ao longo do duto em diferentes passos no tempo.

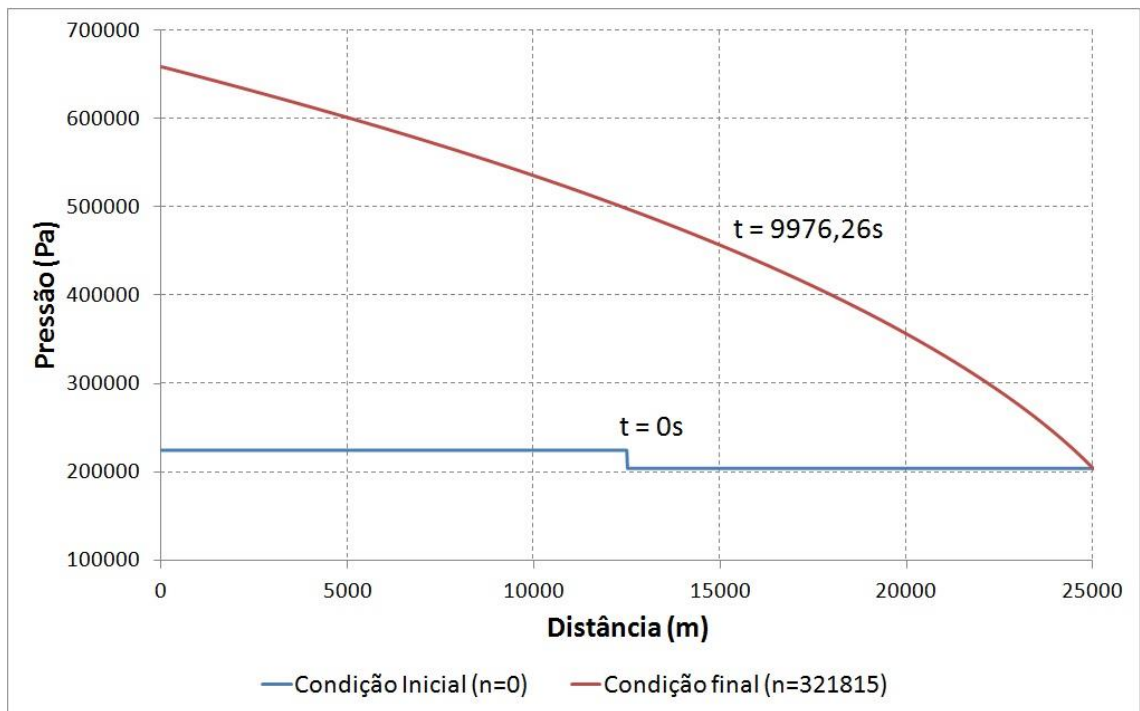


Figura 5.12 – Condições de Pressão Inicial e Final

6. Conclusões

6.1 Introdução

Neste trabalho, uma modelagem numérica completa para escoamentos bifásicos estratificados no interior de gasodutos é apresentada. Essa modelagem consiste de um modelo de dois fluidos, apresentado por OMGBA-ESSAMA (2004) e conhecido como *Single Pressure Model* (SPM-4). Este modelo pressupõe a existência de uma única pressão na interface para as fases gás e líquida, e resolve quatro equações diferenciais, sendo duas para a conservação de massa, uma para a fase gás e outra para a fase líquida, e duas para a conservação de quantidade de movimento, também uma para cada fase. Para o termo conservativo do modelo, o método numérico escolhido foi o *Flux Corrected Transport* (FCT), que é um método de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço, utilizado para resolução de equações hiperbólicas, como as que aparecem em problemas de dinâmica dos gases e em problemas onde ocorre a presença de descontinuidades. O método FCT foi escolhido dada sua simples implementação e geração de resultados bem sucedidos em trabalhos de OMGBA-ESSAMA (2004), FIGUEIREDO (2010) e BAPTISTA (2013). Além disso, a escolha foi reforçada após analisar o estudo de caso apresentado em FLETCHER (1988), comparando os métodos FCT, Ritchmeyer e MacCormack para um escoamento em um gasoduto monofásico com a presença de uma onda de choque (Anexo I). Para o termo não-conservativo, utilizou-se o esquema Minmod de segundo ordem, visto que o de primeira ordem mostrou-se por demais difusivo no trabalho de BAPTISTA (2013). Esse método foi proposto e implementado com sucesso por HARTEN (1983), e utilizado por OMGBA-ESSAMA (2004).

6.2 Principais Conclusões

O código FCT apresentado, contendo o modelo SPM-4 sendo resolvido pelo método FCT e utilizando o esquema Minmod de segunda ordem para o cálculo do termo não-conservativo apresentou bons resultados quando comparados com os resultados gerados pelo código OLGA, que é um simulador de escoamento em dutos comercial altamente utilizado pelas grandes operadoras de dutos e reconhecido mundialmente como uma referência nessa seara. Entretanto, é sabido que o código OLGA contém um equacionamento bem como se utiliza de correlações diferentes. Quando comparado com o código EMAPS, que a princípio contém equacionamento e correlação semelhantes, os resultados ficaram discrepantes para um duto de 25 km. Para um duto de 100 km, os resultados para o perfil de pressão são um pouco melhores. Verificou-se também que dependendo da correlação escolhida para o cálculo do fator de atrito na interface entre as fases, o resultado muda consideravelmente.

Por fim, foi possível observar que o código FCT é capaz de resolver problemas com a presença de descontinuidades de pressão, gerando um transiente relativo até atingir o regime permanente. As oscilações de pressão que são típicas desse fenômeno transiente também são amortizadas pelo método FCT.

6.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Um dos próximos passos para a continuação desse estudo seria a inserção do perfil altimétrico real na simulação, construindo, assim, um gasoduto composto de vários dutos, com angulações e comprimentos variados para se aproximar de um gasoduto real. Um dos caminhos seria considerar subidas e descidas como segmentos distintos calculados separadamente.

Um outro passo seria a melhoria do código FCT inserindo uma melhor equação de estado para o cálculo da pressão e a consideração da fase líquida como compressível, incluindo novas equações constitutivas no modelo.

Outro passo importante seria realizar o cálculo da condição CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*), a cada passo de tempo, alterando assim para cada instante o valor de Δt utilizando a equação (4.32), de maneira a se obter resultados ainda melhores.

Por fim, o desenvolvimento de módulos como acompanhamentos de pigs e detecção de vazamentos pode ser realizados, utilizando modelos presentes na literatura como base, para serem inseridos no código matemático. É importante ressaltar que esses modelos são escassos quando se trata de escoamentos bifásicos e a apresentação de modelos com bons resultados apresenta um carácter inovador.

7. Referências Bibliográficas

ANDREUSSI, P., PERSEN, L. N. “*Stratified Gas-Liquid Flow in Down-Wardly Inclined pipes*”. Intl. J. Multiphase Flow 13, 565-75, 1987.

BAPTISTA, R M, 2007, *On the Estimation of Dual Phase Gas Pipeline Gas Leakage Fow Rate From the Leak Diameter*, Proceedings of the Rio Pipeline Conference, IBP-1238-07, Rio de Janeiro, RJ.

BAPTISTA, Renan Martins, 2013, *Detecção de Vazamentos em Gasodutos com a Presença de Escoamento Bifásico, Baseada em Análise Estatística de Desbalanceamentos de Inventário*. Tese de D.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

BARMIN A. A., KULIKOVSKIY A. G., AND POGORELOV N. V., 1996, *Shock-Capturing Approach and Nonevolutionary Solutions in Magnetohydrodynamics*. Journal of Computational Physics, 126, 77-90.

BENDIKSEN K. H., MALNES D., MOE R., and NULAND S., *The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and Application*. SPE Production Engineering, pp. 171-180, May, 1991.

BONIZZI, M., ANDREUSSI, P., & BANERJEE, S., 2009, *Flow regime independent, high resolution multifield modelling of near horizontal gas-liquid flows in pipelines*, International Journal of Multiphase Flow, 35, 34-46.

BOOK, D. L., BORIS, J. P., & HAIN, K., 1975, *Flux-corrected transport II. - Generalizations of the method*, Journal of Computational Physics, 18, 248-283.

BORIS, J. P., & BOOK, D. L., 1973, *Flux correct transport I - SHASTA - A fluid transport algorithm that works*, Jornal of Computational Physics, 11, 38-69.

BORIS, J. P., & BOOK, D. L., 1976, *Solution of continuity equation by the method of flux-corrected transport*, Journal of Computational Physics, 129, 85-129.

CARNEIRO, J. N. E., FONSECA JR, R., ORTEGA, A. J., CHUCUYA, R. C., NIECKELE, A. O. e AZEVEDO, L. F. A., 2011, *Statistical Characterization of Two-Phase Slug Flow in a Horizontal Pipe*, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering, vol. XXXIII, 251-258.

CHAN, A., & BANERJEE, S., 1981, *Refilling and rewetting of a hot horizontal tube. Part II: structure of a two-fluid model*, Journal of Heat Transfer, 103, 287-291.

COQUEL, F. et al., 1997, *A numerical method using upwind schemes for resolution of two phase flows*, Journal of computational physics, 136, 272-288.

CORRADINI M. L., 1997, *Fundamental of Multiphase Flows*. Department of Engineering Physics, University of Wisconsin.

DREW, D. A., 1983, *Mathematical modeling of two-phase flows*, Annual Review of Fluid Mechanics, 15, 261-291.

DREW D. A. AND PASSMAN S. L., *Theory of Multicomponent Fluids*,. Applied Mathematical Sciences, 135, Berlin, Springer, 1999.

FABRE, J., LINE, A., & PERESSON, L., 1989, *Two fluid/two flow pattern model for transient gas liquid flow in pipes*, In: Proceedings of the 4th BHRG Multiphase Flow International Conference.

FAILLE I. e HEINTZE E., 1999, *A rough finite volume scheme for modelling two-phase flows in a pipeline*. Computers & Fluids, v. 28, pp. 213-241.

FIGUEIREDO, Aline Barbosa, 2010. *Validação teórica de uma modelagem para escoamentos bifásicos em gasodutos com duas equações de conservação para cada fase*. Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

FIGUEIREDO A, BUENO D, BATISTA R, RACHID F and BODSTEIN G. *An accuracy study of the flux-corrected transport numerical method applied to transient*

two-phase flow simulation in gas pipelines. Proceedings of the 2012 9th International Pipeline Conference – IPC 2012. Calgary, Alberta, Canada. September, 2012.

FLETCHER, C. A., 1988, *Computational techniques for fluid dynamics: Specific techniques for flow categories (Vol. 2)*. Springer Verlag.

GASNET, site de gás natural, 2013. Disponível em <http://www.gasnet.com.br/gasodutos.asp#>, Acesso em 29 de novembro de 2013.

GARG R., NARAYANAN C.e SUBRAMANIAM, 2009, *A Numerical convergent Lagrangian Eulerian Simulation Method for Dispersed Two Phase Flows*. International Journal of Multiphase Flow, v. 35, pp. 376-388.

HARTEN, A., 1983, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, 49 (3), 357-393.

HIRSCH, C., 1990, *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of numerical discretization (Vol. 2)*, John Wiley & Sons, New York.

HIRSCH, C., 2007, *Numerical Computations of Internal & External Flows: Volume 1 - Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Second Ed. New York, Elsevier.

ISHII, M., 1975, *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, First edition, Paris, Eyrolles;

ISHII M., HIBIKI T., *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. 1st ed. New York, Springer Science, 2006.

ISHII M, MISHIMA K., *Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations*. Nuclear Engineering and Design, v. 82, pp. 107-126, 1984.

JOHANSEN S. T., ANDERSON N. M., e DE SILVA S. R., 1990, *A two-phase model for particle local equilibrium applied to air classification of powers*. Power Technology, v. 63, pp. 121-132.

LAHEY JR, R. T., & DREW, D. A., 1988, *Three dimensional time and volume averaged conservation equations of two-phase flow*, Advances in Nuclear Science Technology, 1-69.

LEZEAU, P., e THOMPSON, C. P., 1998, *Numerical Simulation of Multi-Phase Flow: Speed, Error Control & Robustness*, Cranfield University Technical Report.

MANNINEN M. e TAIVASSALO V., 1996, *On the mixture model for multiphase flow*, VTT Publications, v. 288, pp. 1-67.

MASELLA J. M., TRAN Q. H, FERRE D., AND PAUCHON C., 1998, *Transient simulation of two-phase flows in pipes*. International Journal Multiphase Flow, v. 24, pp. 739-755.

MOODY, L. F., 1944, *Friction factors for pipe flow*, Transactions of the ASME, 66.

MORI Y., HIJIKATA K. e OHMORI T., 1976, *Propagation of a pressure wave in two-phase flow with very high void fraction*. International Journal of Multiphase Flow, v. 2, pp. 453-464.

OMGBA-ESSAMA, C., 2004, *Numerical modelling of transient gas-liquid flow (application to stratified and slug flows)*, Ph.D. dissertation, Cranfield University, AMAC, Cranfield, UK.

PAREDES, G. E., MENDOZA, R. S., & CAZAREZ-CANDIA, O. 2007, *Averaging model for cuttings transport in horizontal wellbores*, Journal of Petroleum Science and Engineering, 55, 301-316.

PARK, D. et al., 1998, *The analysis of void propagation in adiabatic monodispersed bubbly two-phase flows using an ensemble-averaged two-fluid model*, International Journal of Multiphase Flow , 24, 1205-1244.

PAUCHON C., DHULESIA H., LOPEZ D., e FABRE J., 1993, *TACITE: A Comprehensive Mechanistic Model for Two-Phase Flow*. Presented at the 6th International Conference on Multiphase Production, Cannes, France, June.

PENELOUX, A., & RAUZY, E., 1982, *A consistent correction for Redlich Kwong Soave Volumes*, Fluid Phase Equilibria, 8, 7-23.

PENG D. Y. & ROBINSON D. B., 1976, *A New Two Constant Equation of State*. Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals, v. 15, pp. 59-64.

ROSA, Eugênio S. *Escoamento Multifásico Isotérmico*. 1ªed. São Paulo, Artmed Editora S.A, 2012.

SHARMA Y., SCOGGINS JR. M. W., SHOHAM O., e BRILL J. P., 1985, *Simulation of transient two-phase flow in pipelines*. 2nd International Conference on Multi-Phase Flow, Paper C4, London, England, UK, 19-21 June.

SILVA, Elinaldo Santos, 2006, *Estudo do Escoamento Bifásico em Risers em Movimento na Produção Marítima de Petróleo em Águas Profundas*, Dissertação de M.Sc. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

SOAVE, G, 1972, *Equilibrium Constants from a Modified Redlich Kwong Equation of State*, Chemical Engineering Science , 27, pp 1197, 1972.

TERZIAN, Ricardo Luiz, 2005, *Conceitos e Metodologias de Gestão de Projeto e sua aplicação ao caso da Integridade da Malha Dutoviária*, Dissertação de M.Sc. PUC-RIO, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

TORO, E. F., 1997, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag.

TÓTH, G. & ODRICIL, D., 1996, *Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magneto-hydrodynamic problems*, Journal of Computational Physics, 128, 82-100.

TOUMI I., 1996, *An Upwind Numerical Method for Two-Fluid Two-Phase Flow Models*. Nuclear Science Engineering, v. 123, pp. 147-168.

VAN LEER, B., 1979, *Towards the ultimate conservation difference scheme V, a second order Sequel to Godunov's method*, Journal of Computational Physics, 32, 101-136.

YADIGAROGLOU, G., & LAHEY, R. T., 1976, *On the various forms of the conservation equations in two-phase flow*, International Journal of Multiphase Flow , 2, 477-494.

YEE H. C., 1989, *A Class of High Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods*. Von Karman Institute for Fluid Dynamic, Lecture Series 1989-04 on Computational Fluid Dynamics.

YEOH, G. H., & TU, J., 2010, *Computational techniques for multiphase flows* - Chapter 3 - Solution Methods for Multiphase Flows. Elsevier;

XIAO J. J., & SHOHAM O., 1991, *Evaluation of Interfacial Friction Factor Prediction Methods for Gas/Liquid Stratified Flow*. SPE 22765, 66th Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas.

Apêndice 1 – Estudo de Caso: Validação do FCT

1. Equacionamento

O estudo de caso a seguir consiste em calcular a propagação de uma onda de choque em um escoamento transiente unidimensional. Esse cálculo se dará utilizando três métodos distintos: o método de MacCormack, o método de Lax-Wendroff de dois passos (método de Richtmeyer) e o método FCT (*Flux-Corrected Transport*).

A propagação de uma onda de choque em escoamento unidimensional com viscosidade desprezível é regido pelas equações de governo a seguir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + p \right] \right\} = 0. \quad (3)$$

Essas são equações de conservação conhecidas como equação da continuidade, equação de momentum em x e conservação da energia, respectivamente. Para um gás ideal, como o ar, a energia interna específica em (3) pode ser expressa como:

$$e = c_v T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \quad (4)$$

Onde γ é a razão de calor específico. Com a adição de (4) verifica-se que o conjunto de equações acima apresenta três variáveis dependentes: velocidade (u), massa específica (ρ) e pressão (p).

Para o problema proposto, da onda de choque, condições de contorno são requeridas para velocidade, massa específica e pressão, a montante e a jusante da onda, e são dadas por:

$$\begin{aligned} u &= u_1, & \rho &= \rho_1, & p &= p_1 & \text{em } x = x_1, \\ u &= u_2=0, & \rho &= \rho_2, & p &= p_2 & \text{em } x = x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

No instante inicial ($t=0$), a onda de choque está localizada em $x=x_0$. Dessa maneira, condições iniciais apropriadas são escolhidas abaixo:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_1, & \rho(x,0) &= \rho_1, & p(x,0) &= p_1 & \text{para } x_1 \leq x < x_0, \\ u(x,0) &= 0, & \rho(x,0) &= \rho_2, & p(x,0) &= p_2 & \text{para } x_0 < x \leq x_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Considera-se como hipótese que $x=x_1$, a montante da onda de choque, e $x=x_2$, a jusante da onda, são distantes o suficiente da referida onda de choque.

Para o problema proposto, é conveniente adimensionalizar as variáveis dependentes em relação às condições a jusante da onda de choque. Logo, o conjunto de equações formado por (1) a (3) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x'} = 0 \quad (7)$$

Para tal, tem-se que:

$$\rho_2 a_2^2 = \gamma p_2 \quad (8)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho' u' \\ p' / \gamma (\gamma - 1) + \rho' / 2 (u')^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho' u' \\ \rho' (u')^2 + p'/\gamma \\ \left[p'/\gamma(\gamma-1) + \rho'/2(u')^2 \right] u' \end{bmatrix} \quad (10)$$

Da mesma forma, as condições de contorno adimensionalizadas se apresentam como:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{u_1}{a_2}, \quad \rho'_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad p'_1 = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{em } x'_1 = \frac{x_1}{L}, \\ u'_2 &= 0, \quad \rho'_2 = 1, \quad p'_2 = 1 \quad \text{em } x'_2 = \frac{x_2}{L}. \end{aligned} \quad (11)$$

A razão de pressão dada por p_1/p_2 é o parâmetro que governa esse problema determinando a força e a velocidade de propagação da onda de choque. Para um dado valor da razão de pressão, as condições de contorno de velocidade e massa específica são obtidas pelas relações de Rankine-Hugoniot:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left\{ 2 / \left[\gamma(\gamma+1) \right] \frac{p_2}{p_1} + \gamma(\gamma-1) \right\}^{1/2} \\ \rho'_1 &= \frac{1 + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} + \frac{p_2}{p_1}} \end{aligned} \quad (12)$$

A velocidade de propagação da onda de choque é necessária para determinar a localização da mesma. Essa velocidade também é calculada pelas relações de Rankine-Hugoniot, como segue:

$$u'_{ss} = \frac{u_{ss}}{a_2} = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{p_2}{p_1} \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{1/2} \quad (13)$$

Pode-se calcular a velocidade exata da onda de choque da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_{ex}(x,t) &= u_1, \quad \rho_{ex}(x,t) = \rho_1, \quad \text{para } x_1 \leq x \leq x_0 + u_{ss}t, \\ u_{ex}(x,t) &= 0, \quad \rho_{ex}(x,t) = \rho_2, \quad \text{para } x_0 + u_{ss}t \leq x \leq x_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Esse cálculo é importante para validar os resultados obtidos pelos métodos.

A equação (7) é resolvida pelos métodos de MacCormack e de Lax-Wendroff de dois passos como segue:

i) MacCormack:

$$\mathbf{Q}_j^* = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n), \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_j^n + \mathbf{Q}_j^*) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_j^n - \mathbf{F}_{j-1}^n). \quad (16)$$

ii) Lax-Wendroff:

$$\mathbf{Q}_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_j^n + \mathbf{Q}_{j+1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n), \quad (17)$$

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1/2}^* - \mathbf{F}_{j-1/2}^*). \quad (18)$$

2. Resultados e Discussões

Foram rodados 5 casos distintos para comparar a efetividade dos métodos. Para o caso foi considerado 100 nós espaciais e $\Delta x = 0.01$. A força da onda de choque $p_1/p_2 = 5.0$ e a razão de calor específico $\gamma = 1.4$, que produz uma velocidade de propagação da onda de choque $u'_{ss} = 2.104$. Inicialmente a onda de choque se localiza em $x' = 0.501$. Após 100 passos de $\Delta t = 0.001$, a onda de choque se localiza em $x' = 0.711$.

Com essa configuração simulou-se 5 cenários distintos: (i) FCT com 100 passos de tempo de $\Delta t = 0.001$; (ii) Lax-Wendroff com 100 passos de tempo de $\Delta t = 0.001$; (iii) MacCormack com 100 passos de tempo de $\Delta t = 0.001$; (iv) Lax-Wendroff com 200 passos de tempo de $\Delta t = 0.0005$; e (v) MacCormack com 200 passos de tempo de $\Delta t = 0.0005$.

Verificou-se que os cenários (ii) e (iii) não convergem gerando valores de velocidade tendendo para o infinito. Para os demais casos, gerou-se um gráfico com os resultados finais.

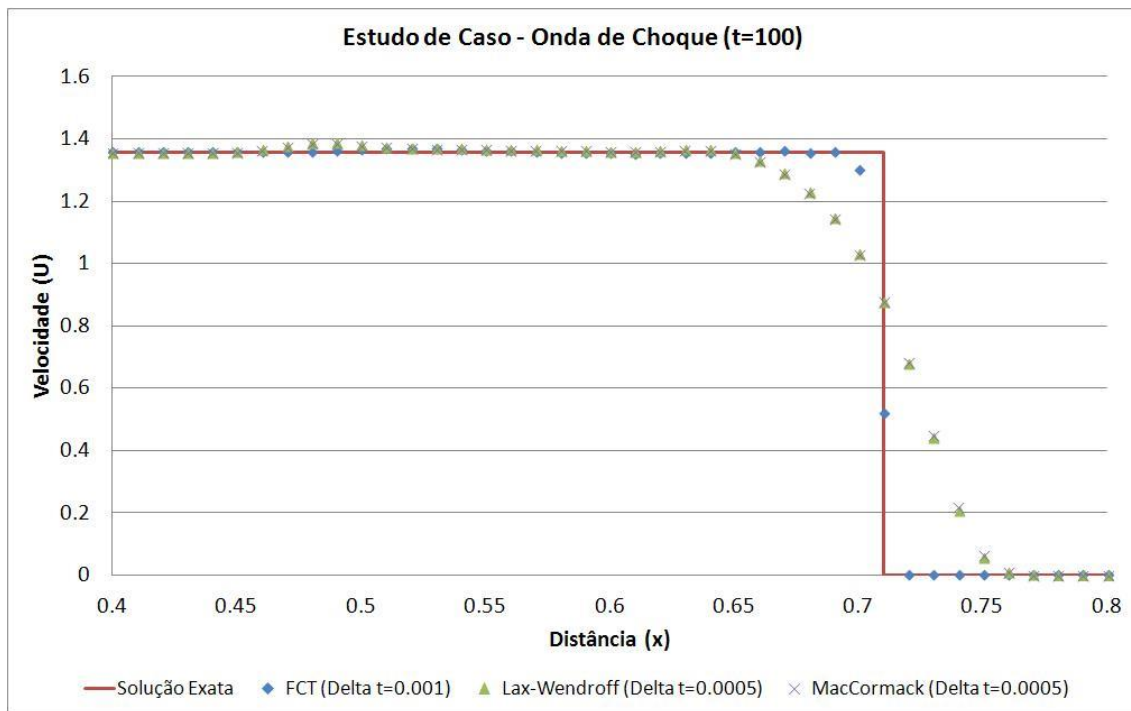


Figura 1 – Resultados para os cenários simulados

Verifica-se, como esperado, que os resultados gerados pelo FCT acompanham melhor a solução exata, do que os métodos Lax-Wendroff e MacCormack, especialmente para a descontinuidade presente em $x' = 0.711$. Pode-se ver também que o método FCT não apresenta oscilações como vemos nos demais métodos em $0.45 \leq x \leq 5.25$. É importante ressaltar que os demais métodos utilizam o dobro do número de passos de tempo que o método FCT. Conclui-se então que o método FCT apresentado é capaz de reproduzir o cenário real de onda de choque, apresentando resultados melhores que os métodos de Lax-Wendroff e MacCormack.

Apêndice 2 – Regime Permanente

Para que o regime permanente, no código FCT, contendo a modelagem apresentada nesse trabalho, fosse considerado como alcançado, i.e., nenhuma variável do processo apresentasse seu valor variando no tempo, foi considerado um procedimento, levando em consideração o vetor $\mathbf{Q}$, das quantidades conservadas, de maneira a verificar se seus valores estariam se alterando no tempo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G \\ \rho_L \alpha_L \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para isso verificou-se, a cada passo no tempo, a variação do vetor $\mathbf{Q}$, quando este é comparado com os valores do mesmo vetor no instante de tempo anterior. Ou seja:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n \quad (2)$$

Adotou-se então o seguinte procedimento:

$$E(\Delta \mathbf{Q}) = \left[\int_0^L |\Delta \mathbf{Q} \cdot \Delta \mathbf{Q}| dx \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^N |\Delta \mathbf{Q} \cdot \Delta \mathbf{Q}| \right]^{1/2} \quad (3)$$

$$TOL_E(\Delta \mathbf{Q}) = tol \cdot \|\mathbf{Q}^{n+1}\| \quad (4)$$

com

$$\|\mathbf{Q}^{n+1}\| = \left[\int_0^L |\mathbf{Q}^{n+1} \cdot \mathbf{Q}^{n+1}| dx \right]^{1/2} \quad (5)$$

onde L é o comprimento do duto, N é a última célula da malha discretizada, tol é a tolerância (nesse trabalho $tol=1 \times 10^{-6}$). Dessa maneira, o regime permanente é declarado como alcançado quando:

$$E(\Delta \mathbf{Q}) \leq TOL_E(\Delta \mathbf{Q}) \quad (6)$$

Vale ressaltar que o vetor das quantidades conservadas $\mathbf{Q}$ é utilizado nesse procedimento em sua forma adimensional, i.e., cada termo é dividido previamente por seu equivalente utilizado como condição de contorno no problema.