

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM GASODUTOS COM UMA  
EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA A MISTURA UTILIZANDO O MÉTODO  
NUMÉRICO FCT

Carina Nogueira Sondermann

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein  
Felipe Bastos de Freitas Rachid

Rio de Janeiro

Maio de 2016

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM GASODUTOS COM UMA  
EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA A MISTURA UTILIZANDO O MÉTODO  
NUMÉRICO FCT

Carina Nogueira Sondermann

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

---

Prof. Felipe Bastos de Freitas Rachid, D.Sc.

---

Prof. Nísio de Carvalho Lobo Brum, D.Sc.

---

Prof. Angela Ourivio Nieckele, Ph.D.

---

Dr. Renan Martins Baptista, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2016

Sondermann, Carina Nogueira

Simulação de escoamento bifásico em gasodutos com uma equação da energia para a mistura utilizando o método numérico FCT/ Carina Nogueira Sondermann. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XXI, 106 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 89-95.

1. Escoamento bifásico. 2. Simulação. 3. Equação da Energia. I. Bodstein, Gustavo César Rachid *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

Dedico este trabalho à minha  
avó Giêda, que não  
pôde vê-lo concretizado.

## AGRADECIMENTOS

Só tenho a agradecer à minha família querida por todo apoio e amor oferecidos ao longo desta jornada. Em especial, meu pai Roberto, minha mãe Marcia, minhas irmãs Melissa e Simone e minha tão amada avó Giêda que sempre foi e sempre será minha referência em tudo na vida.

Gostaria de agradecer ao meu namorado Raphael Viggiano, por todos esses anos juntos de companheirismo, carinho e amor.

Agradeço aos meus professores orientadores Gustavo César Rachid Bodstein e Felipe Bastos de Freitas Rachid por todo tempo que dedicaram a mim e ao meu trabalho para que fosse elaborado da melhor maneira possível. Vocês foram fundamentais nesta caminhada.

Sou grata também aos meus amigos e colegas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica (LABMFA): Rodrigo Patricio, Aline Figueiredo e Jaciara Roberta, por todos os dias de convivência e troca de experiências. Agradeço também ao Renan Baptista pelo conhecimento compartilhado através de cursos e reuniões.

Gostaria de agradecer ao CNPQ pela bolsa de mestrado e à Petrobras pelo apoio científico através do projeto, que forneceu a bolsa de estudos para o meu mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM GASODUTOS COM UMA  
EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA A MISTURA UTILIZANDO O MÉTODO  
NUMÉRICO FCT

Carina Nogueira Sondermann

Maio/2016

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein  
Felipe Bastos de Freitas Rachid

Programa: Engenharia Mecânica

A análise do comportamento de escoamentos em dutos através de uma abordagem numérica é de grande utilidade tanto na fase de projetos quanto na fase de operação. Esse conhecimento é ainda mais útil quando se deseja monitorar o escoamento durante situações adversas, como no caso da ocorrência de vazamentos, formação de hidratos, ou com possíveis intervenções, como passagem de *pigs* para remoção de condensado. Este trabalho objetiva realizar simulações para escoamento bifásico em dutos horizontais no padrão estratificado. O modelo matemático é unidimensional e baseado no modelo de Dois Fluidos que contempla duas equações de conservação de massa e duas equações de conservação de quantidade de movimento, uma para a fase líquida e outra para gasosa, e uma equação de conservação da energia relacionada à mistura. Para resolver o sistema de equações hiperbólicas foi utilizado o método numérico FCT (*Flux-Corrected Transport*). Os resultados da variação de pressão, velocidades, fração volumétrica e temperatura são comparados com um *software* comercial apresentando boa concordância. O coeficiente de transferência de calor é analisado para os casos com fluxo de calor constante na parede e com temperatura constante na parede. Os dois casos foram avaliados com uma correlação da literatura, mostrando resultados satisfatórios.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SIMULATION OF TWO PHASE FLOW IN PIPELINES INCLUDING ONE  
ENERGY EQUATION FOR THE MIXTURE USING THE FCT NUMERICAL  
METHOD

Carina Nogueira Sondermann

May/2016

Advisors: Gustavo César Rachid Bodstein  
Felipe Bastos de Freitas Rachid

Department: Mechanical Engineering

An analysis of the flow behavior through a numerical approach is very useful in both the project and operation phases of a two-phase flow duct. This knowledge is even more useful when it is desired to monitor the flow during adverse situations such as in the occurrence of a leak, the formation of hydrates or possible interventions, such as the passage of pigs for condensate removal. This work aims to perform simulations of gas-liquid two-phase flows, characterized by the stratified-flow pattern, in horizontal pipelines. The mathematical model is one-dimensional and based on the Two-Fluid Model which includes two mass conservation equations and two momentum conservation equations, one for each phase, and one energy conservation equation related to the mixture. To solve the system of hyperbolic equations the FCT (Flux-Corrected Transport) numerical method was used. The results for the distribution of pressure, fluids velocities, holdup and temperature along the duct are compared to the results of a commercial software showing good agreement. The heat transfer coefficient was analyzed for the cases of constant heat flux and constant temperature on the wall. Both cases were compared with a correlation present in the literature, showing also satisfactory results.

# SUMÁRIO

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	<b>XI</b>
<b>ÍNDICE DE TABELAS</b> .....	<b>XV</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>XVII</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO.....	1
1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA .....	1
1.3 OBJETIVOS.....	2
1.3.1 Objetivo Geral.....	2
1.3.2 Objetivos Específicos.....	3
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>5</b>
2.1 ESCOAMENTO MONOFÁSICO .....	5
2.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO.....	7
2.2.1 Classificação de escoamento Bifásico.....	7
2.2.2 Modelagem de escoamento Bifásico .....	8
2.2.3 Trabalhos em escoamento Bifásico em Gasodutos .....	10
<b>3. MODELO MATEMÁTICO PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO</b> .....	<b>13</b>
3.1 HIPÓTESES PARA O ESCOAMENTO BIFÁSICO .....	13
3.2 GEOMETRIA DO DUTO.....	14
3.3 FRAÇÕES VOLUMÉTRICAS PARA AS FASES .....	14
3.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO .....	15
3.5 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	18
3.5.1 Fator de Atrito na Parede .....	18
3.5.2 Fator de Atrito Interfacial .....	19
3.5.3 Relações Geométricas .....	19
3.5.4 Fluxo de Calor.....	20
<b>4. MÉTODO NUMÉRICO</b> .....	<b>24</b>
4.1 EQUAÇÕES NA FORMA CANÔNICA.....	24
4.2 MODELO NUMÉRICO E DISCRETIZAÇÃO .....	25
4.2.1 Discretização do Termo de Fluxo Conservativo.....	26
4.2.2 Discretização do Termo de Fluxo Não Conservativo .....	29

4.2.3	Imposição das Condições de Contorno .....	30
4.2.4	Crítério de Convergência .....	31
<b>5.</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO .....</b>	<b>33</b>
5.1	HIPÓTESES DO ESCOAMENTO MONOFÁSICO PARA GASES .....	33
5.2	EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO.....	33
5.3	EQUAÇÕES ESCRITAS NA FORMA CONSERVATIVA.....	34
5.4	VALIDAÇÃO DO MÉTODO FCT PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO.	35
5.4.1	Validação do FCT com o escoamento na Linha Fanno.....	35
5.4.2	Validação do FCT com escoamento no tubo de choque.....	41
5.4.3	Validação do FCT com a solução em regime permanente .....	47
<b>6.</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO.....</b>	<b>54</b>
6.1	ESTUDO DA MALHA E ACURÁCIA DO MÉTODO NO ESPAÇO.....	54
6.2	REFINAMENTO DA MALHA E O IMPACTO NA SOLUÇÃO .....	57
6.3	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COM O <i>SOFTWARE</i> OLGA.....	61
6.3.1	Breve Descrição do OLGA .....	62
6.3.2	Determinação das propriedades dos fluidos óleo e gás.....	62
6.3.3	Configurações do duto .....	63
6.3.4	Condições de contorno .....	64
6.3.5	Resultados da comparação com OLGA para fluidos tipo 1.....	65
6.3.6	Resultados da comparação com OLGA para fluidos tipo 2.....	68
6.4	VALIDAÇÃO DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	71
6.4.1	Caso de validação do coeficiente de transferência de calor para fluxo constante na parede do duto – dimensões de um duto de laboratório.....	73
6.4.2	Caso de validação do coeficiente de transferência de calor para fluxo constante na parede do duto – dimensões de um gasoduto real.....	76
6.4.3	Caso de validação do coeficiente de transferência de calor para temperatura constante na parede do duto – dimensões de um gasoduto real.....	77
6.5	AValiação da hipótese de escoamento isotérmico.....	78
<b>7.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>85</b>
7.1	CONCLUSÕES.....	85
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	88
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>89</b>

<b>APÊNDICE A. ANÁLISE DE HIPERBOLICIDADE E AVALIAÇÃO DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO .....</b>	<b>96</b>
<b>APÊNDICE B. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA.....</b>	<b>104</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Padrões de escoamento bifásico em dutos horizontais ou com uma pequena inclinação.....	8
Figura 3.1: Seção transversal de um gasoduto com escoamento bifásico. ....	14
Figura 3.2: Associação de resistências térmicas em série na seção transversal do gasoduto. ....	21
Figura 5.1: Variação da massa específica ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno .....	38
Figura 5.2: Variação da temperatura ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno. ....	38
Figura 5.3: Variação da velocidade ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno. ....	39
Figura 5.4: Variação da pressão ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno. ....	39
Figura 5.5: Representação do tubo de choque.....	41
Figura 5.6: Variação da massa específica ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $6,1 \times 10^{-3}$ s. ....	43
Figura 5.7: Variação da temperatura ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $6,1 \times 10^{-3}$ s. ....	43
Figura 5.8: Variação da velocidade ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $6,1 \times 10^{-3}$ s. ....	44
Figura 5.9: Variação da pressão ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $6,1 \times 10^{-3}$ s. ....	44
Figura 5.10: Variação da massa específica ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $9 \times 10^{-3}$ s. ....	45
Figura 5.11: Variação de temperatura ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $9 \times 10^{-3}$ s. ....	45
Figura 5.12: Variação de velocidade ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $9 \times 10^{-3}$ s. ....	46
Figura 5.13: Variação de pressão ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo $9 \times 10^{-3}$ s. ....	46

Figura 5.14: Variação da temperatura ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente. ....	50
Figura 5.15: Variação da temperatura obtida para o caso de comparação com o regime permanente na região de entrada (até 1 km de comprimento).....	51
Figura 5.16: Variação da velocidade ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente. ....	51
Figura 5.17: Variação da pressão ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente. ....	52
Figura 5.18: Variação do número de Mach ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente. ....	52
Figura 6.1: Erro relativo da variável global em função da malha. ....	56
Figura 6.2: Erro relativo da variável local em função da malha.....	56
Figura 6.3: Temperatura ao longo do duto para o caso de estudo da malha. ....	58
Figura 6.4: Temperatura ampliada na região de entrada do duto para o caso de estudo da malha (até 16 km de comprimento).....	58
Figura 6.5: Velocidade de líquido ao longo do duto para o caso de estudo da malha....	59
Figura 6.6: Velocidade de gás ao longo do duto para o caso de estudo da malha. ....	59
Figura 6.7: Pressão ao longo do duto para o caso de estudo da malha.....	60
Figura 6.8: Fração volumétrica de líquido ao longo do duto para o caso de estudo da malha. ....	60
Figura 6.9: Resultados de temperatura ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.....	65
Figura 6.10: Resultados de velocidade de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.....	66
Figura 6.11: Resultados de velocidade de gás ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.....	66
Figura 6.12: Resultados de pressão ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA. ....	67
Figura 6.13: Resultados de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.....	67
Figura 6.14: Resultados de temperatura ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA.....	69
Figura 6.15: Resultados de velocidade de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA.....	69

Figura 6.16: Resultados de velocidade de gás ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA.....	70
Figura 6.17: Resultados de pressão ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA.....	70
Figura 6.18: Resultados de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA.....	71
Figura 6.19: Variação do coeficiente de transferência de calor calculado ao longo do duto para caso fluxo constante na parede com duto não real. ....	75
Figura 6.20: Variação do coeficiente de transferência de calor calculado ao longo do duto para caso fluxo constante na parede com duto real. ....	77
Figura 6.21: Variação do coeficiente de transferência de calor calculado ao longo do duto para caso temperatura constante na parede com duto real.....	78
Figura 6.22: Variação da temperatura e do fluxo de calor ao longo do duto para caso quase-isotérmico.....	81
Figura 6.23: Variação da temperatura e do fluxo de calor ao longo do duto para caso não-isotérmico. ....	81
Figura 6.24: Variação de pressão ao longo do duto. ....	82
Figura 6.25: Variação de velocidade de gás ao longo do duto.....	83
Figura 6.26: Variação de velocidade de líquido ao longo do duto.....	83
Figura 6.27: Variação de fração volumétrica de líquido ao longo do duto. ....	84
Figura A.1: Análise de hiperbolicidade para o caso do estudo da malha com ar e água. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto. ....	99
Figura A.2: Análise de hiperbolicidade para o caso fluidos Tipo 1. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.....	99
Figura A.3: Análise de hiperbolicidade para o caso fluidos Tipo 2. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.....	100
Figura A.4: Análise de hiperbolicidade para o caso da validação com correlação GHAJAR E TANG (2010) para fluxo prescrito com gasoduto de dimensões não reais. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto. ....	100
Figura A.5: Análise de hiperbolicidade para o caso da validação com correlação GHAJAR E TANG (2010) para fluxo prescrito com gasoduto de dimensões não reais. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto. ....	101

Figura A.6: Análise de hiperbolicidade para o caso da validação com correlação GHAJAR E TANG (2010) para temperatura constante com gaso duto de dimensões reais. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto. ....	101
Figura A.7: Análise de hiperbolicidade para o caso da hipótese de escoamento isotérmico – Caso quase-isotérmico. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto. ....	102
Figura A.8: Análise de hiperbolicidade para o caso da hipótese de escoamento isotérmico – Caso não-isotérmico. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto. .....	102

# ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1: Dados de entrada do escoamento da linha Fanno.....	37
Tabela 5.2: Erro relativo em relação ao número de células discretizadas para o escoamento monofásico.....	40
Tabela 5.3: Dados de entrada para o caso do tubo de choque.....	42
Tabela 5.4: Dados de entrada para o caso em regime permanente.....	50
Tabela 6.1: Dados do escoamento e configuração do duto para o estudo do refinamento da malha.....	55
Tabela 6.2: Condições de contorno para o caso de estudo do refinamento da malha. ...	55
Tabela 6.3: Erros relativos e tempo de simulação referentes ao estudo da malha. ....	61
Tabela 6.4: Propriedades dos fluidos óleo e gás.....	63
Tabela 6.5: Dados da configuração do duto para o caso de comparação com OLGA... ..	64
Tabela 6.6: Condições de contorno para o caso com fluidos Tipo 1 para comparação com OLGA.....	64
Tabela 6.7: Condições de contorno para o caso com fluidos Tipo 2 para comparação com OLGA.....	64
Tabela 6.8: Configuração do duto e do escoamento para o caso de validação com GHAJAR E TANG (2010) para o caso de fluxo constante na parede com duto não real.....	74
Tabela 6.9: Condições de contorno para validação com correlação de GHAJAR E TANG (2010) para caso fluxo constante na parede com duto não real.....	74
Tabela 6.10: Configuração do duto e do escoamento para o caso de validação com GHAJAR E TANG (2010) para o caso de fluxo constante na parede com gasoduto real.....	76
Tabela 6.11: Condições de contorno para validação com correlação de GHAJAR E TANG (2010) para caso fluxo constante na parede com gasoduto real.....	76
Tabela 6.12: Condições de contorno para validação com correlação de GHAJAR E TANG (2010) para caso temperatura constante na parede para duto real.....	77
Tabela 6.13: Condições de contorno para a análise da hipótese de escoamento quase-isotérmico para o caso isotérmico.....	79
Tabela 6.14: Condições de contorno para a análise da hipótese de escoamento isotérmico para o caso não-isotérmico.....	79

Tabela 6.15: Dados da configuração do duto e do escoamento para a análise da hipótese de escoamento isotérmico.....	80
---	----

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos latinos:

$A$	Área da seção transversal [m <sup>2</sup> ]
$A_k$	Área da seção transversal para cada fase $k$ [m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{A}$	Matriz dos termos conservativos Eq. (5.18)
$\mathbf{B}$	Matriz quadrada singular definida na Eq. (A.1) do Apêndice A
$B_{fk}$	Termo de força de corpo para cada fase $k$ [kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> ]
$c_G$	Velocidade do som no gás [m/s]
$c_{GT}$	Constante Eq. (6.2)
$c_{vk}$	Calor específico a volume constante para cada fase $k$ [J/kgK]
$\mathbf{C}$	Matriz quadrada singular definida na Eq. (A.1) do Apêndice A
$CFL$	Número de CFL, Courant-Friedrichs-Lewy
$D_i$	Diâmetro interno do duto [m]
$D_e$	Diâmetro externo do duto [m]
$D_h$	Diâmetro hidráulico [m]
$D_{hk}$	Diâmetro hidráulico para cada fase $k$
$e_k$	Energia interna térmica [J/kg]
$E_k$	Energia total [J/kg]
$E_o$	Número de Eötvös
$f_I$	Fator de atrito na interface
$f_k$	Fator de atrito de cada fase $k$
$f_o$	Fator de atrito da Equação de Gnielinski
$F$	Número de Froude
$F_P$	Parâmetro definido na Eq. (6.5)
$F_S$	Parâmetro definido na Eq. (6.5)
$\mathbf{f}$	Vetor do termo fonte Eq. (5.18)
$\mathbf{F}$	Vetor dos termos de fluxo

$F^{ad}$	Termo de fluxo anti-difusivo
$F^{cad}$	Correção do termo de fluxo anti-difusivo
$F^d$	Termo de fluxo difusivo
$\hat{F}^{FCT}$	Vetor dos termos de fluxo calculados pelo FCT
$\hat{F}^{RI}$	Vetor dos termos de fluxo calculados por Ritchmyer
$g$	Aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$G_r$	Número de Grashof
$h$	Coefficiente de transferência de calor total [W/m <sup>2</sup> K]
$h_{externo}$	Coefficiente de transferência de calor externo ao duto [W/m <sup>2</sup> K]
$h_{interno}$	Coefficiente de transferência de calor interno ao duto [W/m <sup>2</sup> K]
$h_L$	Altura de líquido na seção transversal [m]
$h_{L,ST}$	Coefficiente de transferência de calor do líquido calculado pela equação de Sieder e Tate [W/m <sup>2</sup> K]
$h_{total}$	Coefficiente de transferência de calor total [W/m <sup>2</sup> K]
$h_{TP,FCT}$	Coefficiente de transferência de calor bifásico calculado pela equação de Gnielinski no FCT [W/m <sup>2</sup> K]
$h_{TP,GT}$	Coefficiente de transferência de calor bifásico calculado pela correlação de GHAJAR E TANG (2010) [W/m <sup>2</sup> K]
$H$	Matriz dos termos não conservativos
$i$	Variação do número de equações
$j$	Discretização espacial
$k$	Índice caracterizador de fase, G para gás ou L para líquido
$K$	Condutividade térmica [W/mK]
$K_{duto}$	Condutividade térmica do duto [W/mK]
$K_k$	Condutividade térmica da fase $k$ [W/mK]
$\dot{K}_k$	Temo referente à energia cinética [W]
$L$	Comprimento do duto [m]
$L_{max}$	Comprimento do duto em que Mach é igual à unidade [m]
$m$	Função definida na Eq. (4.22)

$\dot{m}_G$	Vazão mássica de gás [kg/s]
$m_{GT}$	Constante Eq. (6.2)
$\dot{m}_L$	Vazão mássica de líquido [kg/s]
$\dot{m}_{total}$	Vazão mássica total [kg/s]
$M$	Número de Mach
$N$	Número de células de discretização
$N_{EQ}$	Número de Equações
$Nu_D$	Número de Nusselt relativo ao diâmetro
$Nu_{Dk}$	Número de Nusselt de cada fase $k$
$p$	Pressão [Pa]
$P_{ck}$	Termo de correção de pressão de cada fase $k$ [Pa]
$P_{GT}$	Constante Eq. (6.2)
$P$	Quantidade de movimento linear [kgm/s]
$P_{ref}$	Quantidade de movimento linear de referência [kgm/s]
$Pr_k$	Número de Prandtl de cada fase $k$
$q_{GT}$	Constante Eq. (6.2)
$q''_{ik}$	Fluxo de calor na interface para cada fase $k$ [W/m <sup>2</sup> ]
$q''_k$	Fluxo de calor por condução axial [W/m <sup>2</sup> ]
$q''_{wall}$	Fluxo de calor na parede do duto [W/m <sup>2</sup> ]
$q''_{wk}$	Fluxo de calor na parede para cada fase $k$ [W/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{Q}$	Vetor de variáveis conservadas
$\mathbf{Q}^d$	Vetor de variáveis conservadas da solução difusiva
$\bar{\mathbf{Q}}$	Vetor das variáveis conservadas médio calculado na Eq. (4.13)
$\tilde{\mathbf{Q}}$	Vetor de variáveis conservadas atualizado
$\dot{Q}_k$	Temo referente ao calor [W]
$r_e$	Raio externo do duto [m]
$r_{GT}$	Constante Eq. (6.2)
$r_i$	Raio interno do duto [m]

$R$	Constante dos gases [J/kgK]
$Re_k$	Número de Reynolds para cada fase $k$
$Re_{sk}$	Número de Reynolds referente calculado a partir da velocidade superficial de cada fase $k$
$S$	Função sinal definida na Eq. (4.19)
$S_I$	Perímetro da interface [m]
$S_k$	Perímetro molhado de cada fase $k$ [m]
$\mathbf{S}$	Vetor dos termos fonte
$t$	Tempo [s]
$t^n$	Discretização no tempo
$T$	Temperatura do fluido [K]
$T_\infty$	Temperatura do ambiente [K]
$T_I$	Termo do atrito na interface [kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> ]
$T_{kw}$	Termo do atrito na parede do duto para cada fase $k$ [kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> ]
$T_{wall}$	Temperatura da parede do duto [K]
$u_k$	Velocidade de cada fase $k$ [m/s]
$u_{sk}$	Velocidade superficial da fase $k$ [m/s]
$\dot{U}_k$	Temo referente à energia interna térmica [W]
$V_k$	Volume ocupado por cada fase $k$ [m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{W}$	Vetor de variáveis primitivas
$\dot{W}_{ext}$	Temo referente à potência dos esforços externos [W]
$\dot{W}_{int}$	Temo referente à potência dos esforços internos [W]
$x$	Coordenada cartesiana longitudinal [m]
$x$	Razão entre a vazão mássica de gás e a vazão mássica total na Eqs.(6.2) e (6.4)
$X$	Variável adimensional definida na Eq. (3.12)
$\mathbf{x}$	Vetor definido na Eq. (4.23)
$\mathbf{y}$	Vetor definido na Eq. (4.23)
$\mathbf{z}$	Vetor definido na Eq. (4.23)

### Símbolos gregos:

$\alpha_k$	Fração volumétrica da fase $k$
$\beta$	Ângulo de inclinação entre o duto e a horizontal [graus]
$\gamma$	Razão dos calores específicos
$\Delta\mathbf{Q}^d$	Varição do vetor de variáveis conservadas da solução difusiva
$\Delta t$	Varição no tempo [s]
$\Delta x$	Varição da distância [m]
$\varepsilon$	Rugosidade superficial [m]
$\xi$	Erro relativo
$\eta$	Coefficiente de expansão térmica [1/K]
$\lambda$	Autovalores
$\lambda_{\max}^n$	Maior velocidade em que as ondas de pressão se propagam [m/s]
$\mu$	Coefficiente anti-difusivo Eq. (4.16)
$\mu_k$	Viscosidade dinâmica de cada fase $k$ [kg/ms]
$\mu_{L,w}$	Viscosidade dinâmica à temperatura da parede [kg/ms]
$\nu$	Coefficiente difusivo Eq. (4.14)
$\nu_k$	Viscosidade dinâmica de cada fase $k$ [m <sup>2</sup> /s]
$\rho_k$	Massa específica de cada fase $k$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Tensão superficial [N/m]
$\tau_I$	Tensão na interface [Pa]
$\tau_k$	Tensão na parede de cada fase $k$ [Pa]
$\chi$	Variável dependente do problema

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Escoamento bifásico de líquido e gás está presente em inúmeras aplicações, como por exemplo, no setor de refrigeração, na área nuclear e também na indústria de óleo e gás. Para aplicações da indústria de óleo de gás, o escoamento bifásico está presente, dentre outros exemplos, nos gasodutos, cuja função é transportar petróleo e gás natural.

Atualmente, no Brasil, a maior parte das reservas de petróleo do país está localizada em campos de petróleo no mar, o que tem levado as atividades de perfuração a atingirem profundidades cada vez maiores, como por exemplo, os campos de petróleo presentes no pré-sal (PETROBRAS). Os gasodutos que estão localizados no mar transportam petróleo e gás natural da plataforma até unidades de processamento em terra. Durante este caminho, que pode ter distâncias muito longas incluindo trajetos horizontais ou inclinados, as fases líquida e gasosa se acomodam de diversas maneiras, segundo padrões de escoamento que podem ser estratificado, golfadas (*slug*), bolhas ou anular, que vão depender das condições do escoamento como diâmetro e inclinação da tubulação e das velocidades superficiais de cada fase.

O escoamento no interior dos gasodutos está sujeito a sofrer variações de pressão, temperatura, velocidades e frações volumétricas que devem ser acompanhadas ao longo do tempo a fim de manter o funcionamento dos equipamentos associados à operação, tais como compressores e separadores da mistura óleo e gás, e garantir o fluxo do escoamento da produção. Segundo BAPTISTA (2013), durante todo o percurso do escoamento bifásico nos gasodutos, é comum que só ocorram medições na entrada e na saída do duto, devido à inviabilidade de medição no seu interior. Sendo assim, há um grande interesse em simular numericamente escoamentos bifásicos nesta região em que muitas influências com o meio externo podem ocorrer e que podem levar a impactos significativos na produção.

## 1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA

Ao longo do escoamento, algumas intervenções são necessárias, como a passagem de *pigs* para remoção de condensado, o que exige um acompanhamento do processo como

um todo, verificando assim como se comporta o escoamento com a influência do *pig* na linha. Além disso, o escoamento pode estar sujeito a situações adversas, como a ocorrência de um vazamento na tubulação, tornando-se necessário localizar e quantificar este vazamento, a fim de reduzir os possíveis impactos tanto para o escoamento quanto para o ambiente em que o duto está imerso.

Outra situação crítica que o gasoduto pode estar submetido é quando há uma considerável troca térmica entre os fluidos e o ambiente externo, que pode afetar as propriedades do fluido e também pode colaborar para a deposição de parafina e formação de hidratos, o que levaria ao entupimento do duto. O estudo da transferência de calor permite uma melhor análise do escoamento ao longo do duto, evitando possíveis problemas gerados pela falta de informação relacionada à variação da temperatura.

De modo a acompanhar a evolução do escoamento bifásico nos gasodutos, é necessário ter um modelo numérico capaz de descrever o escoamento e produzir resultados que identifiquem e prevejam situações desejadas ou adversas que estejam presentes na linha do duto. A análise deste problema envolve a utilização de um modelo matemático de escoamento bifásico em conjunto com técnicas numéricas para resolver este sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas e não lineares e as suas correspondentes condições iniciais e de contorno. Este trabalho aborda o tema simulações de escoamento bifásico em gasodutos, calculando as variações dos parâmetros do escoamento como pressão, velocidades dos fluidos, fração volumétrica de líquido e temperatura ao longo do duto e ao longo do tempo para casos relevantes para a indústria de óleo e gás.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é simular escoamentos bifásicos em gasodutos considerando a variação de temperatura no escoamento ao longo do duto. Para isso, é utilizado um modelo matemático resolvido numericamente na forma de um código em linguagem FORTRAN (INTEL), que permita inclusão de diferentes fenômenos físicos relevantes em trabalhos futuros, tais como vazamento, passagem de *pigs*, dentre outros.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Um dos objetivos específicos deste trabalho é utilizar o método numérico FCT, Transporte de Fluxo Corrigido (do inglês, *Flux-Corrected Transport*), proposto inicialmente por BORIS E BOOK (1973) para resolver o sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas. O FCT é um método para discretização dos termos de fluxo das equações de conservação, de segunda ordem no espaço. Vale mencionar que na literatura aberta, não se encontrou trabalhos que utilizam o modelo abordado, envolvendo as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, com resolução baseada no método FCT.

Almeja-se, como etapa inicial, realizar simulações de escoamento monofásico para gases e validá-las com soluções analíticas, utilizando o FCT. Estas simulações são realizadas a fim de verificar como o método numérico se comporta ao se incluir a equação da energia.

Outra meta deste trabalho é utilizar o modelo matemático de Dois Fluidos composto pelas equações de conservação de massa e de quantidade de movimento que são aplicadas às correspondentes fases e uma equação da energia relacionada à mistura das fases como um todo. O escoamento é considerado unidimensional e transiente, contemplando os aspectos da hidrodinâmica e a da transferência de calor, sem mudança de fase, no escoamento bifásico de líquido e gás no padrão estratificado em dutos horizontais.

Outro objetivo específico deste trabalho é realizar uma análise de acurácia no espaço, do método numérico utilizado, o FCT, verificando assim, o número mínimo de células de discretização em que o método se comporta efetivamente como de segunda ordem.

Objetiva-se também realizar uma comparação entre os resultados obtidos para escoamentos bifásicos de óleo e gás com o FCT e com o *software* comercial OLGA (SHLUMBERGER). Deseja-se comparar o coeficiente de transferência de calor obtido com a simulação e com a correlação de GHAJAR E TANG (2010) para dois casos distintos, o primeiro com fluxo de calor constante na parede do duto e o segundo com temperatura constante na parede do duto. Além disso, pretende-se avaliar a hipótese de escoamento isotérmico muito utilizada na literatura.

Um último objetivo deste trabalho é realizar uma análise da hiperbolicidade e avaliar a imposição das condições de contorno para os casos de escoamento bifásico abordados.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 deste documento apresenta-se a revisão de bibliografia, mostrando artigos e publicações que foram relevantes para a elaboração do trabalho. Este capítulo é dividido em duas seções: uma para escoamento monofásico e outra para escoamento bifásico.

O capítulo 3 é dedicado à apresentação do modelo matemático para o escoamento bifásico. O equacionamento contempla equações governantes do escoamento, assim como as equações constitutivas e relações geométricas aplicadas ao problema.

No capítulo 4 detalha-se o método numérico utilizado e a discretização adotada. Além disso, destaca-se a importância da análise de hiperbolicidade e a imposição da condição de contorno. Apresenta-se o critério de convergência utilizado para atingir o regime permanente nas simulações.

O capítulo 5 apresenta a formulação matemática e os resultados obtidos para escoamento monofásico, que serviram de base para o estudo em escoamento bifásico. Os resultados foram comparados com soluções analíticas.

O capítulo 6 é dedicado para apresentar os resultados e discussões sobre as simulações para escoamento bifásico. São realizadas também comparações dos resultados obtidos com o *software* comercial OLGA (SHLUMBERGER) e com a correlação de GHAJAR E TANG (2010) presente na literatura. Além disso, a análise de acurácia do método no espaço é apresentada.

No capítulo 7 encontram-se as conclusões deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

O Apêndice é dedicado à análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão de bibliografia baseada em artigos e publicações que foram consultados e que apresentam relevância para o trabalho.

Na primeira parte desta revisão constam artigos e publicações relacionadas às simulações numéricas de escoamento do tipo monofásico, que foi utilizado como etapa inicial de validação do programa para implementação para o caso de escoamento bifásico em gasodutos.

Na segunda parte desta revisão, é feito um estudo voltado para os tipos de escoamento bifásico existentes, padrões de escoamento e modelos para a simulação. Além disso, apresentam-se artigos e publicações voltadas para simulações numéricas já realizadas na literatura referentes a escoamento bifásico que foram utilizadas como referências para este trabalho.

### 2.1 ESCOAMENTO MONOFÁSICO

O termo monofásico é aplicado quando apenas uma fase está envolvida no escoamento. Para projetos de gasodutos, operação e detecção de vazamentos é necessário compreender as características do escoamento no duto. Uma das formas utilizadas para este fim é através de simulações numéricas. Estas simulações são baseadas em modelos numéricos, que através de algumas hipóteses compatíveis com o problema estudado e com a respectiva formulação matemática, podem reproduzir o escoamento real com satisfatória acurácia.

THORLEY E TILEY (1987) forneceram uma revisão de literatura de métodos de solução para análise de regime transiente em gasodutos e de trabalhos experimentais neste ramo de estudo. Esses métodos de solução incluem: método das características, diferenças finitas implícita e explícita e métodos de elementos finitos apontando as vantagens e desvantagens de cada um, de acordo com o tipo problema a ser simulado.

Além dos métodos de solução, a escolha do modelo ideal pode fazer diferença nos resultados obtidos. Em muitos estudos da literatura, o modelo isotérmico é considerado ideal. Porém, OSIADACZ E CHACZYKOWSKI (2001) realizaram um estudo comparativo entre casos de escoamento de gás em gasodutos considerando casos em que o escoamento é isotérmico e casos em que o escoamento é não-isotérmico. No caso não-

isotérmico, a distribuição da temperatura é calculada usando o modelo matemático que inclui a equação da energia. Com esta comparação, verificou-se que a variação de pressão ao longo do duto é diferente para as duas situações, resultado do decaimento da massa específica do gás.

Outros autores, ABBASPOUR E CHAPMAN (2008), estudaram uma simulação não-isotérmica, unidimensional de um fluido compressível. Por conveniência, as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia foram escritas em função da vazão mássica. Seus resultados mostraram que a determinação da temperatura através de um modelo não-isotérmico é recomendada para processos em rápido regime transiente, devido à variação da massa específica do gás com a temperatura e pressão.

Já CHACZYKOWSKI (2010), estudou o caso de um escoamento em gasodutos em regime transiente, com a inclusão da equação de conservação da energia. Os autores discutem os efeitos que contribuem para a variação da temperatura durante o escoamento de gás em um gasoduto, tais como: efeito de expansão axial do gás, atrito e troca de calor com o ambiente. Além disso, concluem que a maneira mais acurada de prever os parâmetros do escoamento em gasodutos com altas pressões é considerar o efeito do acúmulo de calor na vizinhança do duto.

MADEIRA (2011) realizou um estudo sobre detecção de fechamento não desejado de válvulas em gasodutos, utilizando o método numérico WAF-TVD de volumes finitos, que é um método numérico do tipo TVD (*Total Variation Diminishing*) de alta ordem com média ponderada de fluxo (WAF, *Weighted Average Flux*), numa discretização em volumes finitos. Neste trabalho, MADEIRA (2011) adota uma formulação matemática baseada em três equações para um escoamento unidimensional: uma para a conservação da massa, outra para a conservação da quantidade de movimento e a última para a equação da conservação da energia. Os resultados mostraram que métodos numéricos que dedicam especial atenção à discretização dos termos de fluxo, como o TVD, produzem resultados muito bons, principalmente quando descontinuidades nas grandezas físicas ocorrem.

## 2.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO

Por escoamento bifásico entende-se aquele escoamento em que há a presença de duas fases envolvidas. No presente estudo, as fases consideradas são líquido e gás.

### 2.2.1 Classificação de Escoamento Bifásico

A classificação dos tipos de escoamentos bifásicos segundo seus diferentes padrões varia de acordo com os autores da literatura. ISHII E HIBIKI (2006) enfatizam que a complexidade deste escoamento é devido à interface entre as fases que além de serem deformáveis e móveis, apresentam descontinuidade de suas propriedades nesta região e suas proximidades.

Para o caso específico de dutos horizontais, ou que possuem uma pequena inclinação em relação à horizontal, TAITEL E DUKLER (1976) classifica os diferentes padrões de escoamento em quatro principais: bolhas (*bubble* ou *dispersed flow*), golfadas (*slug flow*), estratificado (*stratified flow*) e anular (*annular flow*). Considera-se que outros tipos de padrões de escoamento bifásico são combinações destes padrões principais, como o estratificado com ondulações (*wavy flow*) e escoamento de bolhas alongadas (*elongated bubble flow*). Esses outros tipos de padrões de escoamento bifásico, em dutos horizontais, também podem ser encontrados em TAITEL E DUKLER (1976), onde os padrões de escoamento são apresentados na forma de um mapa. Cada região do mapa representa o cenário onde ocorre a formação de um determinado padrão de escoamento, conforme as velocidades superficiais dos fluidos.

Na Figura 2.1, são representados os quatro padrões principais de escoamento bifásico em dutos horizontais ou dutos com uma pequena inclinação. O escoamento estratificado acontece em casos em que as velocidades superficiais de líquido e gás são baixas. À medida que a velocidade superficial do gás aumenta, mantendo-se a de líquido, pode-se observar o escoamento anular. O escoamento em golfadas aparece quando se aumenta velocidades superficiais de gás e líquido. E finalmente, para altas velocidades superficiais de líquido, tem-se o escoamento de bolhas.

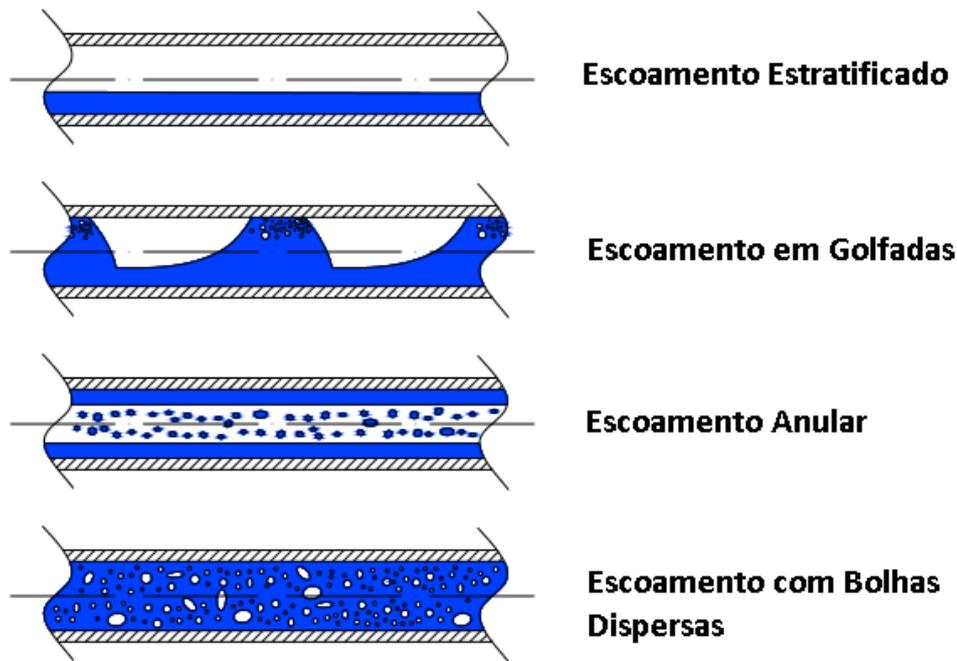


Figura 2.1: Padrões de escoamento bifásico em dutos horizontais ou com uma pequena inclinação.

### 2.2.2 Modelagem de Escoamento Bifásico

A modelagem matemática de escoamento bifásico pode ser subdividida em três categorias, conforme STEWART E WENDROFF (1984) e ESSAMA (2004). São elas:

- Modelo de Equilíbrio Homogêneo (*Homogeneous Equilibrium Model* – HEM)
- Modelo *Drift-Flux* (*Drift-Flux Model* - DFM)
- Modelo de Dois Fluidos (*Two-Fluid Model* - TFM)

O primeiro modelo citado, o Modelo de Equilíbrio Homogêneo, HEM, é o que possui uma formulação menos complexa, obedecendo à formulação para escoamento monofásico. Esta formulação consiste em uma equação para conservação da quantidade de movimento, uma para a conservação da massa e outra para a conservação da energia, isto é, as duas fases são interpretadas como uma mistura, onde se predomina as propriedades físicas da fase dominante. Neste modelo, é assumido que a velocidade, temperatura e pressão entre as fases são iguais.

No trabalho de CLERC (2000), o autor utiliza o HEM para modelar escoamento bifásico e ressalta que este modelo é adequado para simulação em trocadores de calor e é bem adaptável para simulação para escoamento de bolhas dispersas. Porém, quando necessita-se modelar algum efeito de não equilíbrio, outras equações tornam-se

necessárias na modelagem, e este modelo não seria aconselhável. Algumas críticas e explicações também foram feitas por STEWART E WENDROFF (1984).

O segundo modelo, o modelo *Drift-Flux*, DFM, é caracterizado por utilizar a mesma pressão e temperatura para as duas fases presentes e para a interface, porém a velocidade é considerada diferente para cada uma das fases. A formulação matemática deste modelo consiste em uma equação da quantidade de movimento que relacione as diferenças de velocidades entre as fases, ou seja, a velocidade de escorregamento entre as fases líquido e gás, uma equação de conservação da massa para a mistura e uma equação da energia para a mistura. Como referência deste modelo, pode-se citar MASELLA *et al.* (1998), onde os autores apresentam o modelo considerando escoamento isotérmico e ISHII E HIBIKI (2003) para uma formulação mais abrangente considerando a equação da energia.

O terceiro e último modelo apresentado, o modelo de Dois Fluidos, TFM, é o utilizado na abordagem matemática deste trabalho. Ele é conhecido como uma das formulações mais robustas para escoamentos bifásicos, pois as duas fases presentes são consideradas de forma independente. Sendo assim, cada fase apresenta uma equação independente, ou seja, o modelo pode consistir em duas equações para a conservação da quantidade de movimento, duas para a conservação da massa e outras duas para a conservação da energia. Para fins deste trabalho, que utiliza esta modelagem como referência, o modelo TFM engloba equações de conservação de massa para as duas fases, assim como equações da conservação da quantidade de movimento. Porém, a equação de conservação da energia é escrita para a mistura bifásica presente, ou seja, considerando uma temperatura única, pois a diferença de temperatura entre os fluidos não é significativa. Além disso, a segunda lei da termodinâmica é consensual, apresentando apenas uma entropia para a mistura como um todo. Este modelo é adotado por vários autores na literatura, como ABBASPOUR *et al.* (2005).

Alguns autores utilizaram esse modelo como referência dentre eles pode-se citar: HANCOX *et al.* (1979), FABRE *et al.* (1989), ISHII E MISHIMA (1984). ISHII E MISHIMA (1984) discutem este modelo em detalhes partindo do problema em três dimensões até fazer as simplificações para o caso unidimensional, que é obtido através do método das médias na área do modelo de três dimensões. (ISHII E HIBIKI, 2006).

### 2.2.3 Trabalhos em Escoamento Bifásico em Gasodutos

Para escoamentos bifásicos em gasodutos, é comum na literatura que o escoamento seja assumido como isotérmico, por simplicidade. Muitas publicações sobre escoamento bifásico supõem que a temperatura é constante ao longo do duto, como ESSAMA (2004), BUENO (2013), que empregaram modelos com quatro equações para o escoamento estratificado. Essa formulação de quatro equações é composta por duas equações para a conservação da massa, uma para cada fase presente, líquido e gás, e outras duas para a conservação da quantidade de movimento para as mesmas duas fases.

Também utilizando esta formulação que contempla o escoamento isotérmico, pode-se citar o trabalho de ISSA E KEMPF (2003) que realizam simulação de escoamento bifásico do tipo *slug* utilizando o modelo de Dois Fluidos. Os autores demonstraram com seus estudos que o modelo transiente unidimensional de Dois Fluidos é capaz de simular corretamente o crescimento de instabilidades do escoamento estratificado e capturar o seu desenvolvimento para padrão *slug*.

Para cenários em que se deseja estudar a variação da temperatura ao longo do duto, tais como estimativa de corrosão e incrustação no duto, o modelo deve considerar a transferência de calor no processo, o que requer uma abordagem que inclua a equação da energia. No trabalho de HANCOX *et al.* (1979), os autores propõem modelos unidimensionais para escoamentos transientes de gás-líquido em dutos, considerando a equação de conservação da energia em seu equacionamento.

Outros trabalhos disponíveis na literatura, como o ALVES *et al.* (1992) utilizaram a equação da energia em seus modelos para prever o perfil de temperatura ao longo do duto baseando-se nas equações para regime permanente. Os autores utilizaram um modelo único de regime permanente formado com equações da massa, quantidade de movimento e energia que determinam o perfil da temperatura de um escoamento bifásico ao longo de poços e dutos.

Já SAUREL *et al.* (1999) desenvolveram um modelo com sete equações para a formulação matemática para este problema de escoamento bifásico. Além das seis equações convencionais de conservação de massa, quantidade de movimento e energia para cada fase, propôs-se uma equação adicional para a evolução da fração volumétrica ao longo do duto. Este modelo garante que o sistema de equações diferenciais parciais seja hiperbólico, ou seja, que os autovalores do polinômio característico associado ao sistema de equações diferenciais hiperbólicas sejam reais.

DUKHOVNAYA E ADEWUMI (2000) realizaram simulação baseada em um modelo de Dois Fluidos unidimensional e transiente de escoamento bifásico de gás/condensado utilizando o método numérico TVD com o objetivo de estudar a distribuição das principais grandezas físicas do escoamento ao longo do duto. Foi usado um modelo de seis equações composto por conservação de massa, quantidade de movimento e energia, uma para cada fase. O método TVD representou o problema transiente de fechamento de válvula adequadamente, apresentando pouco efeito dispersivo. Não foi possível validar os resultados, devido à falta de dados experimentais.

ABBASPOUR *et al.* (2005) estudaram o escoamento bifásico gás-líquido através do modelo de Dois Fluidos com duas equações de conservação de massa, duas equações de quantidade de movimento, ambas para fase líquido e gás, e uma equação da energia, relacionada à mistura das fases. Os resultados mostraram que a fração volumétrica de condensado de líquido sofre forte influência da temperatura, pressão, vazão mássica e composição da mistura.

Em um trabalho posterior, ABBASPOUR *et al.* (2010), utilizaram o mesmo modelo não-isotérmico do trabalho anterior ABBASPOUR *et al.* (2005) e compararam seus resultados com o caso isotérmico ao longo do duto. Os resultados mostraram que o caso em que a temperatura varia ao longo do duto, caso não-isotérmico, tem um impacto na solução, em especial para a fração volumétrica de condensado de líquido. Além disso, as velocidades de líquido e gás no caso não-isotérmico apresentam uma diferença significativa.

MEDINA (2011) estudou a transferência de calor, sem mudança de fase, para escoamento bifásico no padrão de golfadas. As equações governantes são escritas através de balanços de massa, quantidade de movimento e energia, com o objetivo de analisar o problema em função da velocidade, pressão e temperatura. Os resultados obtidos para escoamento bifásico foram comparados com dados experimentais de temperatura, concluindo que o modelo reproduz a tendência desta grandeza física. Além disso, resultados obtidos para o coeficiente de transferência de calor foram comparados com correlações da literatura, mostrando excelentes resultados.

No trabalho de MORALES-RUIZ *et al.* (2012), os autores mostraram simulações numéricas baseadas no modelo de Dois Fluidos para escoamento bifásico em dutos, levando em consideração a transferência de massa entre as fases. Diferentes casos foram analisados neste artigo, dentre eles, para avaliar os efeitos térmicos, foi simulado um caso de um evaporador, onde a formulação com a equação da energia foi introduzida, obtendo

resultados da variação de pressão e temperatura com uma boa concordância com resultados experimentais.

Outros autores, como SIMÕES *et al.* (2013), realizaram simulações não-isotérmicas para escoamento bifásico no padrão *slug* em dutos horizontais utilizando o modelo de Dois Fluidos através do “*slug capturing*”, em que é possível prever a transição do padrão estratificado para a evolução do padrão *slug*. Foram utilizadas seis equações governantes para o escoamento: duas equações de conservação de massa, duas para equação da conservação da quantidade de movimento e duas para a equação da conservação da energia, uma de cada relacionada às fases presentes, líquido e gás. O modelo foi validado com dados experimentais e correlações da literatura apresentando bons resultados.

Em um trabalho posterior, SIMÕES *et al.* (2014) modelaram o problema de escoamento bifásico no padrão *slug*, através do mesmo modelo apresentado em SIMÕES *et al.* (2013), e no padrão estratificado. Neste trabalho, os autores validaram suas simulações através do cálculo para o coeficiente de transferência de calor, comparando-os com resultados experimentais e com a correlação de GHAJAR E TANG (2010). Além disso, apresentaram resultados de validação para perda de carga ao longo da tubulação comparando seus resultados com a correlação proposta por GARCIA *et al.* (2007) e com a correlação de LOCKHART E MARTINELLI (1949). Essas comparações apresentaram bons resultados tanto para o escoamento estratificado, quanto para o escoamento no padrão *slug*.

A partir desta revisão bibliográfica, pode-se constatar que o modelo de Dois Fluidos, que é utilizado neste trabalho, é amplamente abordado na literatura aberta. Além disso, muitos estudos estão direcionados para a utilização da equação da energia em seus modelos, visando não só uma melhor acurácia em seus resultados, mas também a quantificação da troca térmica do escoamento.

Não foram encontrados na literatura aberta, trabalhos que utilizam o método numérico FCT associado com o modelo de Dois Fluidos com a inclusão da equação da energia para gasodutos. Neste aspecto motiva a utilização do FCT nos problemas analisados neste trabalho.

### **3. MODELO MATEMÁTICO PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO**

Neste capítulo, são descritas as equações governantes do escoamento bifásico que compõem o modelo matemático de Dois Fluidos para as fases líquido e gás empregado neste trabalho, acompanhadas das relações constitutivas que integram o equacionamento completo do problema.

#### **3.1 HIPÓTESES PARA O ESCOAMENTO BIFÁSICO**

A formulação para escoamento bifásico em dutos de seção circular analisados neste trabalho é composta pelas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, complementadas por equações constitutivas.

Neste trabalho, algumas hipóteses e simplificações foram feitas a fim de obter o equacionamento utilizado para a resolução numérica do escoamento, que são:

- o escoamento é tratado através de uma abordagem unidimensional;
- o gasoduto é horizontal;
- a área da seção transversal é constante ao longo do duto;
- o modelo adotado é o de Dois Fluidos, com duas equações de conservação de massa, duas de quantidade de movimento, com uma equação para cada fase, e uma de energia para a mistura como um todo;
- o padrão de escoamento considerado é o estratificado suave, ou seja, sem ondulações;
- não há transferência de massa entre as fases, ou seja, não há mudança de fase nem reações químicas;
- a formulação matemática é baseada em um modelo de pressão única para as fases líquida e gasosa;
- a equação da energia é escrita para a mistura de líquido e gás, ou seja, escrita em função de uma temperatura única para as fases;
- os efeitos de difusão viscosa molecular e turbulenta axiais são desprezíveis;
- os efeitos de condução axial presentes na equação da energia são desprezados;

- a fase líquida é considerada incompressível e a fase gasosa é compressível, segundo o modelo de gás ideal;
- as propriedades de transporte dos fluidos, tais como viscosidade, calor específico e condutividade térmica são consideradas constantes.

### 3.2 GEOMETRIA DO DUTO

A Figura 3.1 abaixo representa a seção transversal de um tubo circular de raio interno  $r_i$  e raio externo  $r_e$  de um gasoduto com escoamento bifásico em padrão estratificado. Por ter maior massa específica e pelo efeito da gravidade, a fase líquida fica localizada na parte inferior do duto, com altura de líquido  $h_L$ .

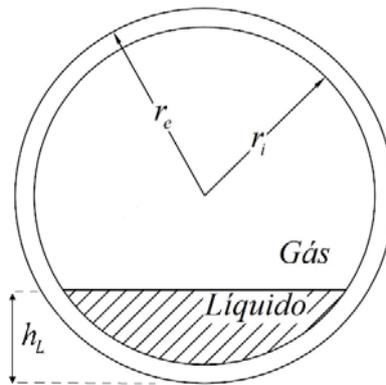


Figura 3.1: Seção transversal de um gasoduto com escoamento bifásico.

### 3.3 FRAÇÕES VOLUMÉTRICAS PARA AS FASES

As frações volumétricas de líquido,  $\alpha_L$ , e de gás,  $\alpha_G$ , são definidas como:

$$\alpha_L \equiv \frac{V_L}{V_L + V_G}, \quad (3.1a)$$

$$\alpha_G \equiv \frac{V_G}{V_L + V_G}, \quad (3.1b)$$

onde  $V_L$  e  $V_G$  são os volumes ocupados pela fase líquida e gasosa, respectivamente. Dessa forma, temos a seguinte relação entre as frações volumétricas:

$$\alpha_G + \alpha_L = 1. \quad (3.2)$$

### 3.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO

Tomando como base as hipóteses adotadas na seção anterior, as equações governantes para cada fase do escoamento podem ser apresentadas conforme as expressões a seguir:

- Equação de conservação da massa (Equação da Continuidade):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \alpha_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_G \alpha_G u_G) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L \alpha_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_L \alpha_L u_L) = 0. \quad (3.4)$$

Nas Eqs. (3.3) e (3.4),  $\alpha_k$  é a fração volumétrica,  $u_k$  a velocidade e  $\rho_k$  é a massa específica, todas relacionadas a cada fase  $k$ , onde  $k$  pode assumir o significado de  $G$  ou  $L$ , representando as respectivas fases gás e líquido.

- Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho_G \alpha_G u_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G p)}{\partial x} = (p - p_{cG}) \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + B_{fG} + T_I + T_{Gw}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial(\rho_L \alpha_L u_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L p)}{\partial x} = (p - p_{cL}) \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} + B_{fL} - T_I + T_{Lw}, \quad (3.6)$$

onde  $B_{fk}$  diz respeito às forças de corpo,  $T_I$  é a força por unidade de volume na interface e  $T_{kw}$  é a força por unidade de volume na superfície, para a fase  $k$ . Estes termos podem ser definidos por:

$$B_{fk} = -\rho_k \alpha_k g \sin \beta, \quad (3.7)$$

$$T_{kw} = -\frac{\tau_k S_k}{A}, \text{ onde } \tau_k = \frac{1}{2} f_k \rho_k u_k |u_k|, \quad (3.8)$$

$$T_I = \frac{\tau_I S_I}{A}, \text{ onde } \tau_I = \frac{1}{2} f_I \rho_G (u_G - u_L) |u_G - u_L|, \quad (3.9)$$

nas quais  $g$ ,  $\beta$ ,  $f_k$  e  $f_I$  são aceleração da gravidade, ângulo de inclinação entre o duto e a horizontal e os fatores de atrito para as fases e para a interface líquido e gás respectivamente.  $A$  é a área da seção transversal e  $S_k$  e  $S_I$  são os perímetros molhados relacionados a cada fase e a interface, relacionados por:

$$S_L = D_i \left[ \pi - \cos^{-1} \left( 2 \frac{h_L}{D_i} - 1 \right) \right], \quad S_G = \pi D_i - S_L, \quad (3.10)$$

$$S_I = D_i \sqrt{1 - \left( 2 \frac{h_L}{D_i} - 1 \right)^2}. \quad (3.11)$$

Essa modelagem considera que a pressão,  $p$ , é igual em ambas as fases, porém contabiliza o termo de correção de pressão,  $p_{ck}$ , referente às duas fases, assim como proposto por ESSAMA (2004) e utilizado por SIMÕES *et al.* (2014). Considerando que  $h_L$  é a altura de líquido na seção transversal e  $D_i$  é o diâmetro interno do duto, para escoamento estratificado, o termo pode ser escrito, de forma geral, como:

$$p_{ck} = \rho_k \alpha_k g \cos(\beta) \frac{dh_L}{d\alpha_k}, \quad (3.12)$$

onde

$$\frac{dh_L}{d\alpha_L} = \frac{\pi D_i}{4} \frac{\sqrt{1 - X^2}}{1 - X^2}, \quad (3.13)$$

$$\alpha_L = \left( \frac{1}{\pi} \right) \left\{ \pi - \cos^{-1} [X] + X \sqrt{(1 - X^2)} \right\}, \quad (3.14)$$

$$X = \frac{2h_L}{D_i} - 1. \quad (3.15)$$

- Equação da conservação da energia:

No que diz respeito à equação da energia, utiliza-se um modelo de temperatura única para as duas fases. Para isso, a equação da energia foi postulada considerando a mistura de líquido e gás como um todo. O problema foi abordado desta maneira pois a diferença de temperatura entre os constituintes não é expressiva. Além disso, considerando uma temperatura única, a segunda lei da termodinâmica é consensual, pois apresenta apenas uma entropia para a mistura como um todo, o que não ocorre se for considerado um modelo com duas temperaturas diferentes. Com isso, a equação da energia, cuja dedução está no Apêndice B deste trabalho, é escrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \{(\rho_G \alpha_G E_G) + (\rho_L \alpha_L E_L)\}}{\partial t} + \frac{\partial \{u_G (\rho_G \alpha_G E_G + \alpha_G p) + u_L (\rho_L \alpha_L E_L + \alpha_L p)\}}{\partial x} = \\ & \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} \{(p - p_{cL})u_L - (p - p_{cG})u_G\} + \alpha_G p \frac{\partial u_G}{\partial x} + \alpha_L p \frac{\partial u_L}{\partial x} + u_G B_{jG} + u_L B_{jL} + \\ & \frac{q''_{wG} S_k}{A} + \frac{q''_{wL} S_k}{A} - \frac{\partial(\alpha_G q''_G)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha_L q''_L)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$E_k \equiv e_k + \frac{u_k^2}{2}, \quad (3.17)$$

$$e_k \equiv e_k(T) \equiv c_{vk} T, \quad (3.18)$$

em que  $e_k$  é a energia interna específica,  $E_k$  é a energia total específica,  $c_{vk}$  é o calor específico à volume constante para cada uma das fases e  $T$  é a temperatura dos fluidos. Tem-se também que  $q''_{wk}$  é o termo de fluxo de calor trocado pela parede relacionado à cada fase. Os dois últimos termos da Eq. (3.16) são referentes à troca de calor através da condução axial para cada fase. Vale lembrar que estes termos serão desconsiderados neste trabalho, visto que o efeito da condução axial não é significativo, se comparado à troca de calor na parede do duto.

### 3.5 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Nesta seção serão apresentadas as relações constitutivas que integram o equacionamento principal proposto neste trabalho. São elas: equações para os cálculos do fator de atrito na parede e na interface e do fluxo de calor lateral, que é subdividido em fluxo de calor por convecção forçada interna, condução na parede do duto na direção radial e convecção forçada externa.

#### 3.5.1 Fator de Atrito na Parede

Na literatura, existem diversas correlações para o dimensionamento do fator de atrito na parede do duto. Uma destas correlações é a presente no trabalho de ZIGRANG E SILVESTER (1985), que indicam a correlação de MOODY (1947) para o cálculo do fator de atrito na parede,  $f_k$ , onde

$$f_k = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{Re_k} \\ 0,001375 \left\{ 1 + \left[ 2 \times 10^4 \left( \frac{\varepsilon}{D_{hk}} \right) + \frac{10^6}{Re_k} \right]^{1/3} \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.19)$$

na qual,  $f_k$  é o máximo valor entre as duas relações acima, o que restringe se o escoamento é laminar, para a primeira expressão, ou turbulento, para a segunda expressão. O termo  $\varepsilon$  representa a rugosidade absoluta do duto e  $Re_k$  é o número de Reynolds para a fase  $k$  definido por:

$$Re_k = \frac{\rho_k D_{hk} |u_k|}{\mu_k}, \quad (3.20)$$

onde  $\mu_k$  é a viscosidade dinâmica dos fluidos e  $D_{hk}$  é o diâmetro hidráulico da tubulação, ambos relacionados para cada fase  $k$ .

### 3.5.2 Fator de Atrito Interfacial

Para o cálculo do fator de atrito interfacial,  $f_i$ , é utilizada uma formulação abrangente proposta por ANDREUSSI *et al.* (1987) e que apresenta bons resultados para escoamento estratificado.

$$\begin{cases} \frac{f_I}{f_G} = 1 + 29,7(F - 0,36)^{0,67} \left( \frac{h_L}{D_i} \right)^{0,2}, & \text{se } F > 0,36 \\ f_I = f_G, & \text{se } F \leq 0,36 \end{cases}, \quad (3.21)$$

onde  $f_G$  é o fator de atrito da fase gasosa com a parede do duto, calculada a partir da Eq.(3.18).

A variável  $F$  presente na Eq. (3.20) representa o número de Froude e pode ser calculado por:

$$F = u_G \left( \frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G} \frac{dA_L}{dh_L} \frac{1}{A_G g \cos \beta} \right)^{1/2}, \quad (3.22)$$

em que  $A_k$  é a área superficial da seção transversal correspondente à fase  $k$ , líquida ou gás.

### 3.5.3 Relações Geométricas

A grandeza  $D_{hk}$  é relacionada ao diâmetro hidráulico da tubulação correspondente à cada fase  $k$ , calculado por:

$$D_{hG} = 4 \frac{A_G}{S_G + S_I}, \quad (3.23)$$

$$D_{hL} = 4 \frac{A_L}{S_L}, \quad (3.24)$$

nas quais  $A_G$  e  $A_L$  são as áreas superficiais de cada fase, calculadas por:

$$A_G = \alpha_G A, \quad (3.25)$$

$$A_L = \alpha_L A. \quad (3.26)$$

### 3.5.4 Fluxo de Calor

A temperatura do fluido é uma variável primitiva calculada axialmente, ou seja, a temperatura é constante na seção transversal, tratando-se como uma única temperatura média em cada seção. Porém, faz-se necessário que a modelagem da transferência de calor seja dimensionada de forma radial. O termo do fluxo de calor,  $q_w''$ , é escrito como:

$$q_w'' = h_{total} (T - T_\infty), \quad (3.27)$$

onde  $T$  é a temperatura dos fluidos e  $T_\infty$  é a temperatura do ambiente externo. Além disso,  $h_{total}$  é o coeficiente de transferência de calor total. Neste trabalho foram computadas trocas de calor por convecção externa ao duto, por convecção interna no duto e por condução radial. Para o cálculo do coeficiente de transferência de calor local, tem-se que

$$h = Nu_D \frac{K}{D_{hk}}, \quad (3.28)$$

onde  $Nu_D$  é o número de Nusselt relativo ao diâmetro duto,  $K$  é a condutividade térmica do fluido e  $D_{hk}$  é o diâmetro hidráulico da tubulação para cada fase.

O cálculo do  $h_{total}$  se dá através da associação de resistências térmicas equivalentes em série, conforme mostra a Figura 3.2 abaixo:

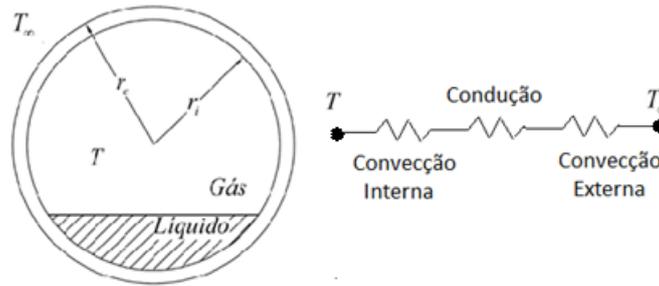


Figura 3.2: Associação de resistências térmicas em série na seção transversal do gasoduto.

O coeficiente de transferência de calor total é calculado através do cálculo da associação das resistências térmicas, pela expressão a seguir:

$$\frac{1}{h_{total}} = \left( \frac{1}{h_{interno}} + \frac{D_i}{2} \frac{\ln\left(\frac{D_e}{D_i}\right)}{K_{duto}} + \frac{D_i}{D_e} \frac{1}{h_{externo}} \right), \quad (3.29)$$

onde  $h_{externo}$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção na parte externa do duto,  $h_{interno}$  é o relativo à troca de calor por convecção interna e  $K_{duto}$  é a condutividade térmica do duto.

Para o cálculo de  $h_{externo}$  e  $h_{interno}$  faz-se necessário à utilização de equações capazes de calcular o número de Nusselt e, posteriormente, calcular os coeficientes de transferência de calor através da expressão Eq. (3.28). Sendo assim, cada um destes termos será especificado abaixo de forma que contemplem suas condições no escoamento externo e interno ao duto.

- Cálculo de  $h_{interno}$ :

O termo relacionado ao calor pode ser especificado de duas formas, segundo a literatura: ou se considera a temperatura constante ou o fluxo de calor constante na parede. Para efeito de cálculo deste termo, usou-se a hipótese de temperatura constante na parede. Na literatura existem várias equações que descrevem o cálculo do coeficiente de transferência de calor, como por exemplo, a referência de ZHANG *et al.* (2004), em que se apresentam maneiras de se calcular este termo para os diversos padrões de escoamento de líquido e gás. Outra referência na literatura que calcula o termo de transferência de calor é a de SIMÕES *et al.* (2013), que utiliza a equação de Gnielinski (GNIELINSKI,

1976) em seu modelo, que segundo INCROPERA *et al.* (2007), é válida tanto para fluxo de prescrito ou temperatura prescrita na parede.

Para o presente trabalho, foi considerado o cálculo a partir da equação de Gnielinski para modelar o termo do coeficiente de transferência de calor, que depende do número de Reynolds,  $Re_k$ , do número de Prandtl,  $Pr_k$ , referentes à cada fase  $k$  e do fator de atrito,  $f_o$ . O cálculo do número de Nusselt, pela equação de Gnielinski, encontra-se apresentado a seguir.

➤ Relação de Gnielinski:

$$\left\{ \begin{array}{l} Nu_{Dk} = \frac{\left(\frac{f_o}{8}\right)(Re_k - 10^3)Pr_k}{1 + 12,7\left(\frac{f_o}{8}\right)^{1/2} [Pr_k^{2/3} - 1]}, \text{ para } 3000 \leq Re_k \leq 5 \times 10^6 \text{ e } 0,5 \leq Pr_k \leq 2000 \\ Nu_{Dk} = 3,66 \quad , \quad \text{para } Re_k \leq 3000 \end{array} \right. , \quad (3.30)$$

$$f_o = [0,790 \ln(Re_k) - 1,64]^{-2} . \quad (3.31)$$

O intervalo onde há a transição entre escoamento laminar e turbulento não foi incorporado, pois os casos abordados neste trabalho se encontram dentro da faixa de Reynolds de  $3000 \leq Re_k \leq 5 \times 10^6$ .

• Cálculo de  $h_{externo}$ :

A convecção na parte externa do duto é considerada como convecção forçada, visto que, segundo LIENHARD IV *et al.* (2008),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \frac{Gr}{Re^2} < 1 \rightarrow \text{Predomina a convecção forçada,} \\ \text{Se } \frac{Gr}{Re^2} > 1 \rightarrow \text{Predomina a convecção natural,} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Na Eq.(3.32), o número de Grashof é definido como:

$$Gr = \frac{g\eta(T_{wall} - T_{\infty})D_e^3}{\nu} . \quad (3.33)$$

$T_{wall}$  é a temperatura da parede do duto. As variáveis  $\nu$ ,  $\eta$  e  $D_e$  são viscosidade cinemática, o coeficiente de expansão térmica, ambas referentes ao fluido que escoar na região de fora do duto, e o diâmetro externo, respectivamente.

Para o cálculo do coeficiente de transferência de calor externo a partir do número de Nusselt, utilizou-se como referência a equação de Churchill e Bernstein (CHURCHILL E BERNSTEIN, 1977) para convecção forçada sobre o cilindro. Os números de Reynolds ( $Re$ ) e Prandtl ( $Pr$ ) são calculados para o escoamento externo ao tubo.

➤ Relação de Churchill e Bernstein:

$$\left\{ Nu = 0,3 + \frac{0,62Re^{1/2}Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(0,4/Pr\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(Re/28200\right)^{5/8}\right]^{4/5} \right. , \text{ para } \begin{matrix} 2 \times 10^4 < Re < 4 \times 10^5 \\ e \\ RePr > 0,2 \end{matrix} . \quad (3.34)$$

## 4. MÉTODO NUMÉRICO

Métodos numéricos geram soluções numéricas para problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Este capítulo é destinado à descrição do método numérico utilizado. Além disso, as condições de contorno e inicial são determinadas, assim como o critério de convergência que foi utilizado nas simulações.

### 4.1 EQUAÇÕES NA FORMA CANÔNICA

Para obter uma aproximação numérica do problema de valor inicial e de contorno apresentado no capítulo anterior, reescreve-se o sistema de equações que englobam equações de conservação de massa para as duas fases, equações de conservação da quantidade de movimento, também para ambas as fases, e a equação da energia referente à mistura das duas fases, na forma canônica de leis de conservação. Para isso, define-se que  $\mathbf{Q}$  é o vetor de variáveis conservadas,  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  é o vetor de fluxo,  $\mathbf{W}$  é o vetor das variáveis primitivas,  $\mathbf{H}(\mathbf{W})$  é o vetor de termos não conservativos e  $\mathbf{S}(\mathbf{W})$  é o vetor representativo do termo fonte.

Assim, as Eqs.(3.3-3.6) e Eq.(3.16) podem ser escritas na forma canônica como:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{S}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{W}$  são dados por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G \\ \rho_L \alpha_L \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G \left( e_G + \frac{u_G^2}{2} \right) + \rho_L \alpha_L \left( e_L + \frac{u_L^2}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G p \\ \rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L p \\ \left\{ \rho_G \alpha_G u_G \left( e_G + \frac{u_G^2}{2} \right) + \alpha_G u_G p \right\} + \left\{ \rho_L \alpha_L u_L \left( e_L + \frac{u_L^2}{2} \right) + \alpha_L u_L p \right\} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p - p_{cG}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (p - p_{cL}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\{ (p - p_{cL}) u_L - (p - p_{cG}) u_G \right\} & \alpha_G p & \alpha_L p & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{fG} + T_I + T_{Gw} \\ B_{fL} - T_I + T_{Lw} \\ B_{fG} u_G + B_{fL} u_L + q''_{wG} \frac{S_G}{A} + q''_{wL} \frac{S_L}{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} p \\ \alpha_L \\ u_G \\ u_L \\ T \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

## 4.2 MODELO NUMÉRICO E DISCRETIZAÇÃO

Para a realização deste trabalho, utilizou-se uma malha fixa, onde foi considerado um duto de comprimento  $L$  discretizado em  $N$  células computacionais de mesmo tamanho, em que:

$$\Delta x = (L/N) = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad (4.6)$$

onde,  $x_{j-1/2} = (j-1)\Delta x$  e  $x_{j+1/2} = j\Delta x$ , em que  $j = 1, \dots, N$ . O centro da célula está situado na posição  $x_j = (j-1/2)\Delta x$ .

Uma aproximação numérica na forma explícita da solução do problema proposto pode ser equacionada a fim de calcular o valor de  $\mathbf{Q}_j^{n+1}$  no instante de tempo  $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$ , através da utilização de diferenças finitas:

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] + \Delta t^n \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_j^n + \Delta t^n \mathbf{S}_j^n, \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{Q}_j^n$  é uma aproximação de  $\mathbf{Q}$  na posição  $x_j$  e no instante de tempo atual  $t^n$ ,  $\Delta t^n$  é o intervalo de avanço no tempo, considerado constante neste trabalho. Além disso,  $\mathbf{F}_{j+1/2}^n$  e  $\mathbf{F}_{j-1/2}^n$  contabilizam o cálculo dos termos de fluxo no instante atual, e nas respectivas posições no espaço  $x_{j+1/2}$  e  $x_{j-1/2}$ .

#### 4.2.1 Discretização do Termo de Fluxo Conservativo

O termo de fluxo  $\mathbf{F}$  é representado como função dos estados à esquerda e à direita das células vizinhas ao ponto  $j$  a ser calculado, isto é:

$$\mathbf{F}_{j-1/2}^n = \mathbf{F}_{j-1/2}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n) \quad , \quad \mathbf{F}_{j+1/2}^n = \mathbf{F}_{j+1/2}(\mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n). \quad (4.8)$$

Para este trabalho, como já mencionado, foi utilizado o método FCT. Este método foi originalmente proposto por BORIS E BOOK (1973) e BOOK *et al.* (1975). O FCT é utilizado para resolução de equações hiperbólicas, problemas envolvendo ondas de choque e discontinuidades. Este método foi escolhido, pois segundo comparações feitas por FIGUEIREDO (2010) e BUENO (2013), o FCT foi o método que apresentou menor interferência dissipativa quando comparado com outros métodos da literatura. Além disso, o FCT é um método que permite diversas aplicações, desde que as equações sejam escritas na forma canônica de leis de conservação.

Sabe-se que métodos numéricos têm tendência a sofrer interferências difusivas e dispersivas em suas soluções (ZALESAK, 1979). O FCT, segundo SONDERMANN *et al.* (2015), pode ser interpretado como um esquema “preditor/corretor” em que difusão é introduzida na fase preditora e a anti-difusão (ou dispersão) é introduzida na fase corretora. Segundo o trabalho de FIGUEIREDO *et al.* (2012) que verificou o grau de acurácia do FCT, o método é de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço.

ESSAMA (2004), FIGUEIREDO (2010), BAPTISTA (2013) e BUENO (2013), utilizaram este método para suas modelagens de escoamento bifásico e obtiveram bons resultados em suas implementações. Recentemente, BUENO *et al.* (2014) empregou este

método numérico para simular o escoamento bifásico numa tubulação com um vazamento e obteve excelentes resultados.

A Eq.(4.7) que representa o sistema de equações diferenciais parciais da Eq.(4.1) na forma discretizada utiliza um esquema explícito e de primeira ordem para a discretização no tempo. Logo, o avanço no tempo,  $\Delta t^n$ , deve ser escolhido com base na condição CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), segundo HIRSCH (1990) e TORO (1997), expressa por:

$$\Delta t^n = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}^n}, \quad (4.9)$$

onde, o parâmetro CFL é um número positivo, em geral menor ou igual à 1. Para o FCT, SOD (1985) mostrou que o valor de CFL não pode ser maior que 0,5. O parâmetro definido por  $\lambda_{\max}^n$  expressa o maior autovalor, em valor absoluto, do domínio do escoamento no tempo  $t^n$ . Fisicamente, este termo quantifica a maior velocidade de propagação da frente de onda. Esse termo é calculado por:

$$\lambda_{\max}^n = \max_j \left[ \max_i |\lambda_j^i| \right], \quad \text{para } j = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, N_{EQ}, \quad (4.10)$$

em que  $N_{EQ}$  é o número de equações que governam o problema. Para o problema em consideração, estipula-se valores de  $\lambda_{\max}^n$  dentro do intervalo 300 m/s a 400 m/s, sendo este o intervalo de variação da velocidade do som no gás, de acordo com os trabalhos de MASELLA *et al.* (1998) e BAPTISTA (2007). Embora a velocidade do som seja função da temperatura, este intervalo está coerente com a faixa de temperatura abordada neste trabalho. Com isso, para este trabalho, considerou-se o maior valor deste intervalo, ou seja, 400 m/s.

Baseando-se em ESSAMA (2004), FLETCHER (1988) e HIRSCH (1990), o FCT segue os seguintes passos nas suas etapas de cálculo:

1) Obter a primeira aproximação  $\tilde{\mathbf{Q}}_j$  através do esquema de Ritzmyer detalhado em TORO (1999).

$$\tilde{\mathbf{Q}}_j = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}^{\text{RI}} \right), \quad (4.11)$$

no qual o cálculo do fluxo é definido como:

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}), \quad (4.12)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}$  é calculado de acordo com:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{j+1}^n + \mathbf{Q}_j^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j^n)]. \quad (4.13)$$

2) Geração de fluxos difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{d}} = \nu_{j+1/2} (\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n). \quad (4.14)$$

De acordo com LEZEAU E THOMPSON (1998) e XIAO (1991), o coeficiente difusivo  $\nu_{j+1/2}$ , é constante e igual a 0,125.

3) Difusão da solução:

$$\mathbf{Q}_j^{\text{d}} = \tilde{\mathbf{Q}}_j + (\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{d}} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{\text{d}}). \quad (4.15)$$

4) Geração de fluxos anti-difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{ad}} = \mu_{j+1/2} (\tilde{\mathbf{Q}}_{j+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_j). \quad (4.16)$$

Segundo os estudos de LEZEAU E THOMPSON (1998) e XIAO (1991), o coeficiente anti-difusivos,  $\mu_{j+1/2}$ , é constante e igual a 0,125.

5) Cálculo da primeira diferença de  $\mathbf{Q}_j^{\text{d}}$ :

$$\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}^{\text{d}} = \mathbf{Q}_{j+1}^{\text{d}} - \mathbf{Q}_j^{\text{d}}. \quad (4.17)$$

6) Limitação dos fluxos anti-difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{cad}} = S \max \left[ 0, \min \left[ S \Delta \mathbf{Q}_{j-1/2}^{\text{d}}, \left| \mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{ad}} \right|, S \Delta \mathbf{Q}_{j+3/2}^{\text{d}} \right] \right], \quad (4.18)$$

em que,

$$S = \text{sgn} \mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{ad}}. \quad (4.19)$$

7) Geração do fluxo entre as células  $\mathbf{F}_{j+1/2}^n$ :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^n = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{FCT}} = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} + \frac{\Delta x}{\Delta t^n} (\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{cad}} - \mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{d}}). \quad (4.20)$$

#### 4.2.2 Discretização do Termo de Fluxo Não Conservativo

Para discretizar o termo não conservativo que aparece na Eq. (4.1), utiliza-se o esquema Minmod de segunda ordem proposto por HARTEN (1983) e utilizado por ESSAMA (2004) e BUENO (2013). Para esse método, tem-se que:

$$\left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\mathbf{H}_j^n}{\Delta x} m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (4.21)$$

em que,  $\mathbf{H}_j^n = \mathbf{H}(\mathbf{W}_j^n)$  e a função  $m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  é definida como:

$$\begin{cases} m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv s \cdot \min[|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, |\mathbf{z}|], & \text{se } \text{sgn}(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{y}) = \text{sgn}(\mathbf{z}) = s \\ m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0, & \text{se } \text{sgn}(\mathbf{x}) \neq \text{sgn}(\mathbf{y}) \neq \text{sgn}(\mathbf{z}) \end{cases}, \quad (4.22)$$

onde  $\text{sgn}$  é a função sinal. As funções  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  são:

$$\mathbf{x} \equiv 2(\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n), \mathbf{y} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_{j-1}^n), \mathbf{z} \equiv 2(\mathbf{W}_j^n - \mathbf{W}_{j-1}^n). \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Imposição das Condições de Contorno

Para a determinação do número de condições de contorno em cada contorno, é necessária uma análise de hiperbolicidade do sistema. A análise de hiperbolicidade é local em cada contorno e o número de condições prescritas é função do número de características que emanam do contorno para dentro do domínio (JEFFREY, 1976). A análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno encontram-se detalhadas no Apêndice A ao final deste trabalho.

Para os casos estudados que serão abordados no Capítulo 6, obteve-se 4 autovalores positivos e 1 negativo, ou seja, 4 condições são impostas na entrada do duto e apenas 1 condição é imposta na saída do duto. De acordo com os trabalhos em escoamento bifásico presentes na literatura, como o de ESSAMA (2004), BUENO (2013), BAPTISTA (2013), propõem-se então, como condição de contorno na entrada do duto fixar as velocidades do gás e do líquido, a temperatura e a fração volumétrica de líquido. Já na saída, impõem-se a condição de contorno de pressão conhecida.

As condições de contorno são impostas em células fantasmas (*ghost cells*). Uma célula fantasma é adicionada no início do duto e a outra é adicionada ao final do duto. Os valores das variáveis primitivas impostas nestas células do contorno são:

- Na célula fantasma da entrada do duto ( $j=0$ ):

São impostas as velocidades do gás e do líquido, temperatura e fração volumétrica do líquido. Para pressão é utilizado o valor da pressão na célula à frente ( $j=1$ ) no instante de tempo anterior.

- Na célula fantasma da saída do duto ( $j=N+1$ ):

É imposta a pressão. Para a temperatura, velocidades do líquido e do gás e fração volumétrica de líquido são utilizados os valores da célula anterior ( $j=N$ ) no instante de tempo anterior.

Com isso, para o procedimento de cálculo do FCT, algumas alterações necessitam ser feitas para o cálculo específico dos fluxos próximos ao contorno. Sendo assim, os procedimentos de números 1, 3 e 6 do cálculo do FCT, descritos na Seção 4.2.1 deste capítulo são modificados da seguinte maneira para os contornos:

- Procedimento 1: Aproximação inicial de  $\tilde{\mathbf{Q}}_j$  :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{Q}_0^n, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{N+1} = \mathbf{Q}_{N+1}^n. \quad (4.24)$$

- Procedimento 3: Difusão da solução:

$$\mathbf{Q}_0^d = \tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{Q}_0^n \quad , \quad \mathbf{Q}_{N+1}^d = \tilde{\mathbf{Q}}_{N+1} = \mathbf{Q}_{N+1}^n . \quad (4.25)$$

- Procedimento 6: Limitação dos fluxos anti-difusivos:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{cad} = S \max \left[ 0, \min \left[ \left| \mathbf{F}_{1/2}^{ad} \right|, S \Delta \mathbf{Q}_{3/2}^d \right] \right], \quad (4.26)$$

$$\mathbf{F}_{N+1/2}^{cad} = S \max \left[ 0, \min \left[ S \Delta \mathbf{Q}_{N-1/2}^d, \left| \mathbf{F}_{N+1/2}^{ad} \right| \right] \right]. \quad (4.27)$$

A condição inicial é imposta estendendo-se os valores das condições de contorno para o interior do duto em  $t=0$ .

#### 4.2.4 Critério de Convergência

O critério de convergência utilizado para as simulações atingirem o regime permanente é determinado por:

$$\text{máx } \xi(\chi_i^n)_j \leq 10^{-6}, \quad (4.28)$$

$$\xi(\chi_i^n)_j = \frac{\left| (\chi_i^{n+1})_j - (\chi_i^n)_j \right|}{\text{máx} \left\{ 1, \left| (\chi_i^n)_j \right| \right\}}, \quad (4.29)$$

onde  $(\chi_i^n)_j$  é uma variável dependente do problema podendo assumir os seguintes valores:

$$j \in \{2, N-1\}, n \in \{1, 2, 3, \dots\}, i \in \{1, \dots, N_{EQ}\} \quad \text{onde: } i = \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow p \\ 2 \rightarrow \alpha_L \\ 3 \rightarrow u_G \\ 4 \rightarrow u_L \\ 5 \rightarrow T \end{array} \right\}. \quad (4.30)$$

A variável  $n$  está representando os passos no tempo, a variável  $j$  o espaço de discretização e a variável  $i$  são os parâmetros do escoamento determinados pelo vetor de variável primitiva,  $\mathbf{W}$ , apresentado no início deste capítulo.

## **5. MODELO MATEMÁTICO E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO**

Com o objetivo de analisar o comportamento do método numérico com a inclusão da equação da energia e validar seus resultados, foi desenvolvido como primeira etapa do trabalho, um modelo mais simples para escoamento monofásico para gases, resolvido numericamente com o método FCT.

Neste capítulo são apresentadas as equações do modelo para escoamento monofásico, assim como as hipóteses e considerações adotadas. Os resultados obtidos a partir da simulação com o FCT são comparados com alguns casos presentes na literatura e são apresentados ao final deste capítulo.

### **5.1 HIPÓTESES DO ESCOAMENTO MONOFÁSICO PARA GASES**

Algumas hipóteses foram feitas a fim de estudar o escoamento monofásico de gás em dutos, que são:

- o escoamento é unidimensional, ou seja, as propriedades como velocidade, pressão, temperatura e massa específica só dependem da coordenada axial do duto;
- o duto é horizontal;
- a área da seção transversal é constante ao longo do duto;
- é considerado o modelo de gás ideal;
- as propriedades do fluido como calor específico, condutividade térmica e viscosidade são tratadas como constantes;
- o gás considerado é o ar;
- é considerada apenas a perda de calor na direção radial por condução e convecção, desconsiderando perdas por condução axial.

### **5.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO**

A formulação matemática é composta pelas equações governantes do escoamento: equação de conservação de massa, equação de conservação da quantidade de movimento

linear e equação de conservação da energia, que são escritas conforme as equações abaixo:

- Equação de conservação da massa (Equação da continuidade):

$$\frac{\partial(\rho_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G u_G)}{\partial x} = 0. \quad (5.1)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho_G u_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G u_G^2 + p)}{\partial x} = -\rho_G g \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G |u_G| S}{A}. \quad (5.2)$$

- Equação de conservação da energia:

$$\frac{\partial\left(\rho_G\left(e_G + \frac{1}{2}u_G^2\right)\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho_G u_G\left(e_G + \frac{1}{2}u_G^2\right) + p u_G\right)}{\partial x} = \frac{q_w'' S}{A} - \rho_G g u_G \operatorname{sen} \beta. \quad (5.3)$$

O cálculo do fluxo de calor lateral,  $q_w''$ , pode ser caracterizado conforme equações já descritas no Capítulo 3 referentes à escoamento bifásico.

### 5.3 EQUAÇÕES ESCRITAS NA FORMA CONSERVATIVA

Analogamente ao problema de escoamento bifásico descrito no Capítulo 4, estas equações que governam o escoamento podem ser escritas na forma canônica de leis de conservação, onde  $\mathbf{Q}$  é o vetor de variáveis conservadas,  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  é o vetor de fluxo,  $\mathbf{W}$  é o vetor das variáveis primitivas e  $\mathbf{S}(\mathbf{W})$  é o vetor representativo do termo fonte, relacionados pelo sistema de equações diferenciais hiperbólicas a seguir:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}. \quad (5.4)$$

Dessa forma, as equações descritas na seção anterior, são reescritas na forma matricial como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho_G \\ \rho_G u_G \\ \rho_G (e_G + u_G^2/2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho_G u_G \\ \rho_G u_G^2 + p \\ \rho_G u_G (e_G + (u_G^2/2) + (p/\rho_G)) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_G g \sin \beta - \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G |u_G| \pi D}{A} \\ \frac{q_w'' \pi D}{A} - \rho_G g u_G \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} p \\ u_G \\ T \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

#### 5.4 VALIDAÇÃO DO MÉTODO FCT PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO

Com o objetivo de validar o programa que utiliza o método numérico FCT, foram escolhidos dois casos da literatura cujas soluções analíticas são conhecidas, são eles: o escoamento na linha Fanno e o escoamento no tubo de choque. Além destes dois casos, foi realizada uma simulação para o caso em regime permanente, isto é, sem os termos de derivadas temporais nas equações. Para resolver a EDO (Equação Diferencial Ordinária) associada à simulação para regime permanente, foi utilizada a sub-rotina DIVPAG do IMSL (MANUAL DO IMSL, Versão 7.0) no FORTRAN (INTEL). A solução da EDO foi comparada com a solução obtida através do FCT após atingir o regime permanente, ou seja, após atingir a convergência da solução no tempo.

##### 5.4.1 Validação do FCT com o Escoamento na Linha Fanno

O escoamento de um fluido na linha Fanno é adiabático, viscoso e compressível. Para esse escoamento, sabendo-se o estado inicial de um fluido na seção 1 de um volume de controle, é possível determinar o estado do fluido na seção 2 através de um balanço de massa, energia e quantidade de movimento. Para este tipo de escoamento representado pela linha Fanno, o ponto de maior entropia é aquele onde o escoamento é sônico, ou seja, o ponto onde o número de Mach é igual a um.

A relação entre o valor do número de Mach,  $M$ , em cada ponto do escoamento na Linha de Fanno, e o comprimento do duto onde o  $M$  é igual à unidade,  $L_{\max}$ , pode ser escrita como (FOX *et al.*, 2010):

$$\int_0^{L_{\max}} \frac{4f}{D_i} dx = \int_M^1 \frac{1-M^2}{\gamma M^4 \left[ 1 + \frac{(\gamma-1)M^2}{2} \right]} d(M^2), \quad (5.7)$$

onde,  $\gamma$  é a razão de calores específicos. Integrando a equação acima, obtém-se:

$$\frac{4fL_{\max}}{D_i} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{(\gamma+1)M^2/2}{1+(\gamma-1)M^2/2} \right]. \quad (5.8)$$

A Eq. (5.8) resulta no máximo  $4fL/D_i$  correspondente a qualquer número de Mach inicial. O  $4fL_{\max}/D_i$  é uma função de Mach, então, o comprimento do duto  $L$ , para que o número de Mach mude de  $M_1$  para  $M_2$  é:

$$\frac{4fL}{D_i} = \left( \frac{4fL_{\max}}{D_i} \right)_{M_1} - \left( \frac{4fL_{\max}}{D_i} \right)_{M_2}. \quad (5.9)$$

Considera-se que os parâmetros representados pelo (\*), nas equações a seguir, são relativos às condições onde o número de Mach é igual a um. Sendo assim, os parâmetros que caracterizam o escoamento são expressos, segundo FOX *et al.* (2010): por:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}, \quad , \quad \frac{u}{u^*} = \left[ \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \right]^{1/2}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left[ \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}{\frac{\gamma+1}{2} M^2} \right]^{1/2}, \quad , \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \right]^{1/2}. \quad (5.11)$$

Com as Eqs. (5.9 - 5.11) é possível calcular a solução analítica do escoamento e comparar com os resultados numéricos obtidos com a simulação usando o método numérico FCT.

A Tabela 5.1 mostra os valores dos parâmetros do escoamento e dados do duto que foram usados para calcular a solução analítica e como dados de entrada para resolver numericamente com o FCT.

Tabela 5.1: Dados de entrada do escoamento da linha Fanno.

Número de Mach na entrada	0,3
Pressão na entrada	1 atm = 101325 Pa
Temperatura na entrada	273 K
Velocidade na entrada	100 m/s
Massa específica na entrada	1,3 kg/m <sup>3</sup>
Razão de calores específicos - $\gamma$	1,4
Constante do gás (ar)	287 J/kg K
Pressão na saída	63210 Pa
Número de células de discretização	1000 células
Diâmetro do duto	0,15 m
Comprimento do duto	30 m
Fator de atrito (constante)	0,005
Taxa de transferência de calor	Adiabático

A solução analítica para este escoamento na linha Fanno foi calculada a partir de uma rotina feita com o auxílio do *software* Mathematica (WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10), que resolve numericamente a Eqs. (5.8 e 5.9) em cada seção do domínio, obtendo assim o número de Mach local em todas as seções do duto.

As Figura 5.1 a 5.4 a seguir representam as comparações dos resultados de variação de massa específica, pressão, velocidade e temperatura ao longo do duto obtidos com a simulação do FCT, representada pela curva vermelha contínua, e com a solução calculada analiticamente, representada pela curva azul tracejada.

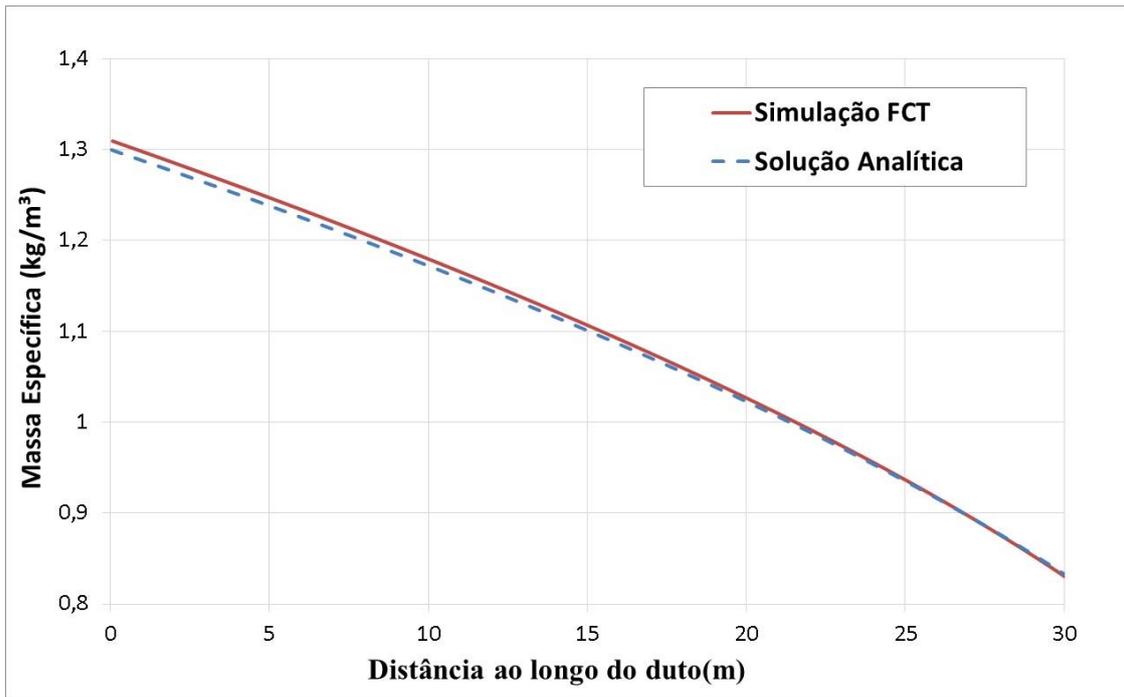


Figura 5.1: Variação da massa específica ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno

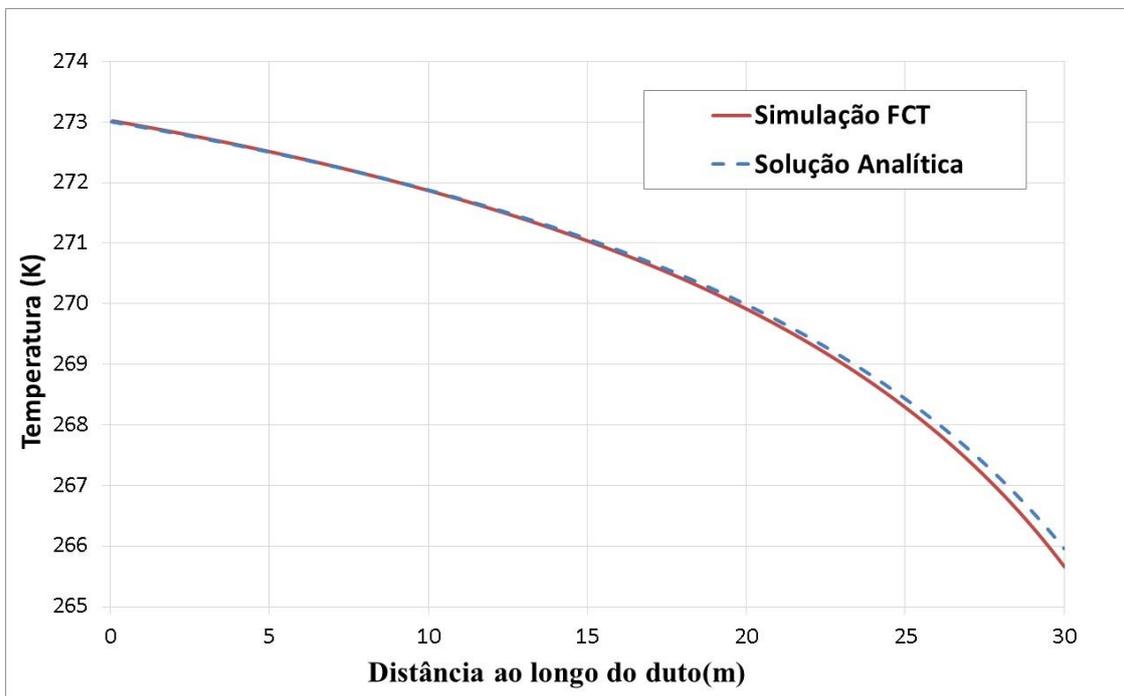


Figura 5.2: Variação da temperatura ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno.

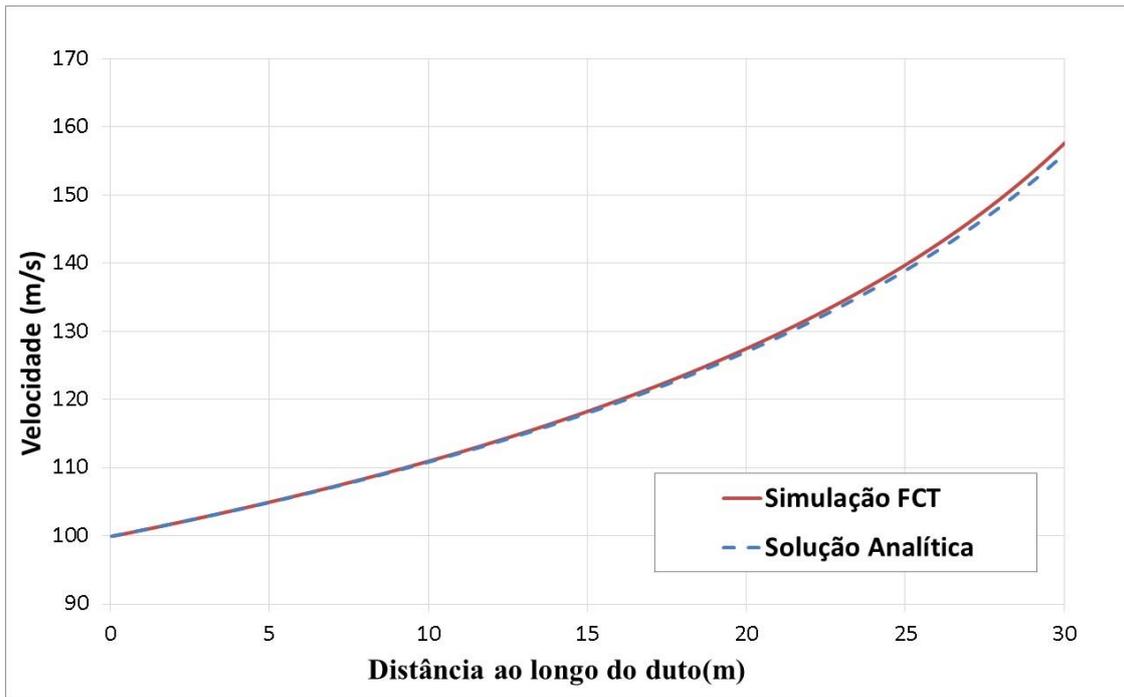


Figura 5.3: Variação da velocidade ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno.

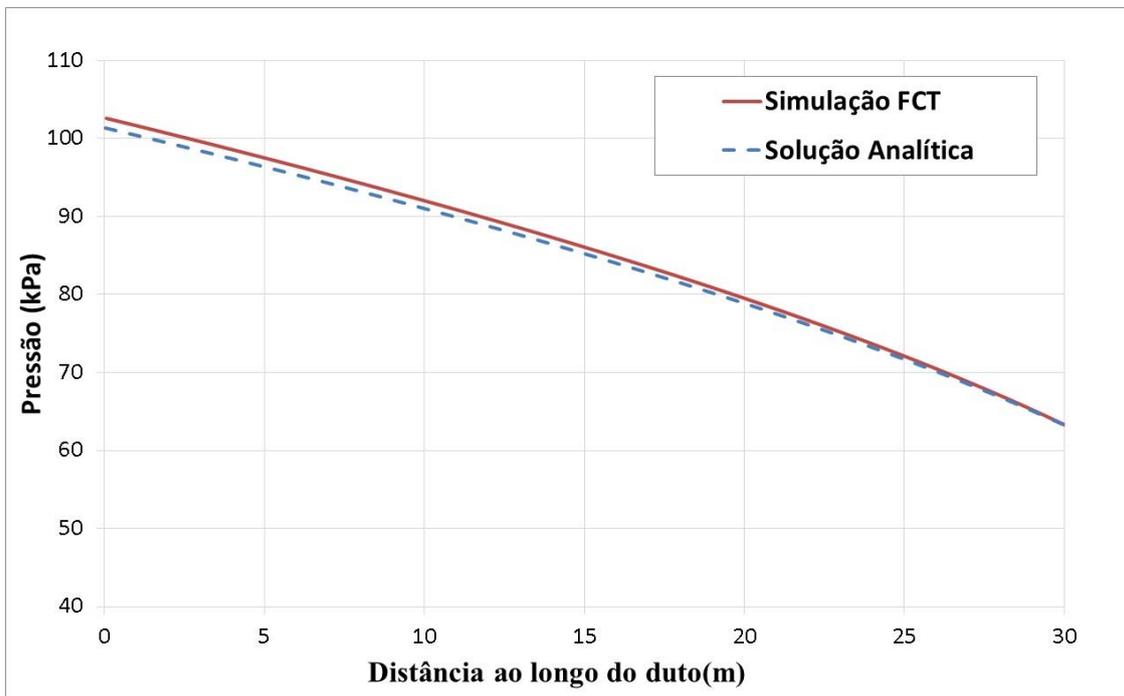


Figura 5.4: Variação da pressão ao longo do duto obtida para escoamento na linha Fanno.

Como se pode perceber, a solução numérica obtida com o FCT representou com precisão a solução analítica para o problema da linha Fanno, visto que as curvas se sobrepõem umas com as outras sobre todo o domínio do fluido, exceto por uma pequena

discrepância apresentada nas extremidades onde não se impõe aquela variável como condição de contorno.

O número de células utilizadas para a discretização do duto é de extrema importância para a acurácia dos resultados. Sendo assim, é feito um estudo dos erros relativos relacionados com a discretização do duto a fim de determinar o refinamento da malha ideal para as simulações. Esse estudo é baseado na integração da variável global quantidade de movimento linear, definida pela Eq.(5.12). Esta variável global combina explicitamente todas as variáveis do escoamento em uma única grandeza física, exceto a temperatura e pressão que estão implícitas no cálculo da massa específica do gás.

$$P \equiv \int_0^L \rho_G u_G A dx . \quad (5.12)$$

Além do estudo da malha baseado na integração da variável global quantidade de movimento linear, é também realizada a análise baseada na variável local pressão que é calculada na entrada do duto. A Tabela 5.2 mostra o erro relativo calculado em relação aos resultados obtidos com a malha mais refinada para a variável global e local.

Tabela 5.2: Erro relativo em relação ao número de células discretizadas para o escoamento monofásico.

Variável global quantidade de movimento linear	
Número de células	Erro Relativo
100	2,33%
1000	0,21%
Variável local pressão na entrada do duto	
Número de células	Erro Relativo
100	0,78%
1000	0,068%

Fica assim explícito, que a discretização com 100 células não produz resultados bem acurados se comparados com o resultado obtido com 1000 células. Além disso, a simulação com 10000 células demorou mais tempo para convergir, o que indica que a acurácia obtida não compensa o tempo computacional e o excesso de memória utilizados para refinar tanto a malha. Sendo assim, foi escolhido trabalhar com 1000 células computacionais, servindo este estudo de base para os próximos casos estudados.

### 5.4.2 Validação do FCT com Escoamento no Tubo de Choque

Com o objetivo de validar o comportamento do método numérico durante o regime transiente, realiza-se um teste chamado de tubo de choque, também conhecido como problema de Riemann. O problema de valor inicial do tubo de choque consiste em dividir o domínio em duas regiões com a presença de uma membrana ou diafragma entre elas localizado em uma determinada distância inicial desejada, como na Figura 5.5. O efeito da viscosidade é desprezível para este problema.

Essas duas regiões estão com o mesmo fluido, porém com massas específicas e pressões distintas. No instante  $t=0$ , a esta membrana que separa as regiões é desfeita, provocando uma descontinuidade.

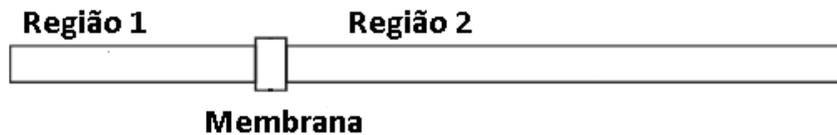


Figura 5.5: Representação do tubo de choque.

As equações do escoamento, as Eqs. (5.1 – 5.3) são escritas na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (5.13)$$

No instante inicial ( $t=0$ ), a onda de choque está localizada em  $x=x_0$ . As condições iniciais são:

$$\begin{cases} u(x,0) = u_1, \rho(x,0) = \rho_1, p(x,0) = p_1, \text{ para } x_1 \leq x < x_0 \\ u(x,0) = u_2, \rho(x,0) = \rho_2, p(x,0) = p_2, \text{ para } x_0 < x \leq x_2 \end{cases}, \quad (5.14)$$

onde o subscrito 1 e 2 representam as regiões 1 e 2, respectivamente, como mostradas na Figura 5.5.

Os parâmetros iniciais e dados de entrada do caso analisado para este tipo de escoamento no tubo de choque é apresentado através da Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Dados de entrada para o caso do tubo de choque.

Posição da Membrana ou Diafragma	5 m
Pressão à esquerda no instante inicial	$10^5$ Pa
Pressão à direita no instante inicial	$10^4$ Pa
Massa específica à esquerda no instante inicial	1 kg/m <sup>3</sup>
Massa específica à direita no instante inicial	0,125 kg/m <sup>3</sup>
Velocidade à esquerda no instante inicial	0 m/s
Velocidade à direita no instante inicial	0 m/s
Temperatura à esquerda no instante inicial	348,43 K
Temperatura à direita no instante inicial	278,74 K
Razão de calores específicos (ar)	1,4
Constante do gás (ar)	287 J/kg K
Comprimento do duto	10 m
Diâmetro do duto	1,13 m
Número de células de discretização	1000 células
Taxa de transferência de calor	Adiabático
Fator de Atrito	Sem atrito

O tempo de parada da simulação foi de  $6,1 \times 10^{-3}$  s, tempo este que os resultados foram comparados com a solução exata. A solução exata para esse escoamento no tubo de choque é apresentada no livro do TORO (1997), onde consta uma rotina escrita em FORTRAN que calcula a solução para o tubo de choque.

Os resultados obtidos desta validação com o tubo de choque estão representados nas Figuras 5.6 a 5.9. A curva vermelha contínua representa a solução obtida com o FCT e a curva em azul tracejada representa a solução exata.

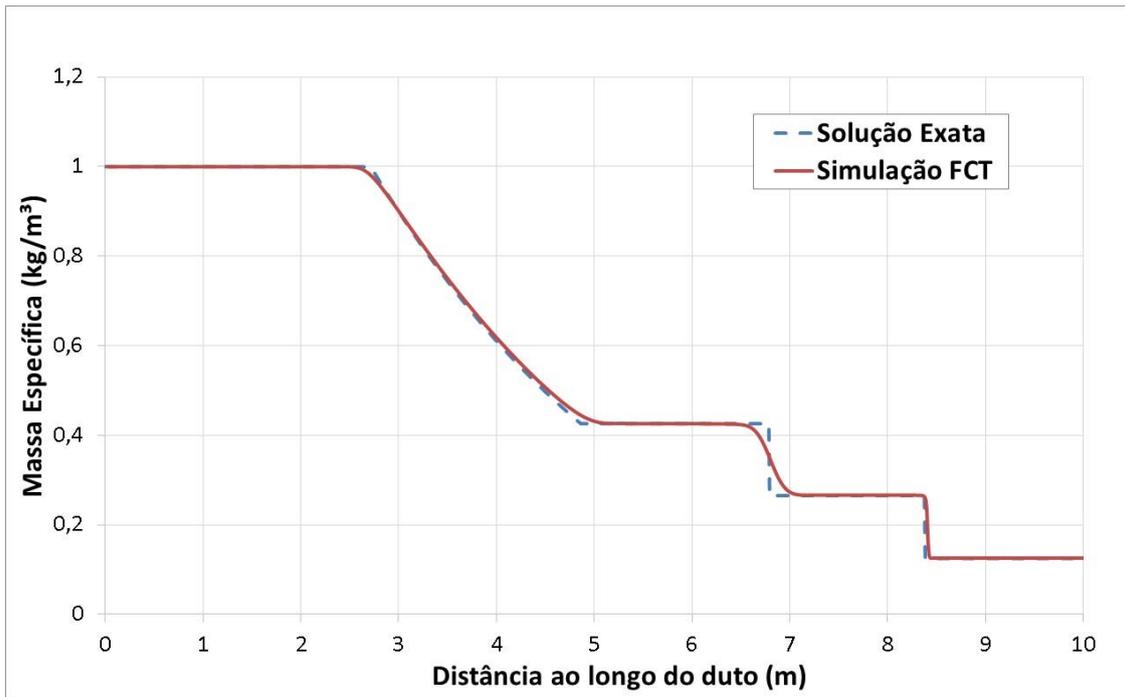


Figura 5.6: Variação da massa específica ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $6,1 \times 10^{-3}$  s.

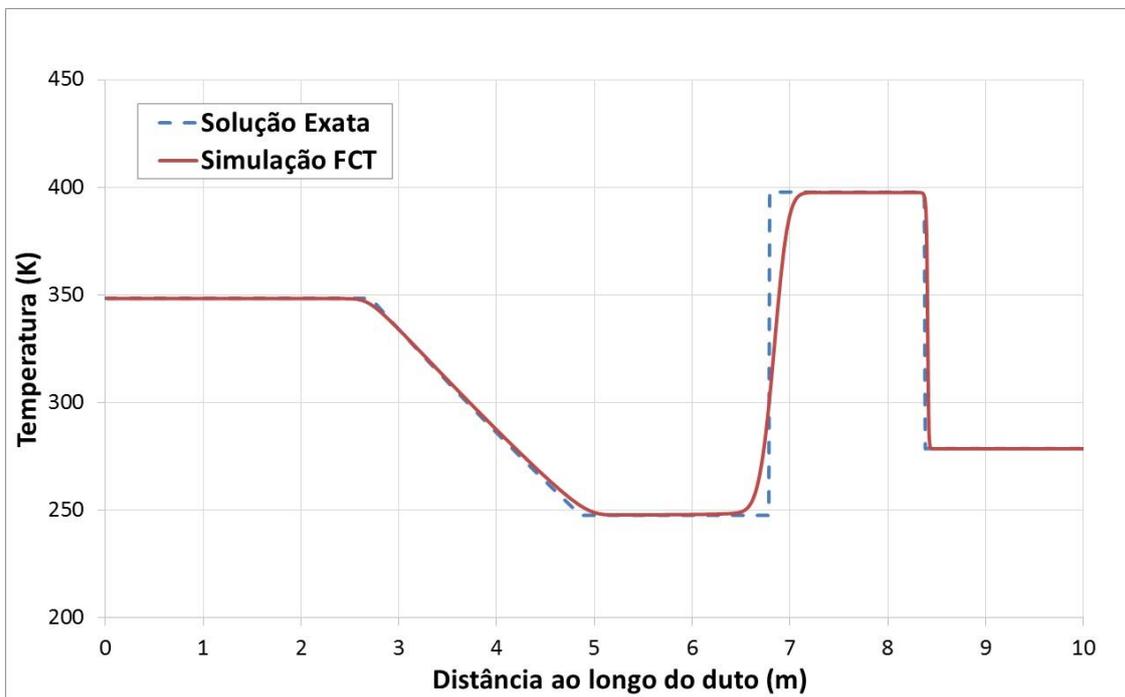


Figura 5.7: Variação da temperatura ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $6,1 \times 10^{-3}$  s.

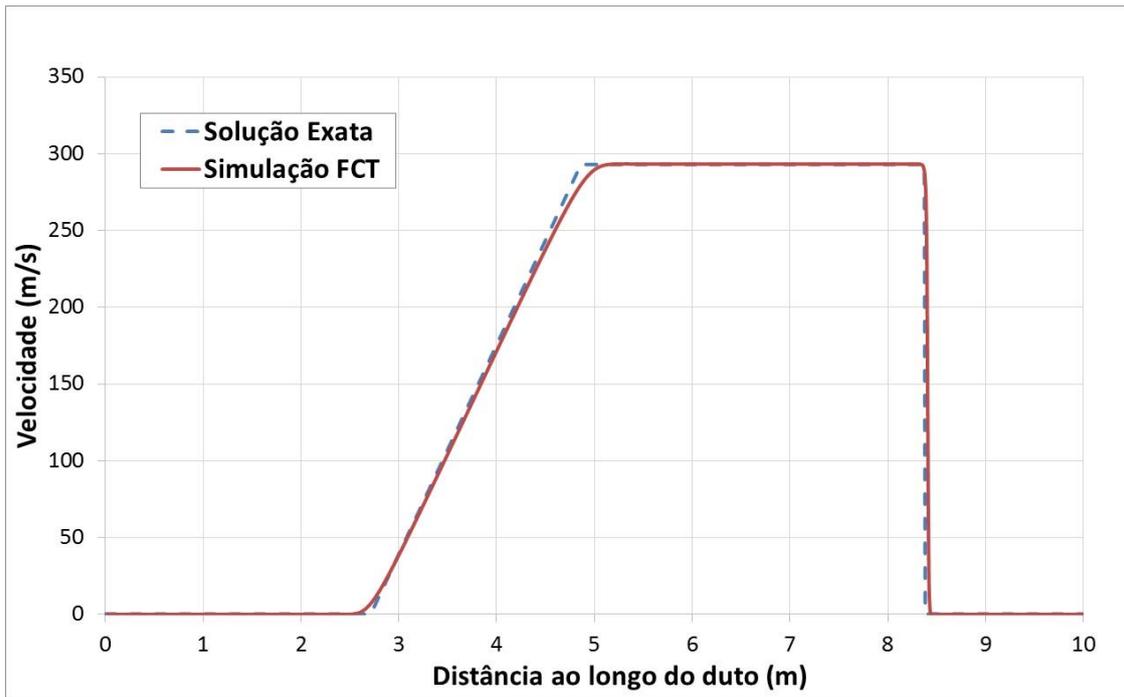


Figura 5.8: Variação da velocidade ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $6,1 \times 10^{-3}$  s.

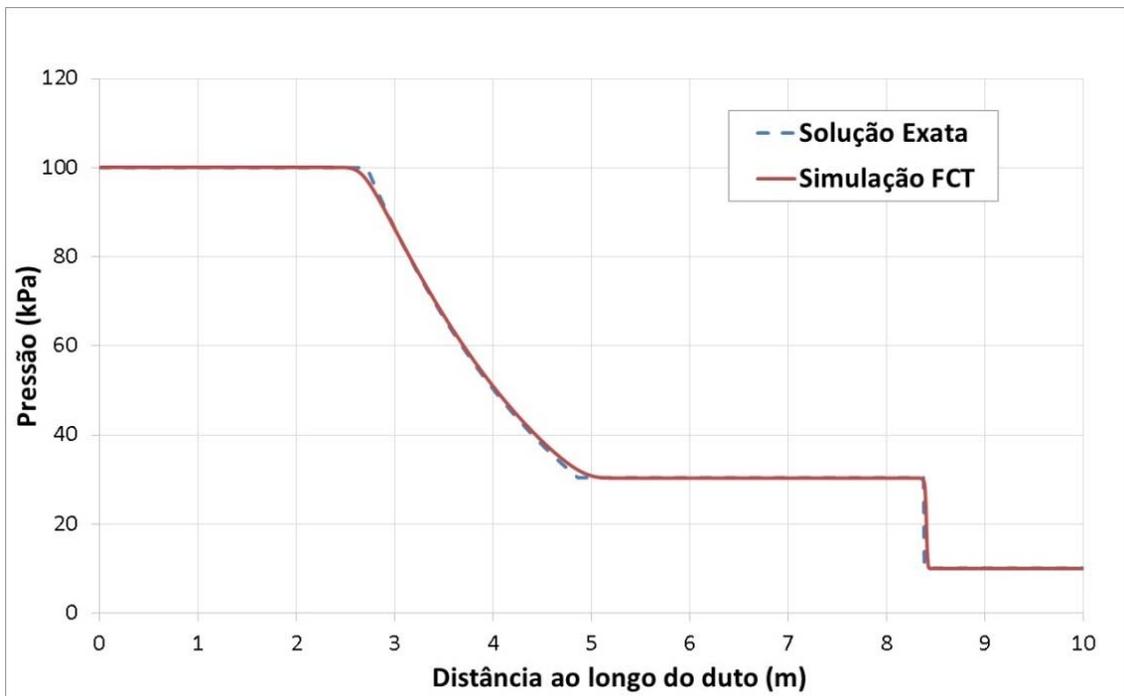


Figura 5.9: Variação da pressão ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $6,1 \times 10^{-3}$  s.

Em outro instante de tempo, para  $9 \times 10^{-3}$  s, são realizadas as mesmas comparações com a solução exata, e obtém-se os resultados, representados pelas Figura 5.10 a 5.13.

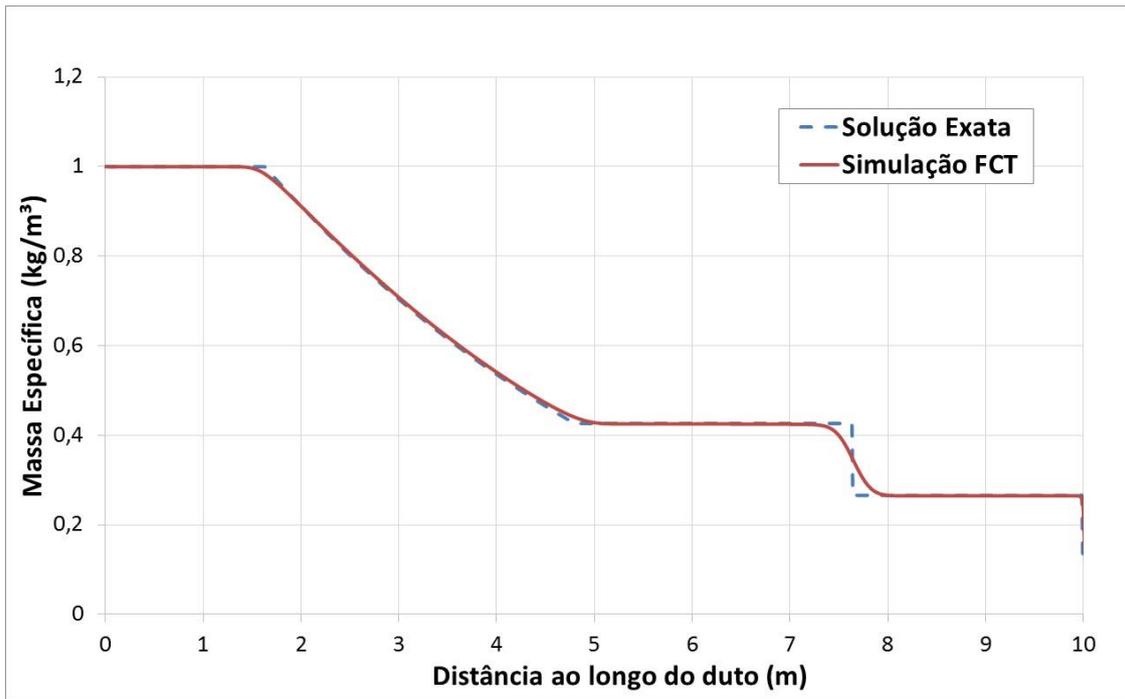


Figura 5.10: Variação da massa específica ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $9 \times 10^{-3}$  s.

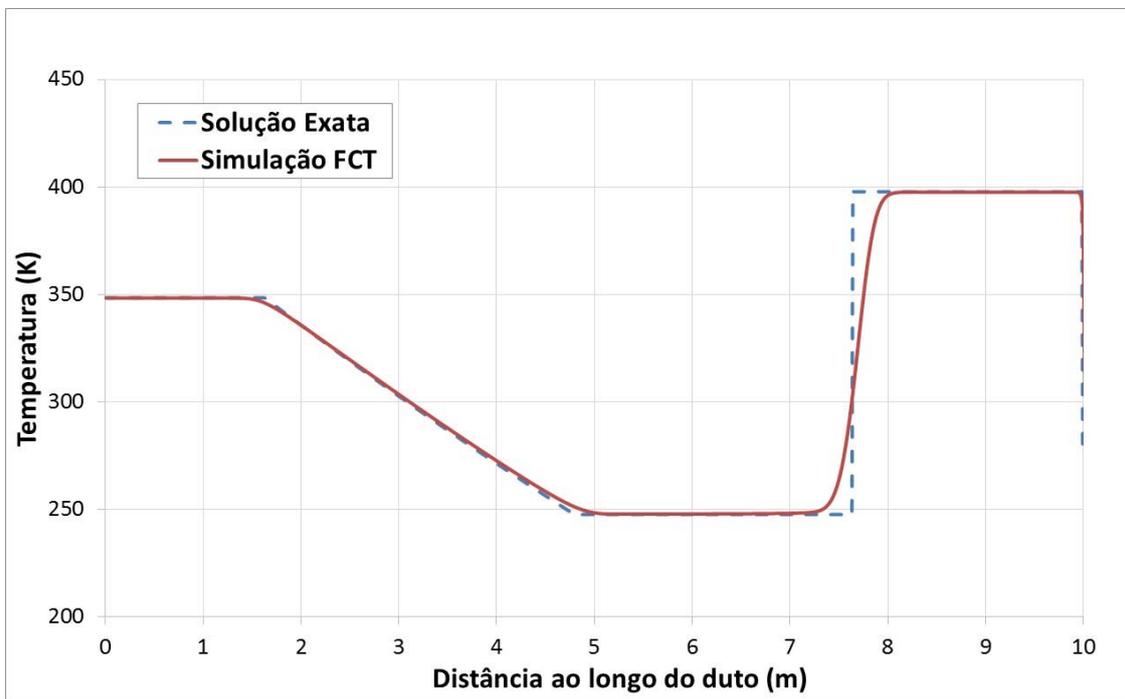


Figura 5.11: Variação de temperatura ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $9 \times 10^{-3}$  s.

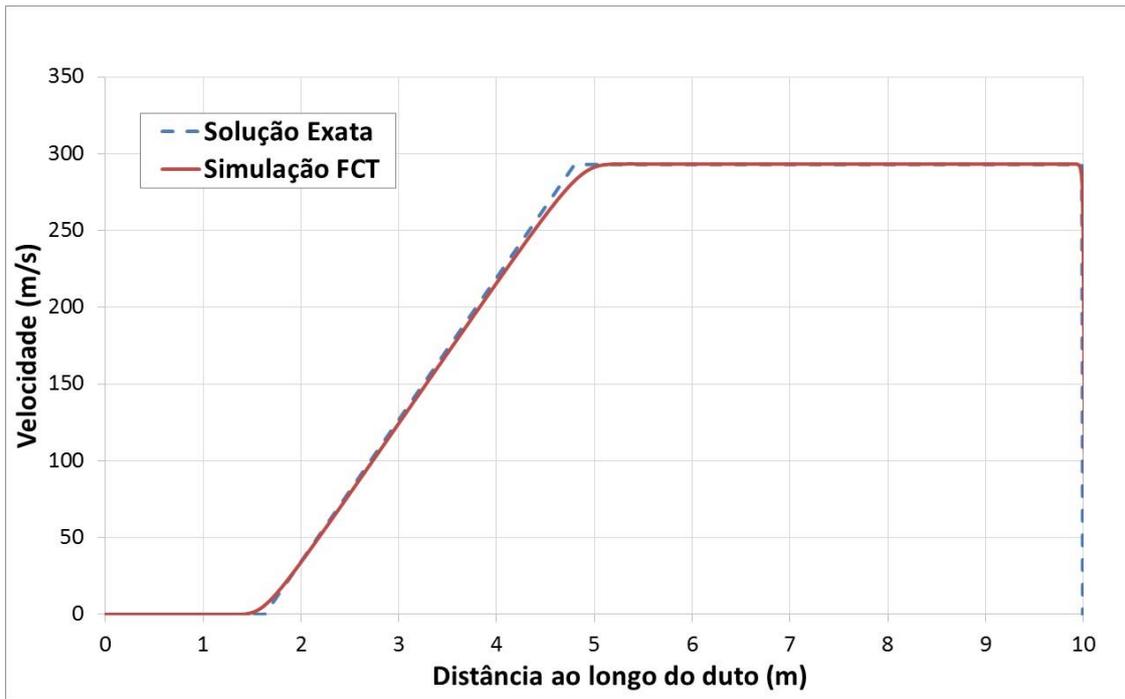


Figura 5.12: Variação de velocidade ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $9 \times 10^{-3}$  s.

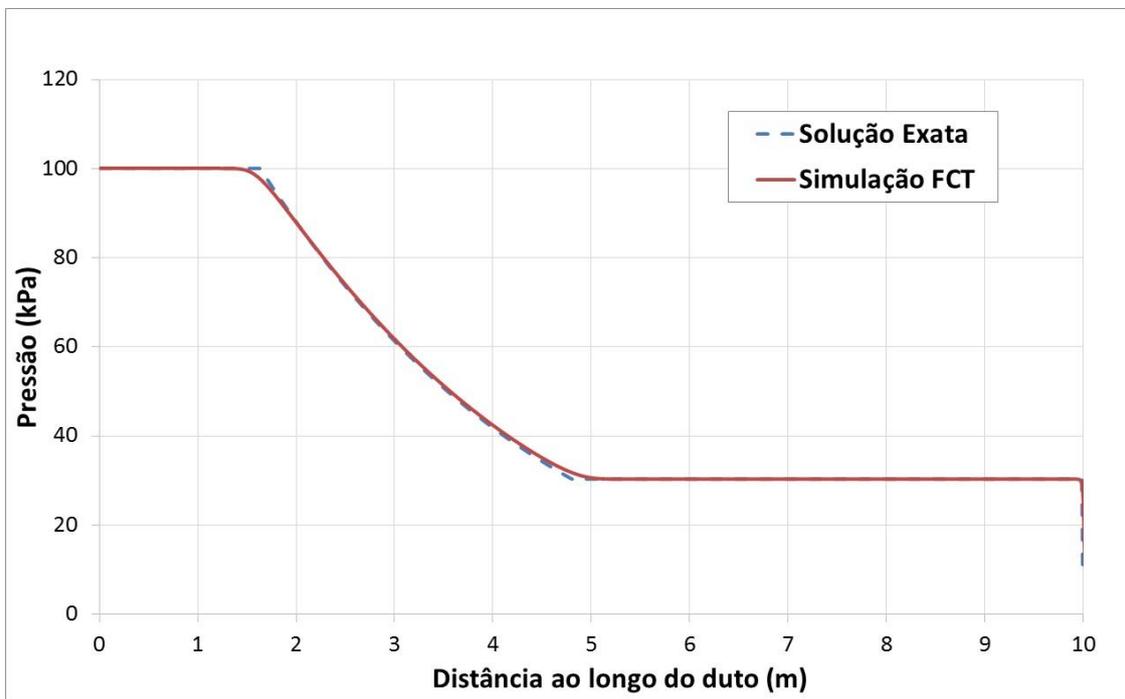


Figura 5.13: Variação de pressão ao longo do duto obtida para escoamento em tubo de choque no tempo  $9 \times 10^{-3}$  s.

Os resultados obtidos por esta validação demonstram que a solução numérica está representando com acurácia a solução exata do tubo de choque. Além disso, o FCT se

mostrou ser um ótimo método para determinar descontinuidades, visto que o método representou com precisão as descontinuidades presentes na solução utilizada como validação. Vale mencionar também, que o FCT não apresentou oscilações nas vizinhanças de descontinuidade e não tem acentuada dissipação.

### 5.4.3 Validação do FCT com a Solução em Regime Permanente

A solução em regime transiente, Eqs.(5.1 – 5.3), atinge o regime permanente, isto é, estado em que os parâmetros do escoamento não variam mais dentro de uma tolerância de convergência.

Propõem-se, então, comparar este resultado da simulação transiente com a solução em regime permanente propriamente dita. Para isso, as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia foram reescritas sem os termos de derivadas temporais, o que caracteriza o regime permanente. Sendo assim, as equações podem ser reescritas como:

- Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial(\rho_G u_G)}{\partial x} = 0, \quad (5.15)$$

ou escrita em função das variáveis primitivas  $p$ , pressão, e  $T$ , temperatura, pela equação de gás ideal:  $p = \rho RT$ , onde  $R$  é a constante do gás, como:

$$\frac{u_G}{RT^2} \left( T \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{p}{RT} \frac{\partial u_G}{\partial x} = 0. \quad (5.16)$$

- Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\rho_G u_G \frac{\partial u_G}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_G g \sin \beta - \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G^2 |u_G| S}{A}. \quad (5.17)$$

- Equação de conservação da energia:

$$\rho_G u_G \frac{\partial e_G}{\partial x} + p \frac{\partial u_G}{\partial x} = \frac{q_w'' S}{A} + \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G^2 |u_G| S}{A}. \quad (5.18)$$

Temos que  $e_G = c_{vG}T$ , onde  $c_{vG}$  é o calor específico a volume constante, a equação da energia fica escrita na forma:

$$\rho_G u_G c_{vG} \frac{\partial T}{\partial x} + p \frac{\partial u_G}{\partial x} = \frac{q_w'' S}{A} + \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G^2 |u_G| S}{A}. \quad (5.19)$$

Estas equações são expressas na forma canônica, conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \text{ ou } \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{W}). \quad (5.20)$$

O vetor  $\mathbf{W}$  é o vetor das variáveis primitivas,  $\mathbf{S}(\mathbf{W})$  é o termo fonte e  $\mathbf{A}(\mathbf{W})$  é a matriz dos termos conservativos. Logo, identificando esses termos da Eq. (5.20), obtém-se:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} p \\ u_G \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_G g \sin \beta - \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G |u_G| \pi D}{A} \\ \frac{q_w'' \pi D}{A} + \frac{1}{2} \frac{f \rho_G u_G |u_G| \pi D}{A} \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{u_G}{RT} & \frac{p}{RT} & -\frac{p u_G}{RT^2} \\ 1 & \rho_G u_G & 0 \\ 0 & p & \rho_G u_G c_{vG} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Para resolver este sistema de equações pela segunda maneira proposta na Eq. (5.20), a matriz  $\mathbf{A}$  deve ser escrita na forma da sua inversa. Esta matriz inversa de  $\mathbf{A}$  foi calculada com o auxílio do *software* comercial Mathematica (WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10). Sabendo que  $c_G^2 = \gamma RT$ , onde  $c_G$  é a velocidade do som no gás, e  $\rho_G = p/RT$  tem-se que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_{vG} \mathcal{M}_G}{\mathcal{M}_G^2 c_{vG} - R - c_{vG}} & \frac{-(c_{vG} + R)}{\mathcal{M}_G^2 c_{vG} - R - c_{vG}} & \frac{u_G}{T \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} \\ \frac{-c_{vG}}{\rho_G \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} & \frac{c_{vG} \mathcal{M}_G}{\rho_G c_G^2 \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} & \frac{-1}{T \rho_G \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} \\ \frac{p}{\rho_G^2 u_G \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} & \frac{-1}{\rho_G \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} & \frac{-1}{u_G \rho_G \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} + \frac{u_G}{c_G^2 \rho_G \left( \frac{\mathcal{M}_G^2 c_{vG}}{c_G^2} - R - c_{vG} \right)} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Para obter a validação do FCT em regime transiente com o caso em regime permanente, foi considerado o caso em que há troca de calor por convecção forçada interna, condução radial e convecção externa, descritas no Capítulo 3 deste trabalho.

O sistema de equações diferenciais ordinárias, que representa as equações do regime permanente foi resolvido numericamente por uma sub-rotina do IMSL, DIVIPAG (MANUAL DO IMSL, Versão 7.0) elaborada no FORTRAN.

A sub-rotina IVPAG/DIVPAG (MANUAL DO IMSL, Versão 7.0) resolve um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem, na forma da Eq.(5.20) com as condições iniciais em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada não singular de ordem  $N$ . Duas classes de métodos implícitos lineares de várias etapas estão disponíveis, a primeira classe é o método implícito de Adams-Moulton (até a ordem doze), e a segunda é o método BDF (*Backward Differentiation Formulas*) que usa as fórmulas de diferenças divididas (até a ordem cinco). O método BDF é frequentemente chamado de método rígido (*stiff*) de Gear. Esses métodos são conhecidos por sua capacidade de resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias rígidas, que podem conter componentes que variam muito rapidamente e outras que variam muito lentamente. A solução em regime permanente é obtida a partir do emprego da sub-rotina DVIPAG (calcula a solução com variáveis de dupla precisão) do IMSL.

A Tabela 5.4 apresenta os dados da configuração do duto que foi utilizado para simular este caso de validação. Além disso, a tabela apresenta as condições de contorno que foram prescritas como dados de entrada do programa.

Tabela 5.4: Dados de entrada para o caso em regime permanente.

Pressão na saída do duto	$30 \times 10^5$ Pa
Velocidade na entrada do duto	4 m/s
Temperatura na entrada do duto	300 K
Comprimento do duto	10 km
Diâmetro do duto	0,3032 m
Condutividade Térmica do duto	50 W/mK
Espessura do duto	0,0254 m
Número de células de discretização	1000 células
Temperatura do ambiente externo	293 K
Fuido que escoo externamente so duto	Água
Velocidade do escoamento externo ao duto	1 m/s

Abaixo, nas Figura 5.14 a 5.17, estão representados os resultados das variações de pressão, velocidade e temperatura ao longo do duto comparando-se as simulações do regime permanente (utilizando a sub-rotina do IMSL no FORTRAN), curva azul tracejada, e o regime permanente atingido através de um transiente utilizando o método numérico FCT, curva vermelha contínua.

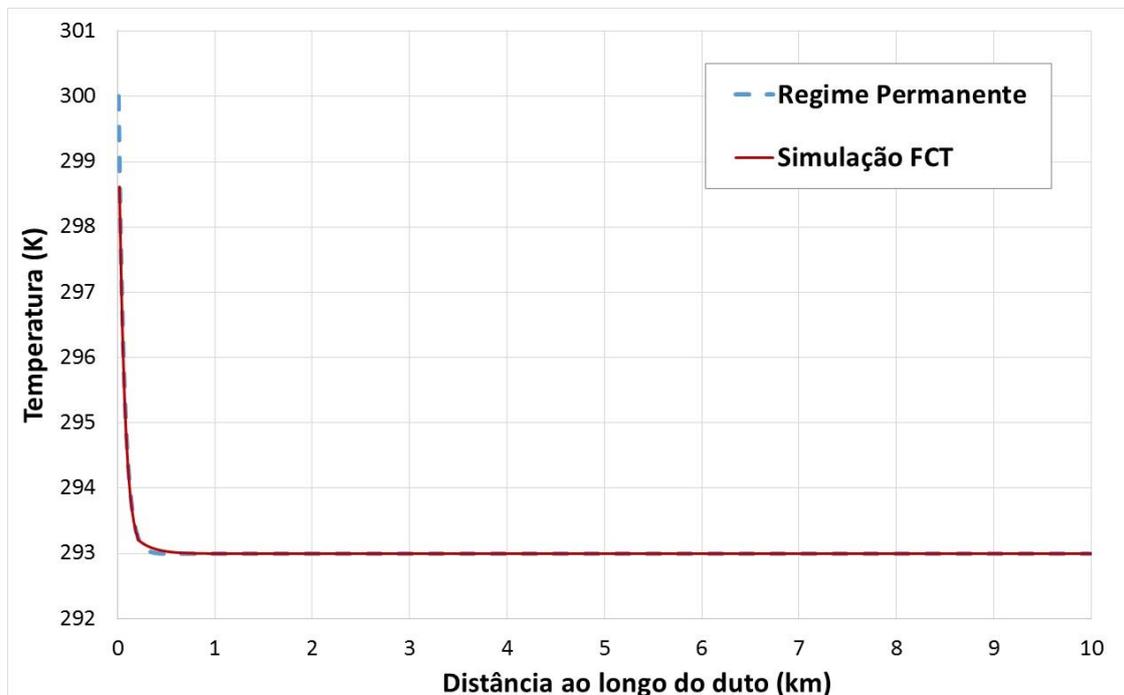


Figura 5.14: Variação da temperatura ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente.

Ampliando a região de entrada do duto, região esta onde ocorre a queda de temperatura:

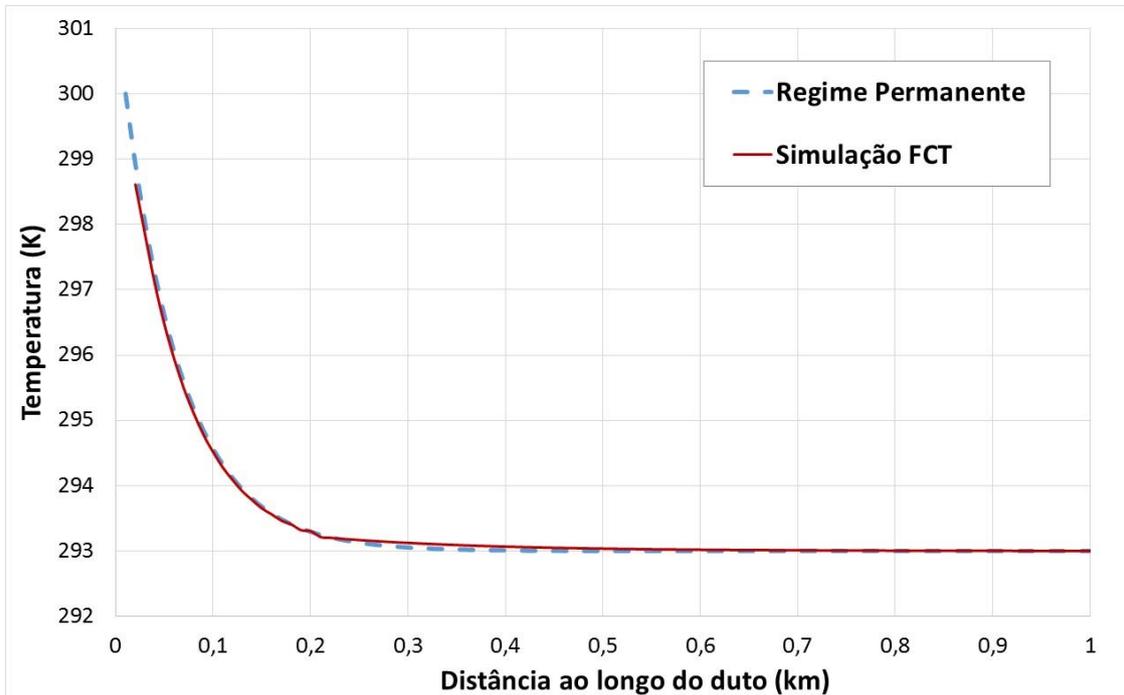


Figura 5.15: Variação da temperatura obtida para o caso de comparação com o regime permanente na região de entrada (até 1 km de comprimento)

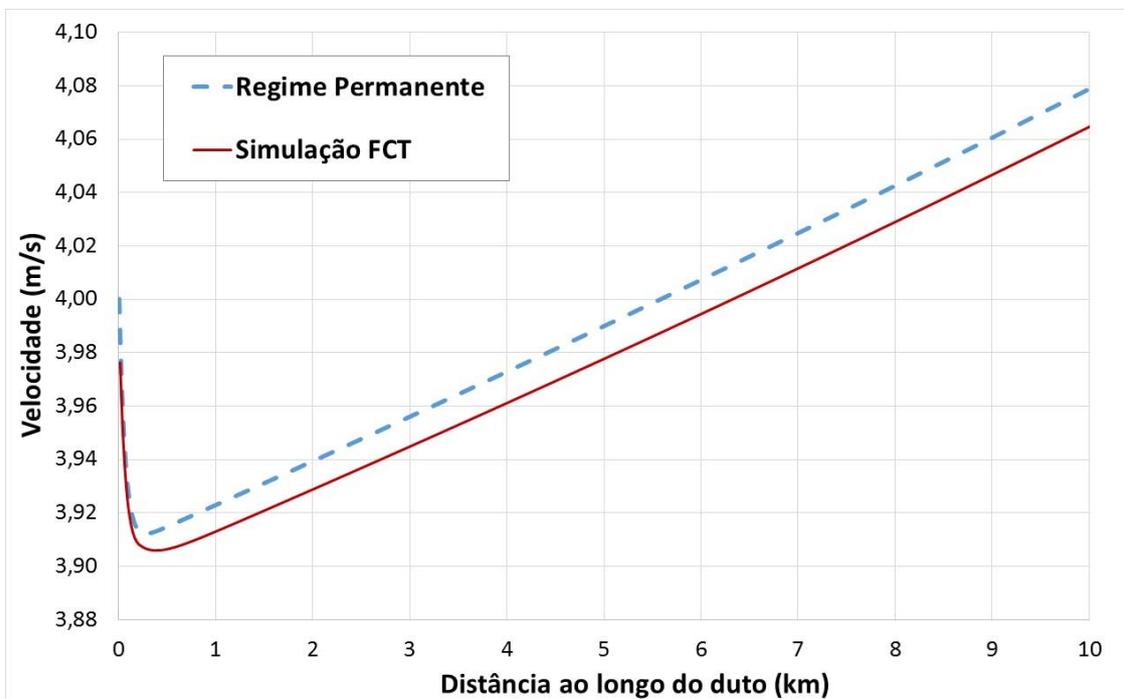


Figura 5.16: Variação da velocidade ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente.

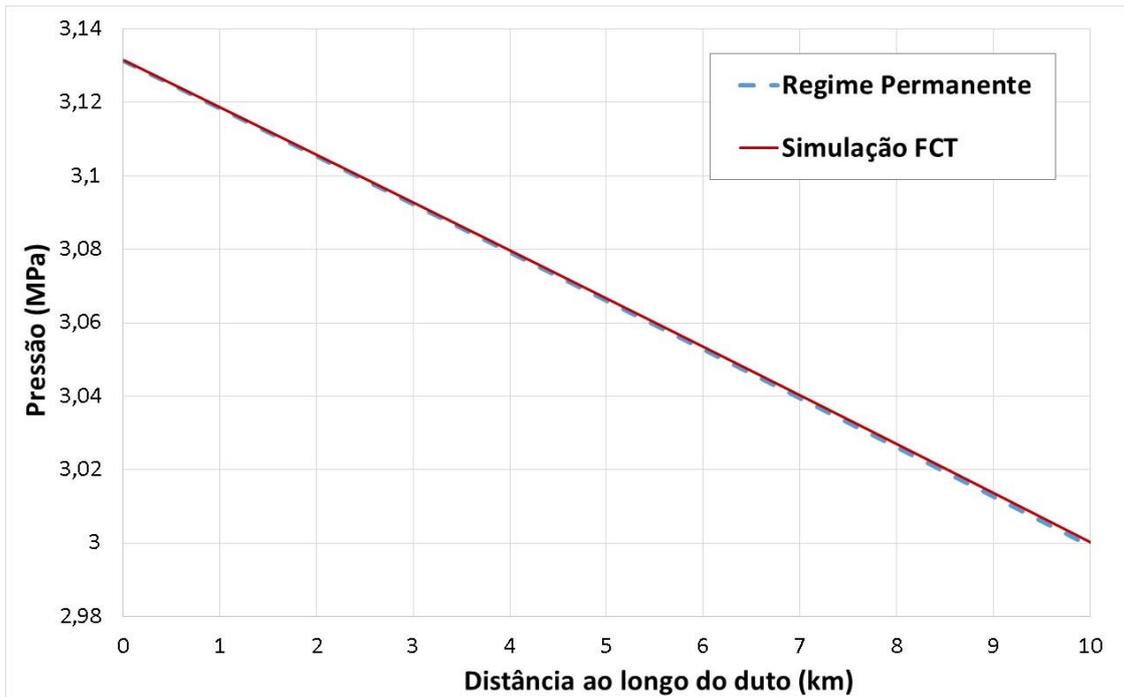


Figura 5.17: Variação da pressão ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente.

Na Figura 5.18, a variação do número de Mach ao longo do duto:

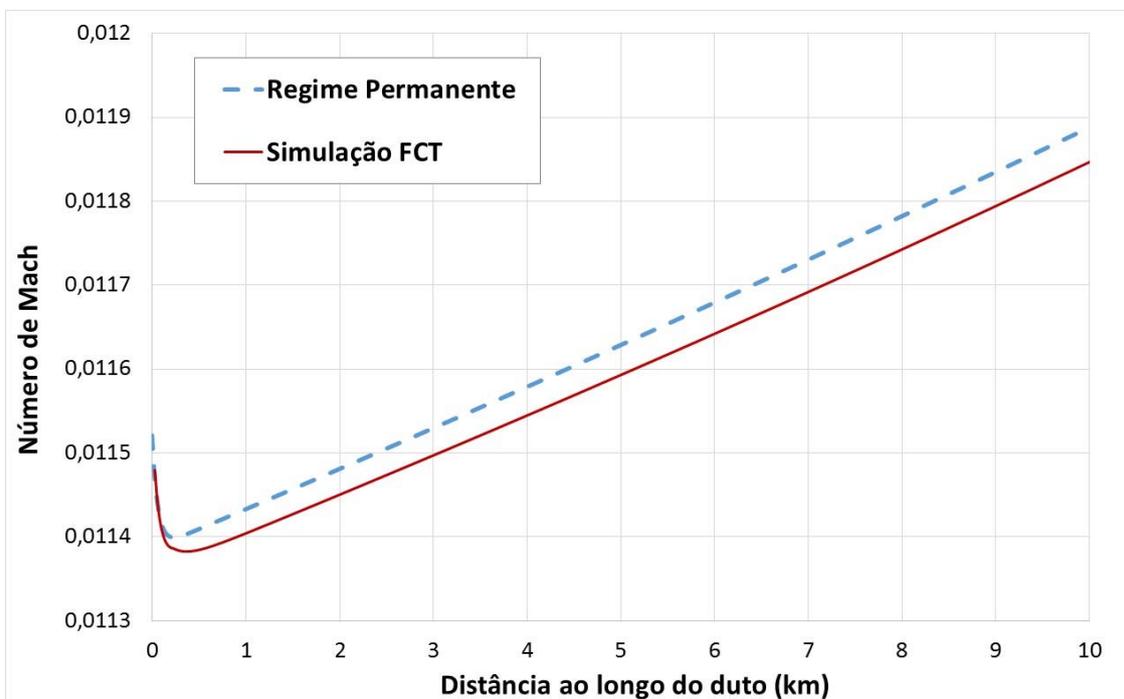


Figura 5.18: Variação do número de Mach ao longo do duto obtida para o caso de comparação com o regime permanente.

Vale ressaltar que o escoamento é subsônico em todo o domínio, pois ao longo do duto se apresenta número de Mach menor que 1, como pode ser percebido na Figura 5.18. Dessa forma, evita-se a singularidade da matriz  $\mathbf{A}$  quando o escoamento é sônico e a inviabilidade do método de solução do problema de valor inicial da EDO.

Pode-se concluir que os resultados obtidos com a comparação com o regime permanente foram satisfatórios e acurados, apresentando uma boa concordância entre si. O comportamento físico do escoamento está coerente, visto que a temperatura cai na região próxima à entrada do duto devido à troca de calor. A pressão decai ao longo do duto devido ao atrito, o que aumenta a velocidade do gás, pois a vazão mássica é constante no regime permanente. O erro máximo aproximado encontrado nesta simulação para o regime permanente é da ordem de 0,34% para o parâmetro da velocidade.

A partir das três simulações feitas neste capítulo, escoamento na linha Fanno, problema do tubo de choque e o caso em regime permanente, o método FCT associado ao modelo matemático proposto foi validado. Essas verificações constataram que o FCT é um método eficiente em reproduzir soluções transientes com e sem descontinuidades, visto que os resultados obtidos reproduziram com precisão as soluções utilizadas como validação nesta primeira etapa do trabalho.

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO

Neste capítulo, são apresentados resultados obtidos para escoamento bifásico para alguns casos de interesse, bem como um estudo voltado para a discretização do duto, ou seja, o grau de refinamento da malha adequado para as simulações.

Para fins de verificação do programa, foi utilizado o *software* comercial OLGA (SCHLUMBERGER, Versão 2014.2). O OLGA é um *software* de referência para a indústria de óleo e gás, visto que é amplamente utilizado e validado em inúmeras situações operacionais. Os resultados desta comparação também serão apresentados neste capítulo.

Além da verificação com o OLGA, foi feita uma comparação com a correlação de GHAJAR E TANG (2010) que é utilizada para calcular o coeficiente de transferência de calor para escoamento bifásico.

### 6.1 ESTUDO DA MALHA E ACURÁCIA DO MÉTODO NO ESPAÇO

O estudo de discretização do duto é feito com o objetivo de obter o número de células de discretização ideal para a simulação. Por ideal entende-se que a malha utilizada é suficiente para representar a solução do escoamento com acurácia e que esses resultados são obtidos em um tempo razoável de simulação.

Para analisar a acurácia no espaço, o código foi executado para diferentes valores de  $\Delta x$ , mantendo o mesmo valor de  $\Delta t$ . Para cada caso diferente de  $\Delta x$  o número de CFL varia, porém obedece ao critério de estabilidade do método explícito, mantendo o valor de CFL inferior a 0,5; assegurando ser compatível com a margem de segurança do método determinado por SOD (1985).

A análise de acurácia é baseada no cálculo de uma variável global, a quantidade de movimento linear total no duto, definida na Eq. (5.12), integrada pelo método dos trapézios. Esse estudo foi baseado nesta variável, pois é uma grandeza global que combina todas as variáveis do escoamento em uma única grandeza, com exceção das variáveis de pressão e temperatura que estão implícitas no cálculo da massa específica do gás. O erro relativo é calculado por:

$$\xi = \frac{|P - P_{ref}|}{P_{ref}}, \quad (6.1)$$

onde  $P_{ref}$  é valor da quantidade de movimento linear mais acurado que foi calculado, ou seja, a quantidade de movimento linear obtida com o menor valor de  $\Delta x$  que corresponde à malha mais refinada.

A Tabela 6.1 a seguir apresenta os dados de configuração do duto, assim como alguns dados do escoamento utilizado para as simulações. O cálculo dos coeficientes de transferência de calor interno e externo estão descritos no Capítulo 3 deste texto.

Tabela 6.1: Dados do escoamento e configuração do duto para o estudo do refinamento da malha.

Fluidos considerados no escoamento bifásico	Ar e água
Comprimento do duto	100,0 km
Diâmetro interno do duto	0,3032 m
Espessura da tubulação	0,0254 m
Rugosidade superficial	0,0000457 m
Condutividade térmica do material do duto	50 W/mK
Fluido que escoia externamente ao duto	Água
Temperatura do ambiente externo	4 °C ou 277 K
Velocidade do fluido externo ao duto	1 m/s

As condições de contorno impostas na entrada e na saída do gasoduto, baseadas na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho, são indicadas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Condições de contorno para o caso de estudo do refinamento da malha.

	$p$ (Pa)	$u_G$ (m/s)	$u_L$ (m/s)	$T$ (K)	$\alpha_L$ (-)
Entrada		2,774	0,458	279,47	0,01857
Saída	3001137				

A Figura 6.1 representa o erro relativo em função do parâmetro adimensional,  $\Delta x/L$ , onde  $L$  é o comprimento do duto, mantendo o  $\Delta t$  constante com o valor de 0,0225s.

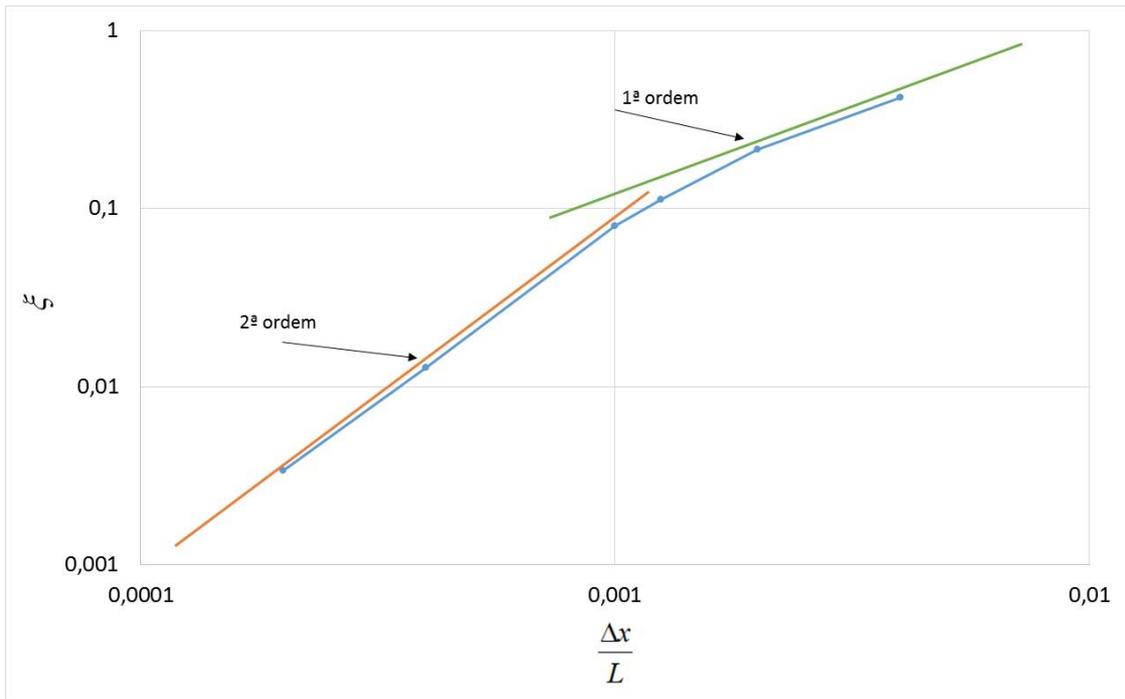


Figura 6.1: Erro relativo da variável global em função da malha.

A análise de acurácia do método FCT também é realizada para variável local. A variável local utilizada para este estudo foi a pressão que é calculada na entrada do duto. Para esta análise, obteve-se o gráfico abaixo que representa o erro relativo da variável local em função do parâmetro adimensional  $\Delta x/L$ .

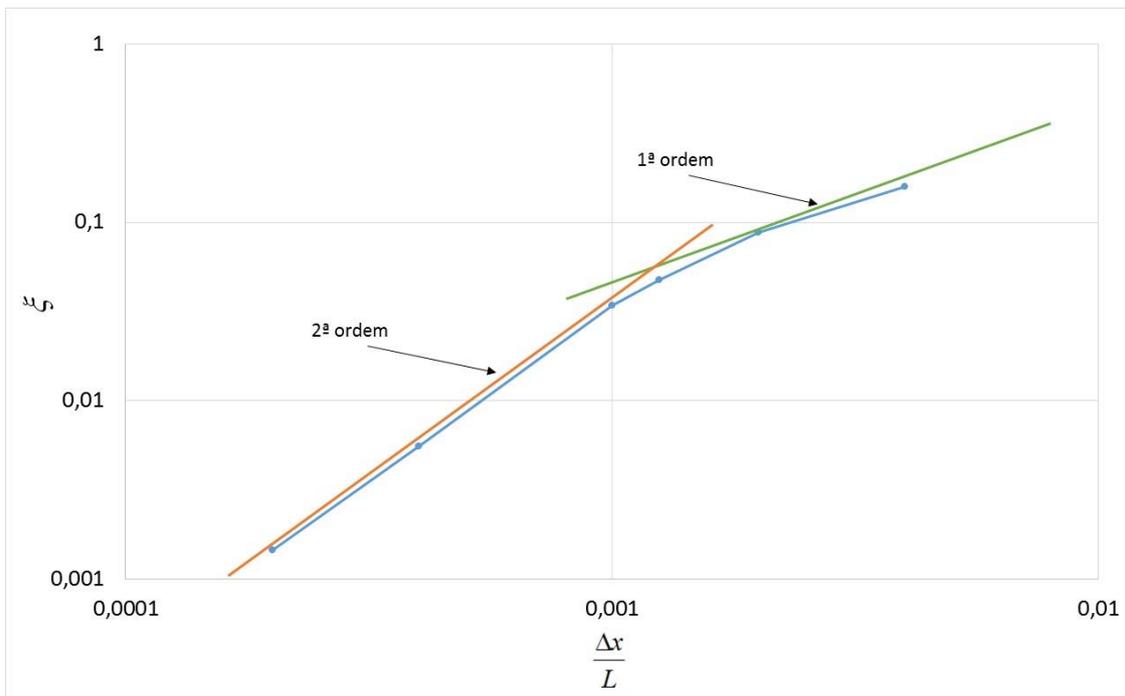


Figura 6.2: Erro relativo da variável local em função da malha.

Uma linha correspondente à acurácia de primeira ordem é desenhada em cada um dos gráficos, a linha na cor verde. A outra linha, na cor laranja, corresponde a acurácia de segunda ordem. Os resultados obtidos nas duas análises, tanto para variável global quanto para variável local, revelam que para valores grandes de  $\Delta x$ , o método se comporta como de primeira ordem. Já para valores menores de  $\Delta x$ , o FCT se comporta como de segunda ordem. Esses resultados indicam que malhas pouco refinadas podem não apresentar a acurácia espacial desejada para a simulação numérica de escoamento bifásico em gasodutos, visto que os erros serão de primeira ordem. Para garantir uma acurácia no espaço de segunda ordem, fica evidente que o ideal é utilizar  $(\Delta x/L) \leq 0,001$ . Este tipo de estudo foi realizado por FIGUEIREDO *et al.* (2012) para escoamentos bifásicos transientes em gasodutos e os resultados levaram à mesma conclusão, ou seja, para se obter acurácia de segunda ordem é necessário utilizar um mínimo de células de discretização da ordem de  $10^{-3}$ .

## 6.2 REFINAMENTO DA MALHA E O IMPACTO NA SOLUÇÃO

Com o objetivo de identificar o impacto do refinamento da malha na solução em regime permanente, foi rodado um caso de escoamento bifásico com malhas diferentes, correspondentes a 100, 500, 1000, 5000 e 10000 células. Nestas simulações o valor de  $\Delta t$  foi escolhido com base na condição de CFL, Eq.(4.9) com CFL=0,45; valor este recomendado por SOD (1985). O caso rodado para este estudo é o mesmo utilizado para o estudo de acurácia do método numérico no espaço, apresentado nas Tabela 6.1 e 6.2 na seção anterior.

As Figura 6.3 a 6.8 a seguir ilustram como as variáveis dependentes do escoamento variam ao longo do duto após o regime permanente ter sido atingido. Cada curva demonstrada nos gráficos de pressão, velocidade de gás e líquido, fração volumétrica de líquido e temperatura reproduz a solução com determinada malha, conforme as legendas dos gráficos.

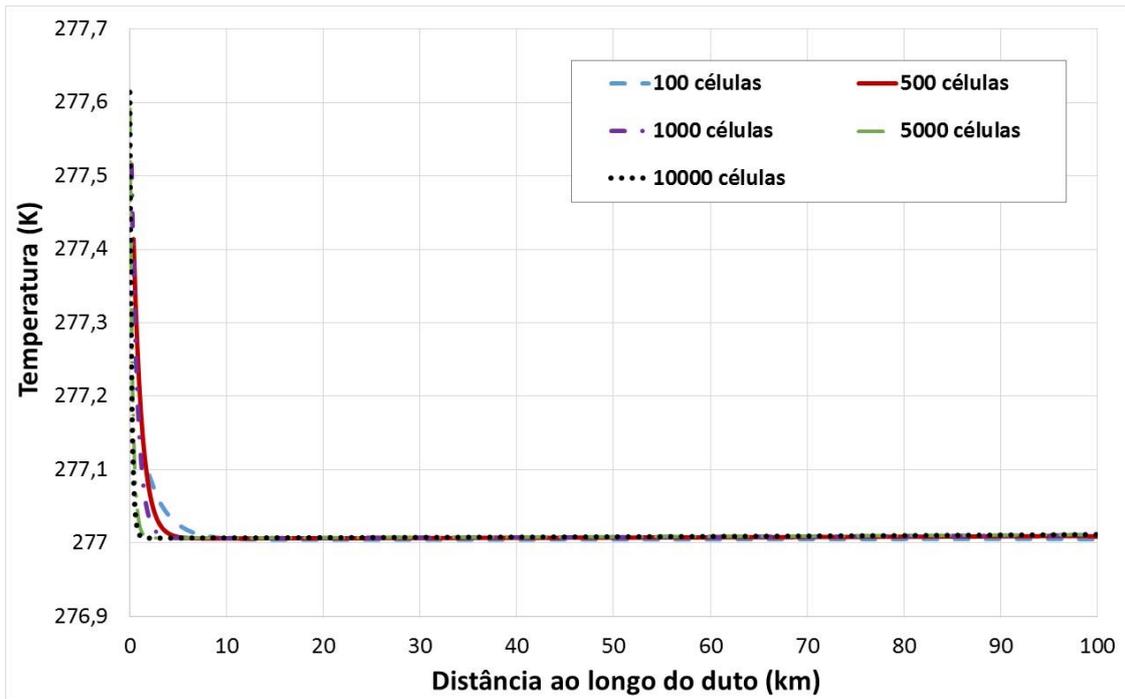


Figura 6.3: Temperatura ao longo do duto para o caso de estudo da malha.

Ampliando o gráfico acima na região de entrada, onde ocorre a maior variação da temperatura, tem-se:

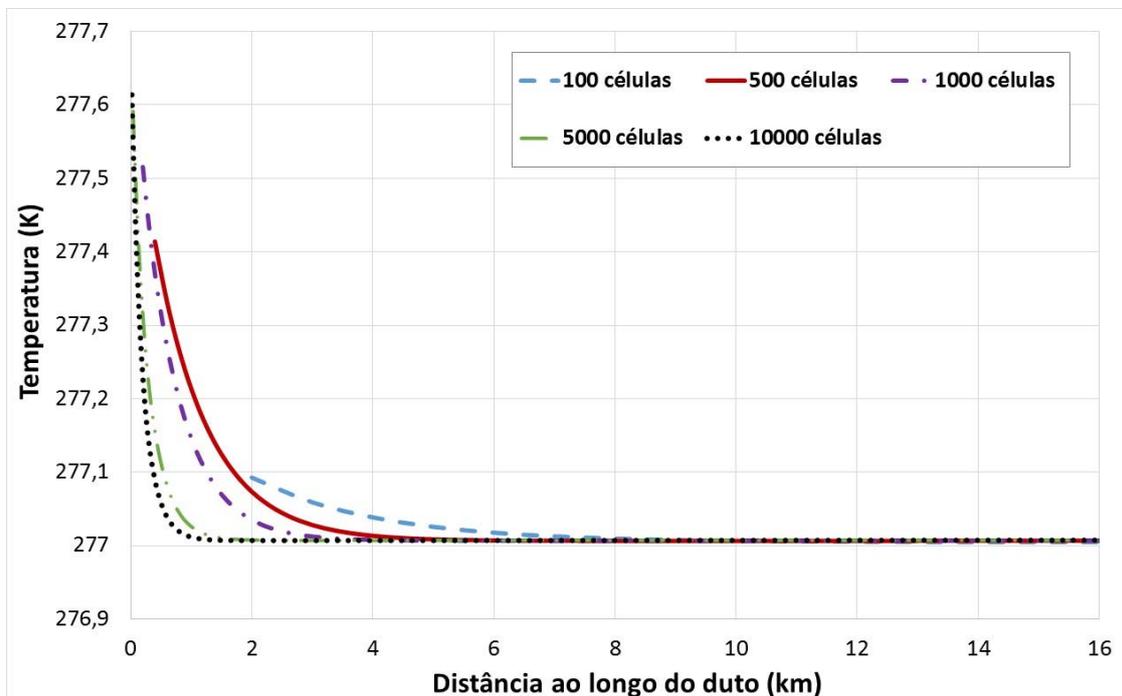


Figura 6.4: Temperatura ampliada na região de entrada do duto para o caso de estudo da malha (até 16 km de comprimento).

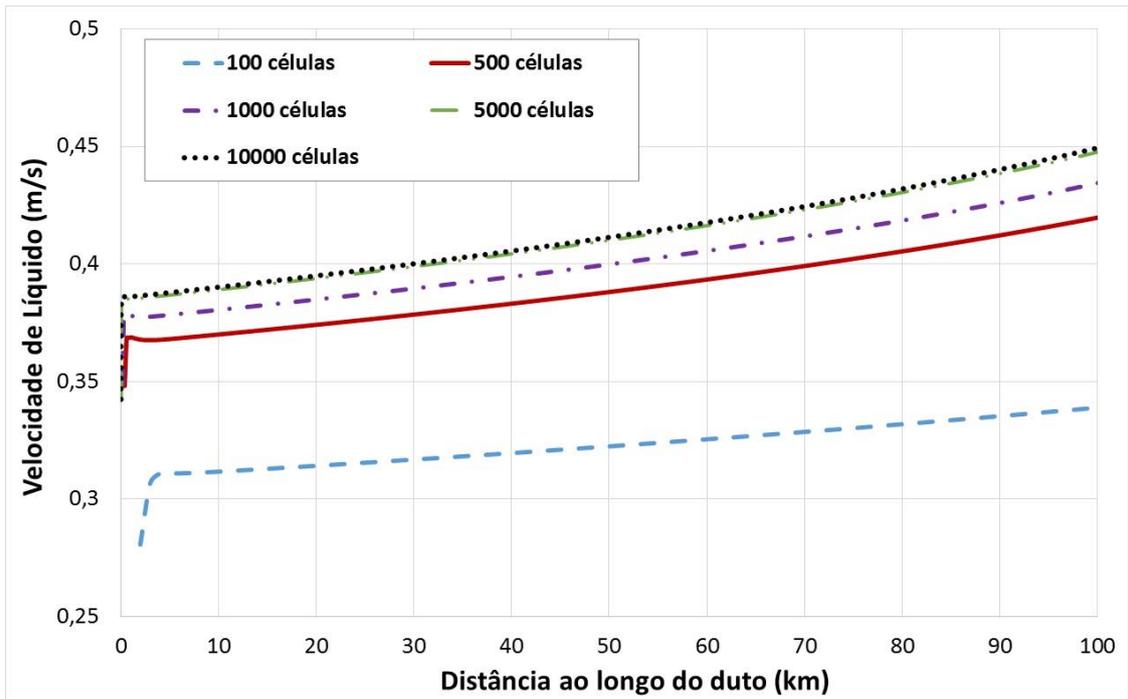


Figura 6.5: Velocidade de líquido ao longo do duto para o caso de estudo da malha.

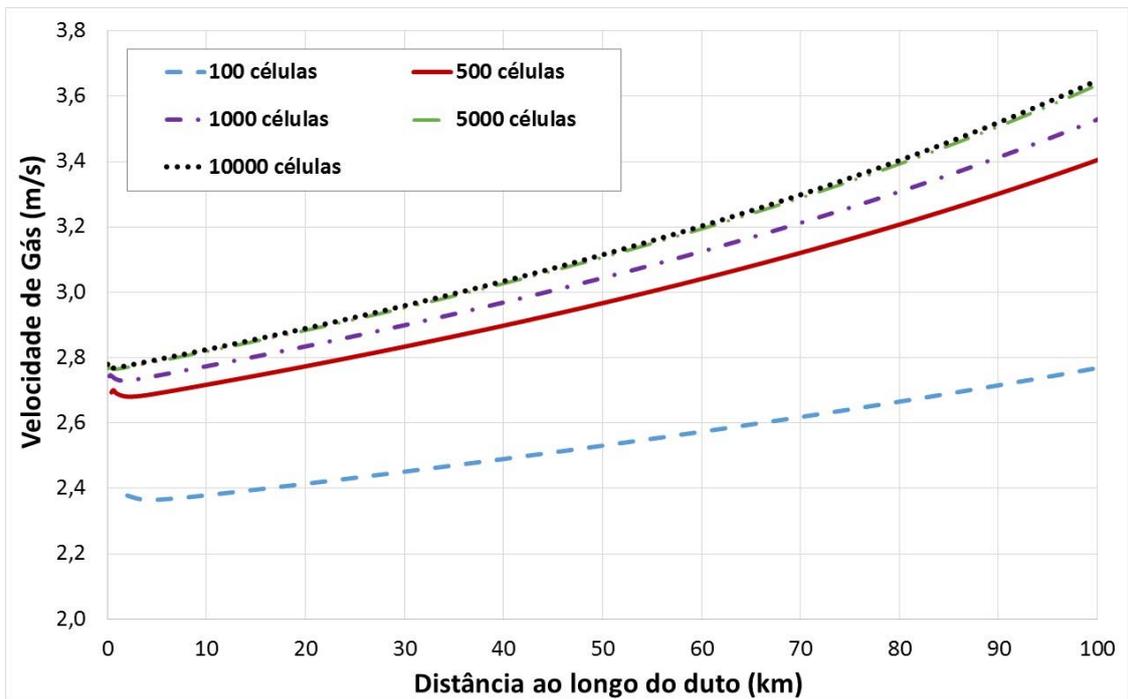


Figura 6.6: Velocidade de gás ao longo do duto para o caso de estudo da malha.

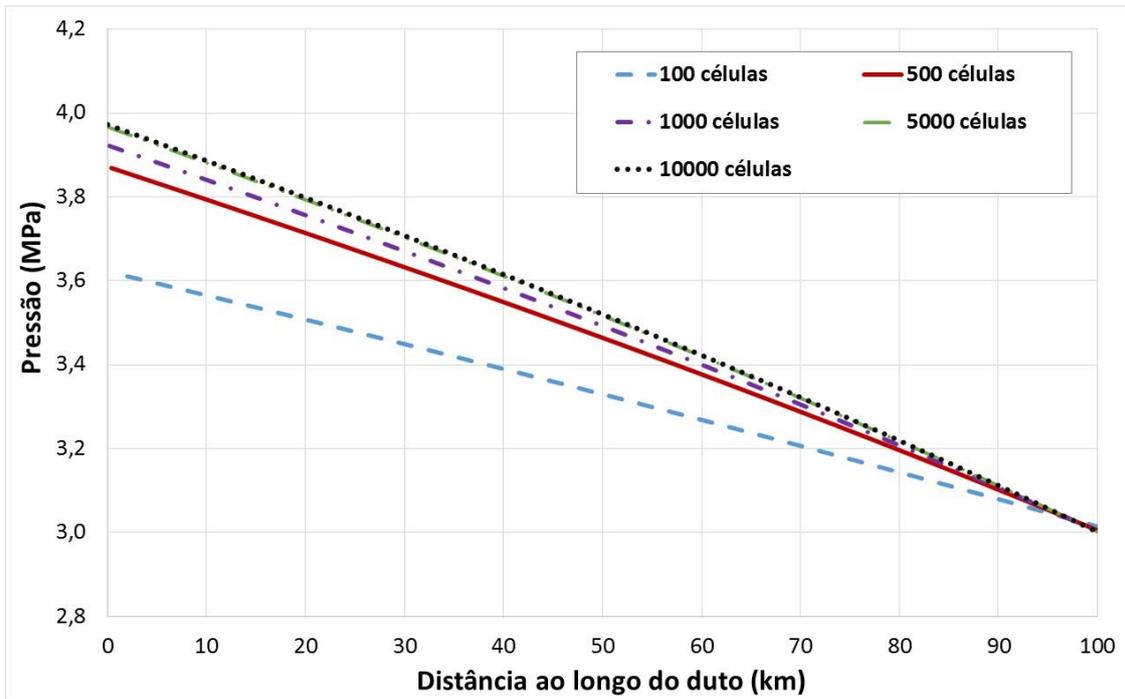


Figura 6.7: Pressão ao longo do duto para o caso de estudo da malha.

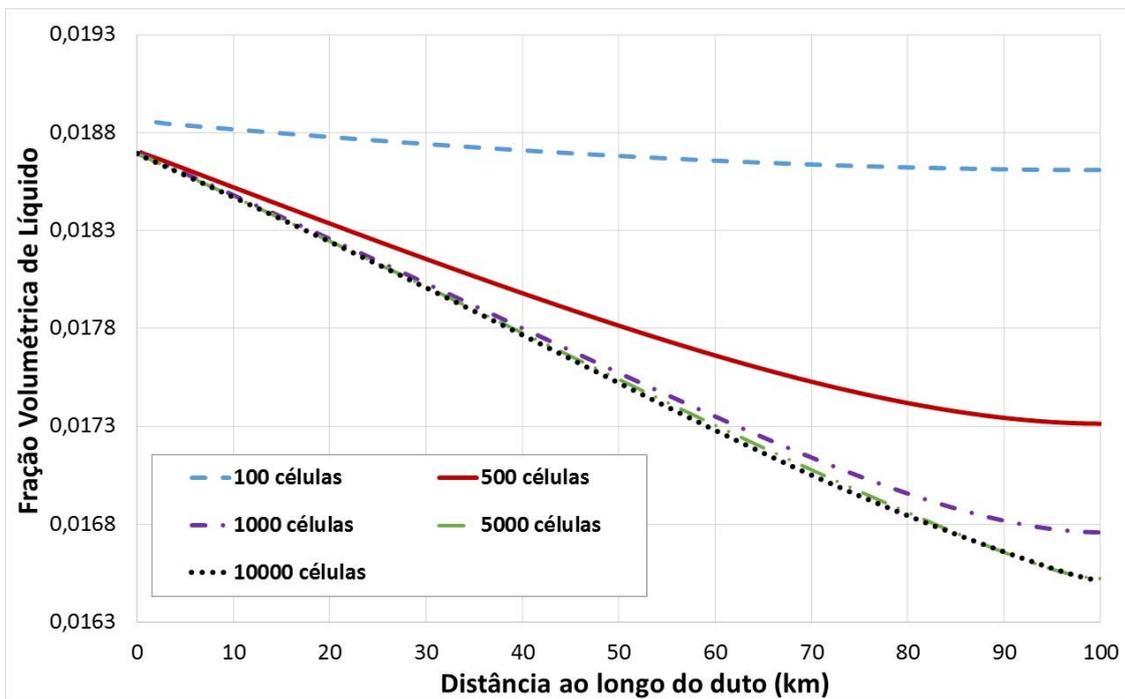


Figura 6.8: Fração volumétrica de líquido ao longo do duto para o caso de estudo da malha.

Para melhor avaliar os resultados obtidos com a variação da malha, foi calculada a quantidade de movimento linear total no duto, sendo esta uma variável global do problema, integrada ao longo do duto pelo método dos trapézios. Os erros relativos são

calculados com base nos resultados com a malha mais refinada, que neste caso é a malha com 10000 células de discretização. Esta análise também é realizada para a variável local pressão que é calculada na entrada do duto. A Tabela 6.3 apresenta o valor dos erros relativos calculados para as duas análises. Nesta tabela também foi incluído o tempo de CPU que as simulações demoraram a atingir o regime permanente. As configurações da máquina utilizada para este estudo são: Intel® Core™ i7-4771 CPU 3,50GHz.

Tabela 6.3: Erros relativos e tempo de simulação referentes ao estudo da malha.

Número de células	Erro Relativo (variável global)	Erro Relativo (variável local)	Tempo computacional para atingir o regime permanente
100	23,70%	9,1%	2523 s ou 42 min
500	6,30%	2,6%	10560 s ou 2h 56 min
1000	3,10%	1,27%	23592 s ou 6h 33 min
5000	0,35%	0,15%	178872 s ou 49h 41min
10000	-	-	659201 s ou 183h 7 min

Com base na tabela acima e nos gráficos do escoamento ao longo do duto, onde as curvas tendem a convergir para uma curva única, pode-se observar que o erro relativo atingido com a malha de 100 células é muito grande, ou seja, a solução apresentada não está suficientemente precisa. Da mesma maneira, o resultado com 500 células ainda não é tão acurado se comparado com a malha mais refinada. O resultado obtido com 5000 e 10000 células é bastante preciso, porém o custo computacional e o tempo de simulação são muito altos. O caso em que o erro relativo foi razoável e o tempo para atingir o regime permanente aceitável para realizar estas simulações foi com a malha de 1000 células. Sendo assim, tendo como base este estudo de discretização e o estudo da convergência do método realizado na seção anterior, todas as simulações apresentadas a seguir utilizando uma malha discretizada de 1000 células.

### 6.3 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COM O *SOFTWARE* OLGA

O OLGA é um simulador de escoamento trifásico unidimensional de dinâmica de fluidos muito utilizado na indústria de óleo e gás. O *software* apresenta uma vasta gama de utilização, em especial para projetos de gasodutos, sendo possível simular escoamentos com a presença de vazamentos, *pigs*, controladores, entre outros.

### 6.3.1 Breve Descrição do OLGA

A versão 2014.2 do simulador OLGA considera, segundo o Manual do Usuário do OLGA 2014.2, um sistema de equações constituído por três equações de conservação de massa, uma para a fase gasosa, uma para fase líquida de óleo e água e outra para *droplets* de óleo e água (ou gotículas, que representam a fase dispersa do escoamento). Além disso, são consideradas três equações de quantidade de movimento, uma para a água, outra para óleo e condensado e outra para combinação de gás e *droplets* de líquido. A velocidade de *droplet* de líquido arrastada na fase gasosa é dada por uma condição de escorregamento. E finalmente, uma equação da energia que é relacionada à mistura, considerando uma temperatura única para as fases. A referência clássica do OLGA é a literatura de BENDIKSEN *et al.* (1991), embora ao longo dos anos tenha sofrido diversas modificações. O OLGA utiliza o método implícito *upwind* de primeira ordem no tempo e no espaço, embora exista a opção de resolver a equação da conservação da massa através de um método TVD (*Total Variation Diminishing*) de segunda ordem.

Outro ponto importante a ser mencionado sobre o OLGA, é que as propriedades dos fluidos, como por exemplo viscosidade e condutividade térmica, são obtidas através de um arquivo PVT, com propriedades termodinâmicas dos fluidos em equilíbrio, gerado pelo usuário através de módulo separado do *software*. As propriedades dos fluidos são calculadas em função das variações de pressão e da temperatura durante a simulação.

### 6.3.2 Determinação das Propriedades dos Fluidos Óleo e Gás

Os casos de escoamento bifásico estudados nesta comparação com o OLGA utilizam dois tipos de fluidos: óleo e gás para dutos com pouco líquido e óleo e gás para dutos com muito líquido. As propriedades dos fluidos que foram utilizadas para óleo e gás são apresentadas por uma tabela e são distinguidas da seguinte maneira: fluidos que escoam no duto com pouco líquido são denominados fluidos Tipo 1 e fluidos que escoam no duto com muito líquido são denominados fluidos Tipo 2.

O simulador OLGA considera as propriedades dos fluidos como variantes de acordo com a pressão e temperatura, porém a simulação com FCT considera essas propriedades como constantes. Sendo assim, para a simulação com FCT foram usados valores médios destas propriedades baseados na variação de pressão e temperatura dos fluidos

determinados pelo OLGA. Na Tabela 6.4 abaixo, são apresentadas as propriedades dos fluidos Tipo 1 e dos fluidos Tipo 2.

Tabela 6.4: Propriedades dos fluidos óleo e gás.

Propriedades dos fluidos	Fluido Tipo 1	Fluido Tipo 2
Massa específica do líquido	751,474 kg/m <sup>3</sup>	743,86 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade dinâmica do líquido	5,807 x 10 <sup>-4</sup> Pa.s	6,101 x 10 <sup>-4</sup> Pa.s
Viscosidade dinâmica do gás	1,524 x 10 <sup>-5</sup> Pa.s	1,125 x 10 <sup>-5</sup> Pa.s
Condutividade térmica do líquido	1,523 x 10 <sup>-1</sup> W/mK	1,662 x 10 <sup>-1</sup> W/mK
Condutividade térmica do gás	3,433 x 10 <sup>-2</sup> W/mK	3,342 x 10 <sup>-2</sup> W/mK
Calor específico a volume constante do líquido	2050,02 J/kgK	2065,40 J/kgK
Calor específico a volume constante do gás	1751,13 J/kgK	1829,01 J/kgK
Constante do gás	444,65 J/kgK	410,11 J/kgK

### 6.3.3 Configurações do Duto

Como mencionado no início deste capítulo, casos comparativos com o OLGA foram utilizados para fins de verificação dos resultados obtidos com a simulação feita com o FCT. Para esta comparação de resultados, foram elaborados casos de interesse para a indústria, em que os fluidos envolvidos na simulação são petróleo e gás natural do Tipo 1 em que a fração volumétrica de líquido é bem pequena, e do Tipo 2, com fração volumétrica uma ordem de grandeza maior. A Tabela 6.5 a seguir especifica os dados de configuração do duto, bem como o número de células de discretização que foram utilizadas nas simulações tanto para fluidos Tipo 1 quanto para fluidos Tipo 2. Vale ressaltar que o OLGA é um *software* trifásico e para compatibilizar a simulação com o FCT que modela escoamento bifásico, tomou-se o cuidado de minimizar a quantidade de água na simulação com o OLGA, que representa a terceira fase contemplada pelo *software*.

Tabela 6.5: Dados da configuração do duto para o caso de comparação com OLGA.

Diâmetro interno	0,450 m
Espessura do duto	0,0254 m
Condutividade térmica do duto	50 W/mK
Comprimento	45,0 km
Rugosidade superficial	$4,572 \times 10^{-5}$ m
Número de células de discretização (OLGA e FCT)	1000
Inclinação do duto	0°, duto horizontal

### 6.3.4 Condições de Contorno

As condições de contorno para a simulação no OLGA e no FCT são impostas de maneira diferente. Sendo assim, o índice  $O$  na tabela abaixo determina as condições de contorno utilizadas no OLGA e o índice  $F$  as condições de contorno utilizadas para o FCT. Vale ressaltar que o OLGA determina a fração volumétrica de líquido a partir da tabela PVT, já o FCT requer esse parâmetro como dado de entrada. Para colocar as duas simulações compatíveis, a fração volumétrica,  $\alpha_L$ , determinado pela tabela PVT do OLGA foi utilizada na simulação com o FCT. A Tabela 6.6 apresenta as condições de contorno para o caso com os fluidos Tipo 1 e a Tabela 6.7 para os fluidos Tipo 2, baseado na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho.

Tabela 6.6: Condições de contorno para o caso com fluidos Tipo 1 para comparação com OLGA.

	$p$ (Pa) <sup><math>O,F</math></sup>	$\dot{m}_{total}$ (kg/s) <sup><math>O</math></sup>	$u_G$ (m/s) <sup><math>F</math></sup>	$u_L$ (m/s) <sup><math>F</math></sup>	$T$ (K) <sup><math>O,F</math></sup>	$\alpha_L$ (-) <sup><math>F</math></sup>
Entrada		20	6,462	0,716	293,8	0,00417
Saída	2000330					

Tabela 6.7: Condições de contorno para o caso com fluidos Tipo 2 para comparação com OLGA.

	$p$ (Pa) <sup><math>O,F</math></sup>	$\dot{m}_{total}$ (kg/s) <sup><math>O</math></sup>	$u_G$ (m/s) <sup><math>F</math></sup>	$u_L$ (m/s) <sup><math>F</math></sup>	$T$ (K) <sup><math>O,F</math></sup>	$\alpha_L$ (-) <sup><math>F</math></sup>
Entrada		20	4,36	0,829	294,7	0,04706
Saída	2500190					

### 6.3.5 Resultados da Comparação com OLGA para Fluidos Tipo 1

A simulação para os fluidos do Tipo 1 foi realizada considerando a troca de calor por convecção interna, condução radial e convecção externa. Para o cálculo desta troca térmica, foi considerado um caso mais próximo da realidade, em que o gasoduto está submerso em água e a temperatura da água varia linearmente ao longo do duto. Considerou-se que a água externa ao duto escoa com uma velocidade de 1m/s e a temperatura externa na entrada do duto é 10°C, ou seja, 283K e na saída 16°C, ou 289K.

As Figuras 6.9 a 6.13 a seguir apresentam os resultados obtidos para as variações de temperatura, velocidades do líquido e do gás, pressão e fração volumétrica de líquido ao longo do duto, após atingirem o regime permanente. A curva tracejada em azul corresponde à simulação do *software* OLGA. Já a curva vermelha contínua representa a simulação utilizando o FCT.

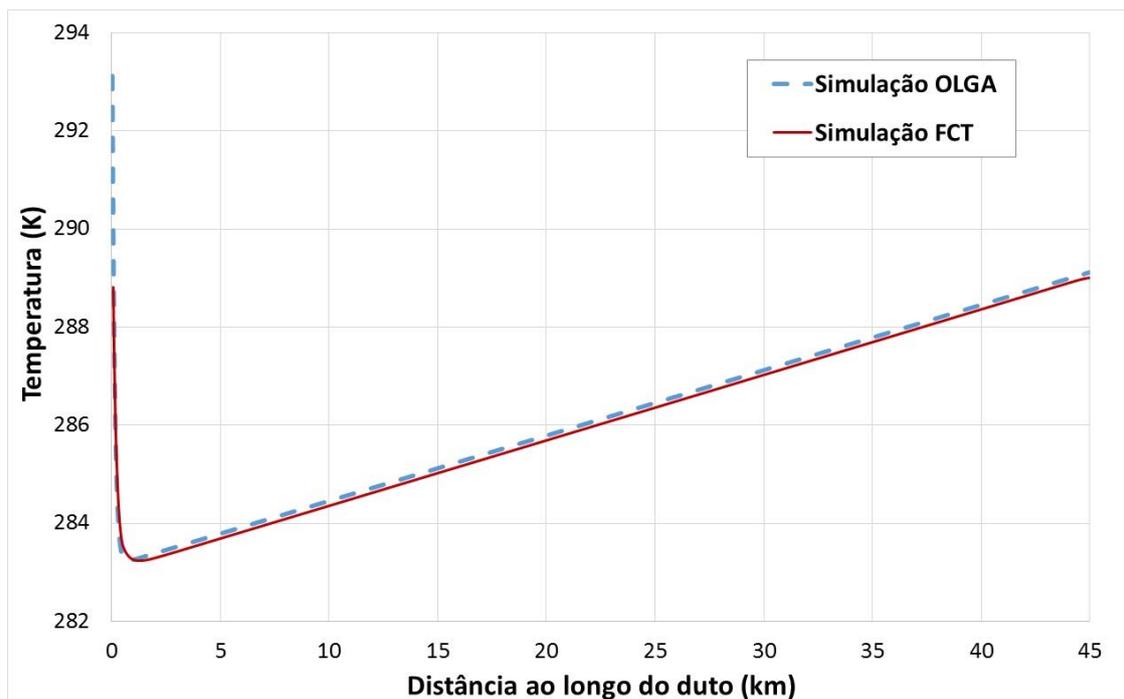


Figura 6.9: Resultados de temperatura ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.

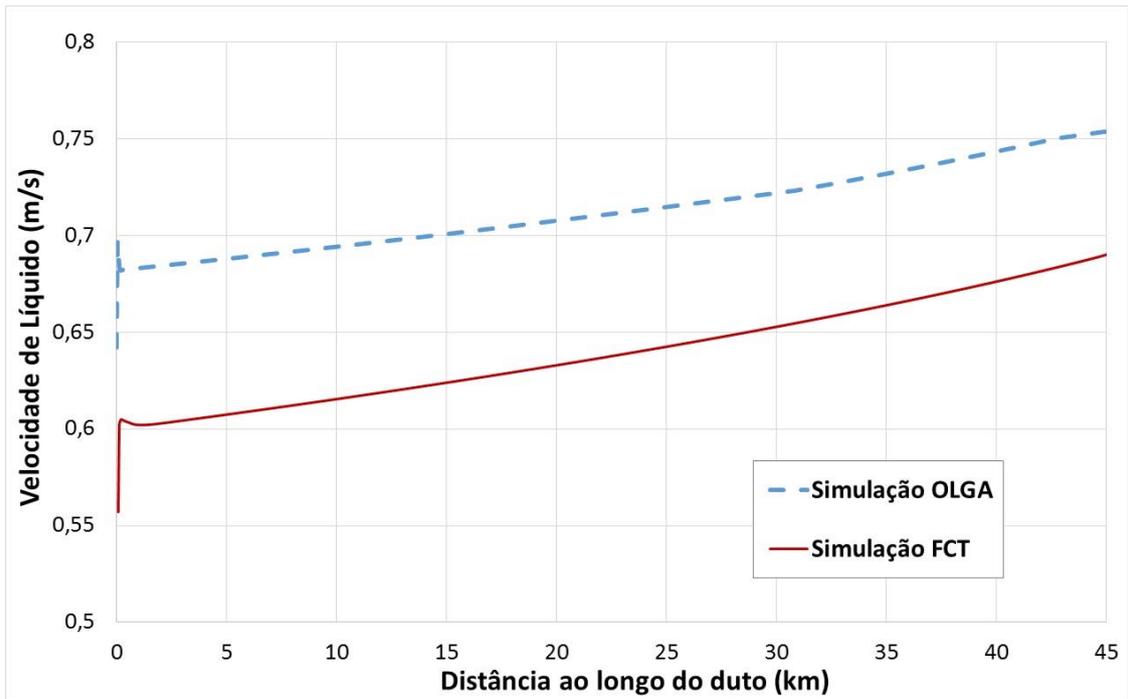


Figura 6.10: Resultados de velocidade de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.

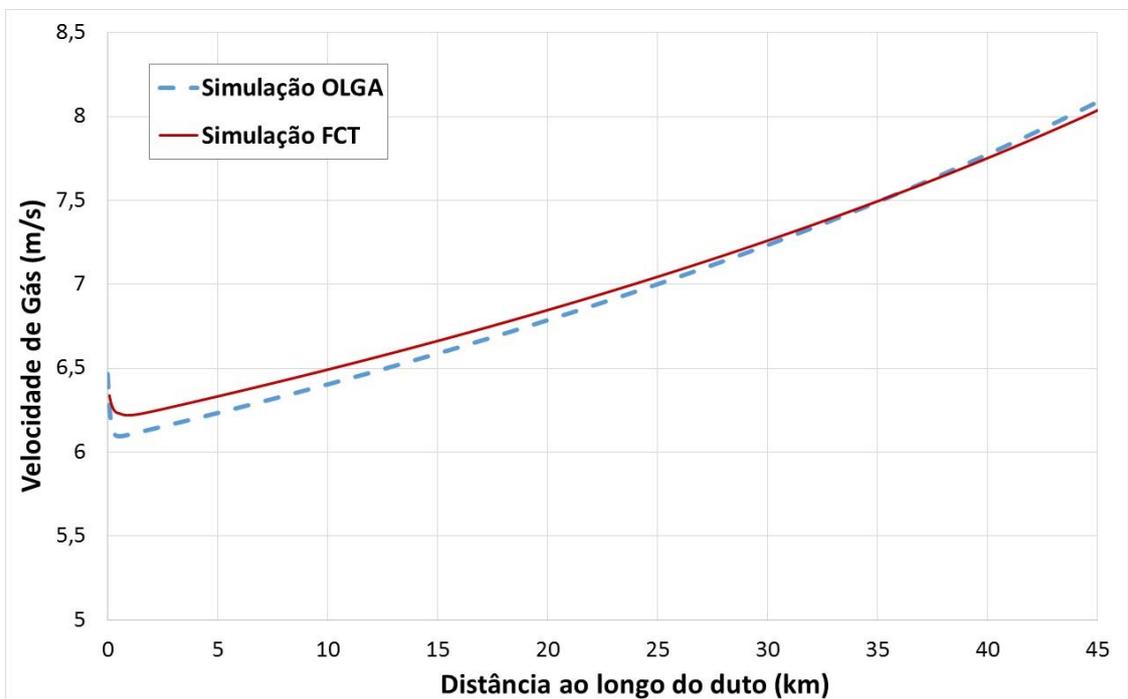


Figura 6.11: Resultados de velocidade de gás ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.

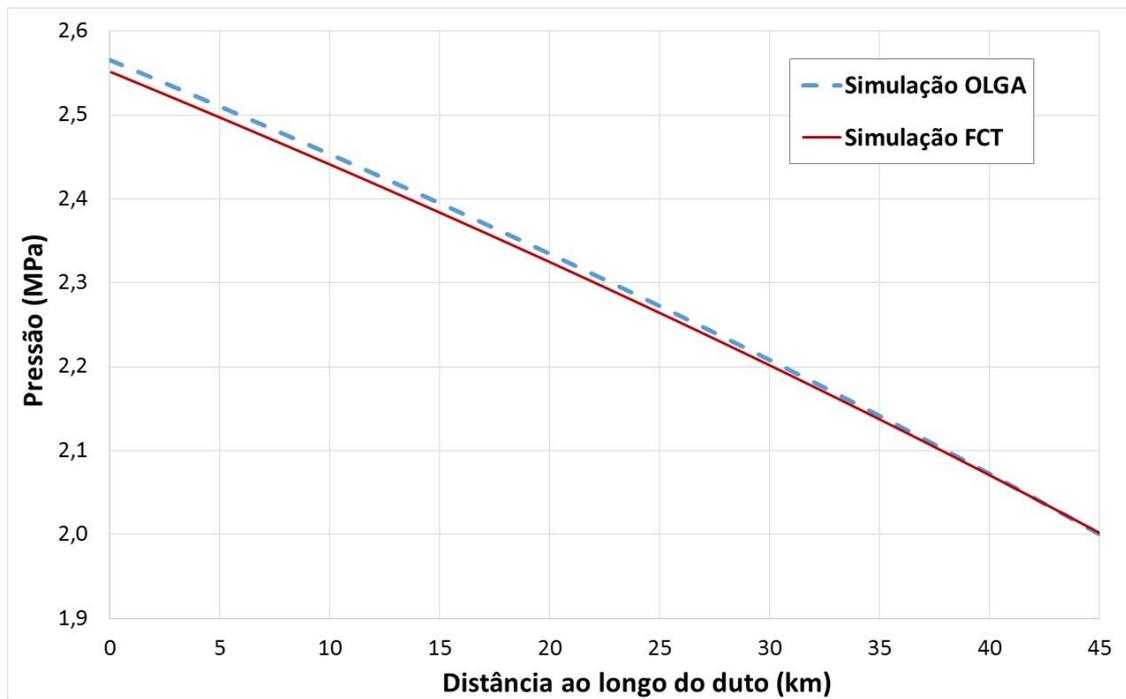


Figura 6.12: Resultados de pressão ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.

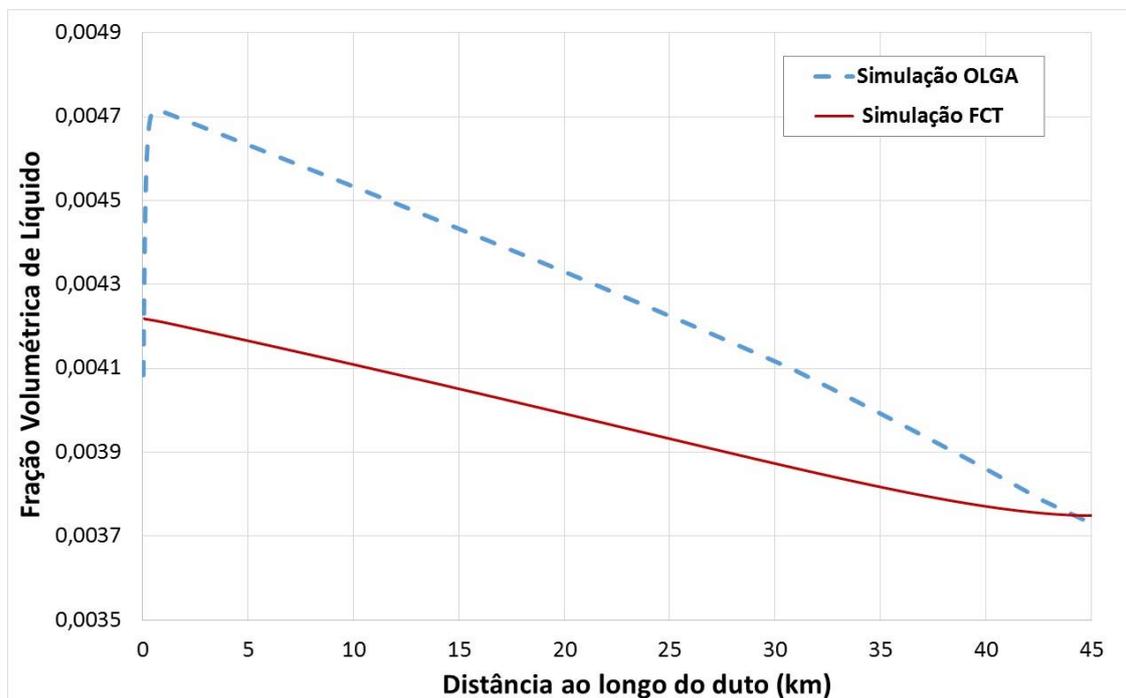


Figura 6.13: Resultados de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 1 da comparação com OLGA.

Pôde-se constatar que os resultados obtidos com o FCT apresentaram uma concordância muito boa com os resultados obtidos com OLGA. O erro máximo

aproximado encontrado para esta simulação é da ordem de 13,4% na velocidade de líquido. Algumas diferenças nos resultados são justificadas pela desigualdade do modelo matemático e do método numérico utilizados nas simulações. Além disso, o OLGA trata as propriedades dos fluidos como variantes com pressão e temperatura, o que não acontece com a formulação do FCT, que as trata como constantes.

O comportamento físico do escoamento está coerente, pois a pressão decai ao longo do duto devido à presença do atrito. Como a vazão mássica de cada fluido é constante no regime permanente, a velocidade do gás aumenta devido ao decaimento da pressão. A velocidade do gás tem uma ligeira queda na entrada do duto por consequência da variação brusca da temperatura nesta região devido à troca térmica com o ambiente externo. O gás acelera o líquido pela interação que se dá entre os fluidos através da interface, fazendo sua velocidade aumentar e a fração volumétrica de líquido diminuir.

### **6.3.6 Resultados da Comparação com OLGA para Fluidos Tipo 2**

Para o caso considerando o duto com muito líquido, ou seja, fluidos Tipo 2, a temperatura da água que escoava externamente ao duto também foi considerada variando linearmente ao longo do duto, com o valor de 6°C na entrada e 20°C na saída, e com velocidade de 1m/s. O coeficiente global de transferência de calor foi calculado da mesma forma que para fluidos Tipo 1.

As Figuras 6.14 a 6.18 a seguir apresentam os resultados obtidos para as variações de temperatura, velocidades do líquido e do gás, pressão e fração volumétrica de líquido ao longo do duto, após atingirem o regime permanente. A curva tracejada em azul corresponde à simulação do software OLGA, já as curvas em vermelho e contínuas representam a simulação utilizando o FCT.

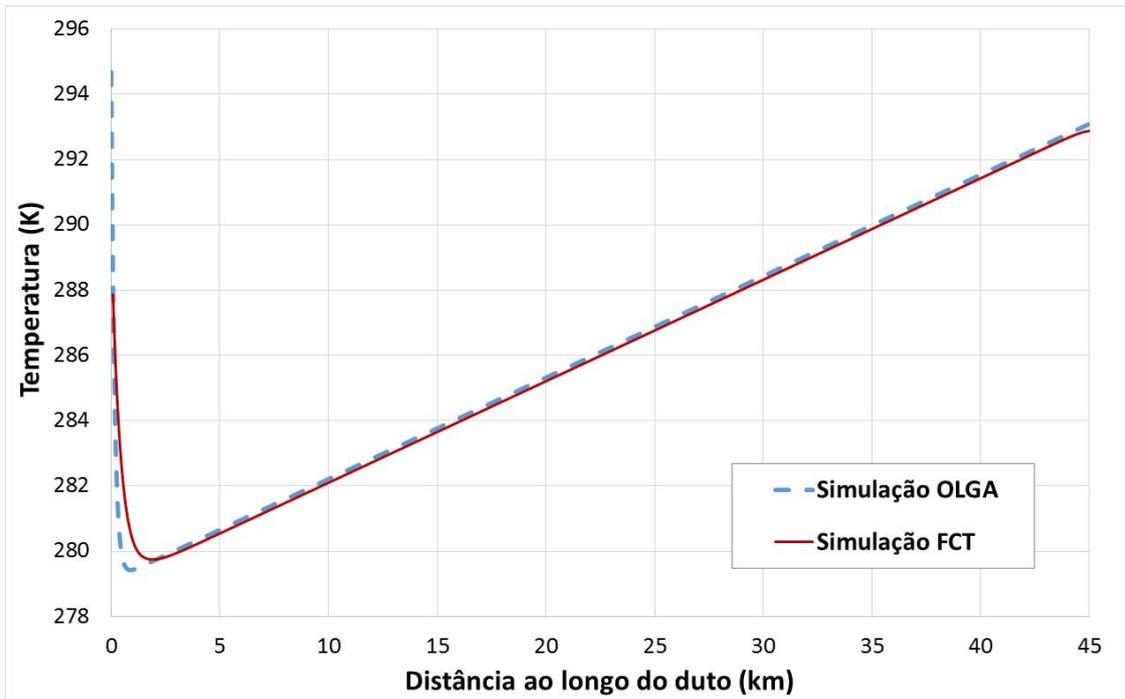


Figura 6.14: Resultados de temperatura ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA.

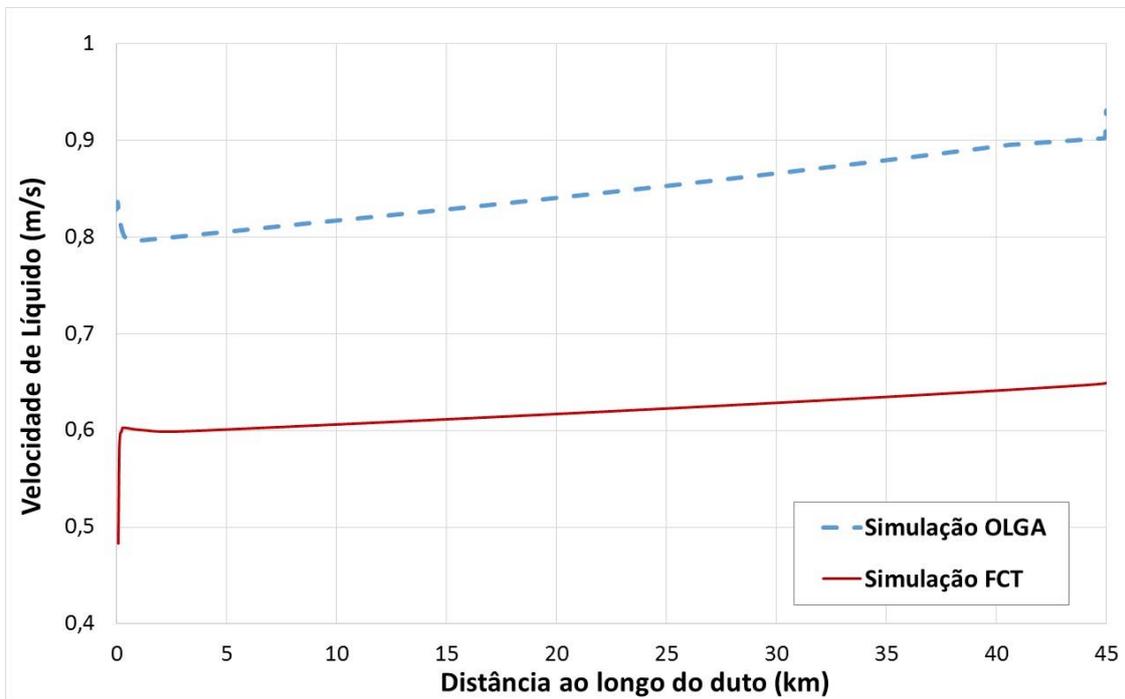


Figura 6.15: Resultados de velocidade de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA

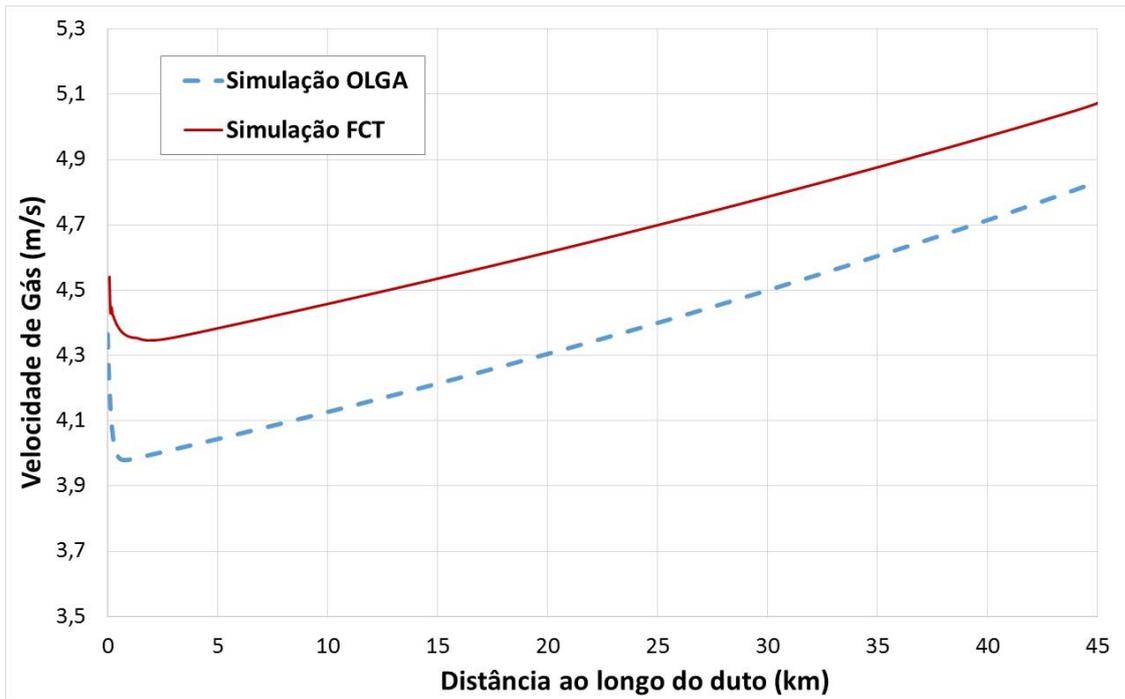


Figura 6.16: Resultados de velocidade de gás ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA

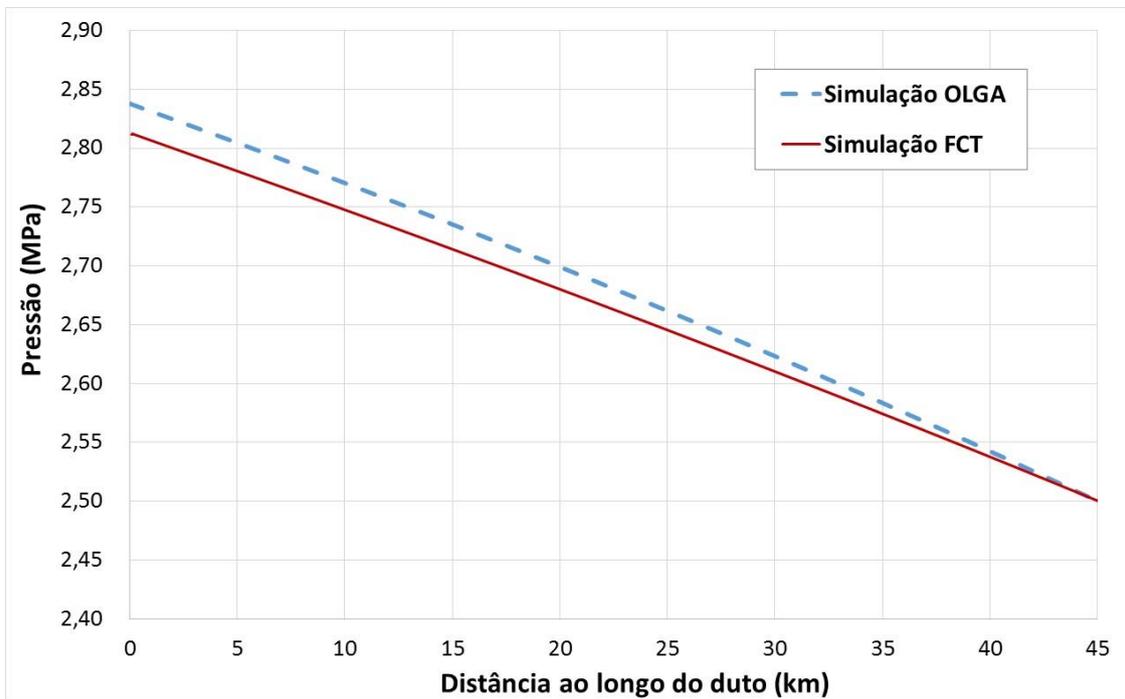


Figura 6.17: Resultados de pressão ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA

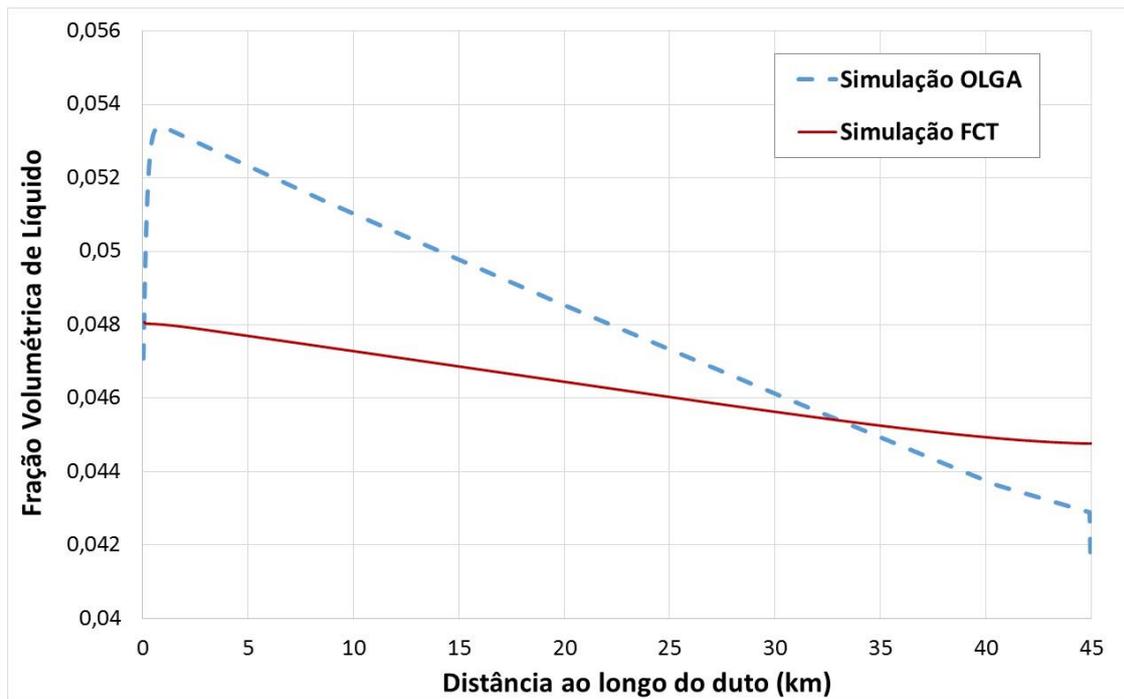


Figura 6.18: Resultados de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para fluidos Tipo 2 da comparação com OLGA

Como se pôde perceber pelos gráficos apresentados, os dois conjuntos de resultados numéricos estão em concordância. O erro máximo aproximado encontrado na simulação é da ordem de 28,3%. Todos os parâmetros do escoamento são calculados corretamente e apresentaram o mesmo comportamento físico ao longo do gasoduto. Mesmo que haja uma pequena diferença entre as duas simulações, os resultados obtidos com o FCT mostraram que o método numérico é confiável para resolver o sistema de equações hiperbólicas. As diferenças entre as curvas são justificadas pelas diferenças existentes no modelo matemático e no método numérico utilizado em cada simulação. Além disso, estas diferenças podem ser atribuídas a divergências no tratamento das propriedades dos fluidos, já que o OLGA as calcula de acordo com a variação de pressão e temperatura, e o FCT as trata como constantes.

#### 6.4 VALIDAÇÃO DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O cálculo do coeficiente de transferência de calor é tratado neste trabalho tendo como referência a abordagem proposta por SIMÕES *et al.* (2013 e 2014). Os autores fazem uma comparação do cálculo deste termo com a correlação de GHAJAR E TANG

(2010) para alguns casos variando as velocidades superficiais de líquido e gás. Essa correlação pode ser escrita como:

$$h_{TP,GT} = F_P h_{L,ST} \left[ 1 + c_{GT} \left( \frac{x}{1-x} \right)^{m_{GT}} \left( \frac{1-F_P}{F_P} \right)^{n_{GT}} \left( \frac{Pr_G}{Pr_L} \right)^{p_{GT}} \left( \frac{\mu_L}{\mu_G} \right)^{q_{GT}} (1 + E_o |\text{sen}\beta|)^{r_{GT}} \right], \quad (6.2)$$

onde  $Pr_k$  é o número de Prandlt de cada fase,  $\mu_k$  é a viscosidade dinâmica de cada fase,  $\beta$  é a inclinação do duto com a horizontal e  $h_{L,ST}$  é o coeficiente de transferência de calor para a fase líquida calculado pela equação de Sieder e Tate (INCROPERA *et al.*, 2007).

$$h_{L,ST} = \left( \frac{K_L}{D_i} \right) 0,027 Re_L^{4/5} Pr_L^{1/3} \left( \frac{\mu_L}{\mu_{L,w}} \right)^{0,14}. \quad (6.3)$$

Os parâmetros desta correlação são relacionados à fase líquida, onde  $K_L$  é a condutividade térmica,  $\mu_L$  é a viscosidade dinâmica,  $\mu_{L,w}$  é a viscosidade dinâmica na temperatura da parede. As constantes presentes na Eq. (6.2) são:  $c_{GT}=0,55$ ;  $m_{GT}=0,1$ ;  $n_{GT}=0,4$ ;  $p_{GT}=0,25$ ;  $q_{GT}=0,25$  e  $r_{GT}=0,25$ . Além disso,  $x$  é a razão entre a vazão mássica de gás,  $\dot{m}_G$  e a vazão total,  $\dot{m}_{total} = \dot{m}_G + \dot{m}_L$ :

$$x = \frac{\dot{m}_G}{\dot{m}_G + \dot{m}_L}. \quad (6.4)$$

Os parâmetros  $F_P$  e  $F_S$  são definidos por:

$$F_P = (1 - \alpha_G) + \alpha_G F_S^2, \quad (6.5a)$$

$$F_S = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \sqrt{\frac{\rho_G (u_G - u_L)^2}{g D_i (\rho_L - \rho_G)}} \right). \quad (6.5b)$$

O termo  $E_o$  é calculado por:

$$E_o = \frac{(\rho_L - \rho_G) g D_i}{\sigma}, \quad (6.6)$$

onde  $\sigma$  é a tensão superficial.

Propõem-se, então, fazer uma comparação dos coeficientes de transferência de calor calculados localmente pelo FCT, através da equação de Gnielinski, e dos calculados pela equação proposta por GHAJAR E TANG (2010).

Na simulação com FCT, os  $h_k$ , coeficientes de transferência de calor das fases gasosa e líquida foram ponderados em função do perímetro molhado  $S_k$  de cada fase, a fim de obter um parâmetro único a ser comparado com o  $h_{TP,GT}$  da correlação, conforme a equação a seguir.

$$h_{TP,FCT} = \frac{S_G h_G + S_L h_L}{S_G + S_L}. \quad (6.7)$$

Foram considerados dois casos: o primeiro quando a temperatura da parede é constante e outro quando o fluxo é constante na parede. Para ambos os casos, considerou-se que não há troca de calor por convecção externa e o material do duto é o cobre.

#### 6.4.1 Caso de Validação do Coeficiente de Transferência de Calor para Fluxo Constante na Parede do Duto – Dimensões de um Duto de Laboratório

Para a primeira abordagem desta validação, considerou-se o fluxo na parede do duto constante. No trabalho de GHAJAR E TANG (2010), os autores validam sua correlação com dados experimentais de outros trabalhos relevantes na literatura. Para o caso de dutos horizontais, os autores validam a correlação para uma faixa de  $700 \leq Re_{SG} \leq 48000$  e  $2100 \leq Re_{SL} \leq 67000$ , onde  $Re_{sk}$  é o Reynolds relativo à velocidade superficial de cada fase, definido por:

$$Re_{sk} = \frac{\rho_k u_k \alpha_k D_i}{\mu_k}. \quad (6.8)$$

Para respeitar este intervalo e ainda permanecer no padrão estratificado, simulou-se um caso em que foi considerado um duto que não representa a realidade dos gasodutos

*offshore* da indústria do petróleo - visto que seu comprimento é reduzido, assim como seu diâmetro - mas atende ao intervalo dos números de Reynolds em que os autores validaram a sua correlação. A Tabela 6.8 identifica a configuração do duto simulado.

Tabela 6.8: Configuração do duto e do escoamento para o caso de validação com GHAJAR E TANG (2010) para o caso de fluxo constante na parede com duto não real.

Fluidos considerados	Ar e Água
Comprimento	15,0 m
Diâmetro	0,07 m
Número de células de discretização	1000 células
Rugosidade	$1,50 \times 10^{-6}$ m
Espessura do duto	$5 \times 10^{-3}$ m
Condutividade térmica do cobre	398 W/mK

Para este caso em que se considera o fluxo constante na parede do duto,  $q''_{wall}$ , as condições de contorno, baseadas na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho, foram:

Tabela 6.9: Condições de contorno para validação com correlação de GHAJAR E TANG (2010) para caso fluxo constante na parede com duto não real

	$p$ (Pa)	$u_G$ (m/s)	$u_L$ (m/s)	$T$ (K)	$\alpha_L$ (-)	$q''_{wall}$ (W/m <sup>2</sup> )
Entrada		8	0,8	293	0,08	500
Saída	101325					500

O gráfico da Figura 6.19 abaixo representa o resultado da simulação em regime permanente para o coeficiente de transferência de calor obtido pelo FCT, curva vermelha contínua, e pela correlação de GHAJAR E TANG (2010), curva azul tracejada. Os resultados foram obtidos localmente, ou seja, em todo o domínio do duto.

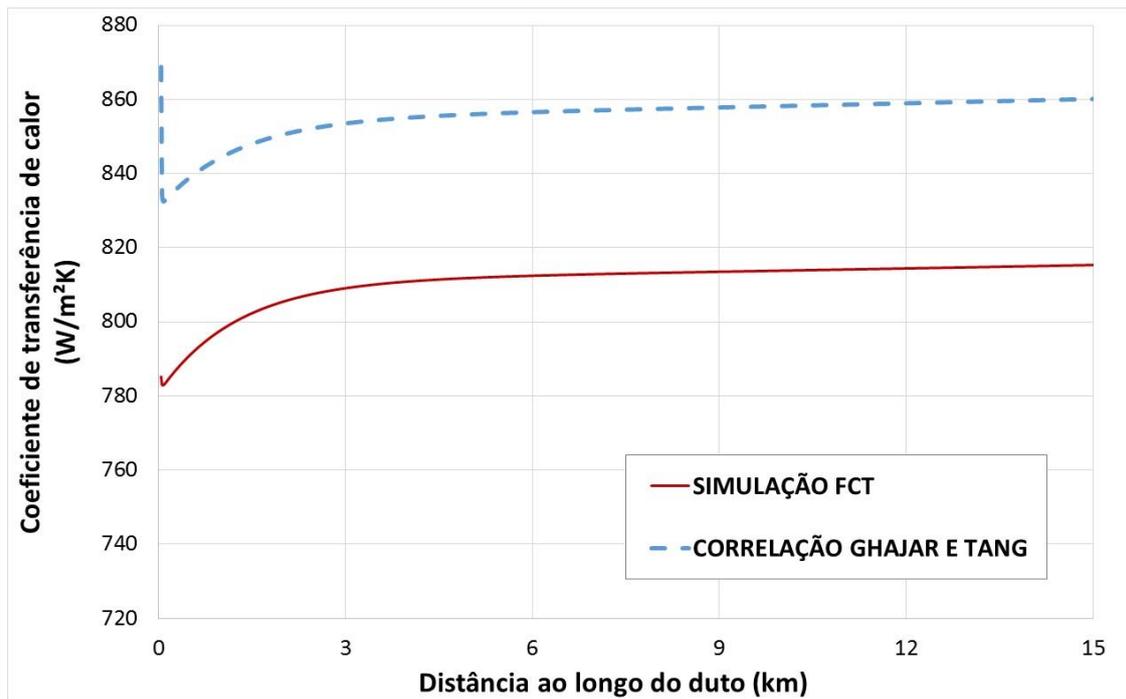


Figura 6.19: Variação do coeficiente de transferência de calor calculado ao longo do duto para caso fluxo constante na parede com duto não real.

Integrando ao longo do duto esses valores, obtém-se um valor global deste parâmetro, que para a simulação com FCT, o  $h_{TP,FCT}$  global foi igual à 809,9 W/mK. Já para a integração ao longo do duto, para o  $h_{TP,GT}$  calculado pela correlação, obteve-se 854,5 W/mK.

Calculou-se o erro relativo entre estes parâmetros, por:

$$\xi = \frac{|h_{TP,FCT} - h_{TP,GT}|}{h_{TP,GT}} \quad (6.9)$$

O erro relativo para o  $h_{TP,FCT}$  em relação ao  $h_{TP,GT}$  foi de 5,2%. Esse erro relativo é considerado razoável para este parâmetro, visto que se enquadra nas incertezas levantadas pelos autores GHAJAR E TANG (2010) para o caso de escoamentos de ar e água em dutos horizontais, que foi 22,2%.

#### 6.4.2 Caso de Validação do Coeficiente de Transferência de Calor para Fluxo Constante na Parede do Duto – Dimensões de um Gasoduto Real

Propõem-se fazer a mesma análise para um duto com configurações mais compatíveis com a realidade dos gasodutos. A Tabela 6.10 representa os dados que foram utilizados para essa abordagem. As condições de contorno utilizadas para este segundo caso, baseado na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho, estão descritas na Tabela 6.11.

Tabela 6.10: Configuração do duto e do escoamento para o caso de validação com GHAJAR E TANG (2010) para o caso de fluxo constante na parede com gasoduto real.

Fluidos considerados	Ar e Água
Comprimento	45,0 km
Diâmetro	0,45 m
Número de células de discretização	1000 células
Rugosidade	$1,50 \times 10^{-6}$ m
Espessura do duto	$2,54 \times 10^{-2}$ m
Condutividade térmica do cobre	398 W/mK

Tabela 6.11: Condições de contorno para validação com correlação de GHAJAR E TANG (2010) para caso fluxo constante na parede com gasoduto real.

	$p$ (Pa)	$u_G$ (m/s)	$u_L$ (m/s)	$T$ (K)	$\alpha_L$ (-)	$q''_{wall}$ (W/m <sup>2</sup> )
Entrada		4,5	0,8	293	0,08	20
Saída	$20 \times 10^5$					20

De maneira análoga ao caso anterior, a Figura 6.20 abaixo representa a variação do coeficiente de transferência de calor ao longo do duto, tanto para a simulação com FCT, curva contínua vermelha, quanto para o calculado pela correlação, curva azul tracejada.

Integrando ao longo do duto esses valores, obteve-se um erro relativo para o  $h_{TP,FCT}$  em relação ao  $h_{TP,GT}$  de 25,5%. Esse erro relativo foi considerado razoável para este parâmetro, pois  $Re_{SG}$  está acima dos analisados por GHAJAR E TANG (2010) e ainda assim, o erro se encontra próximo da faixa de incertezas encontrada pelos autores para escoamento de ar e água em dutos horizontais, de 22,2%.

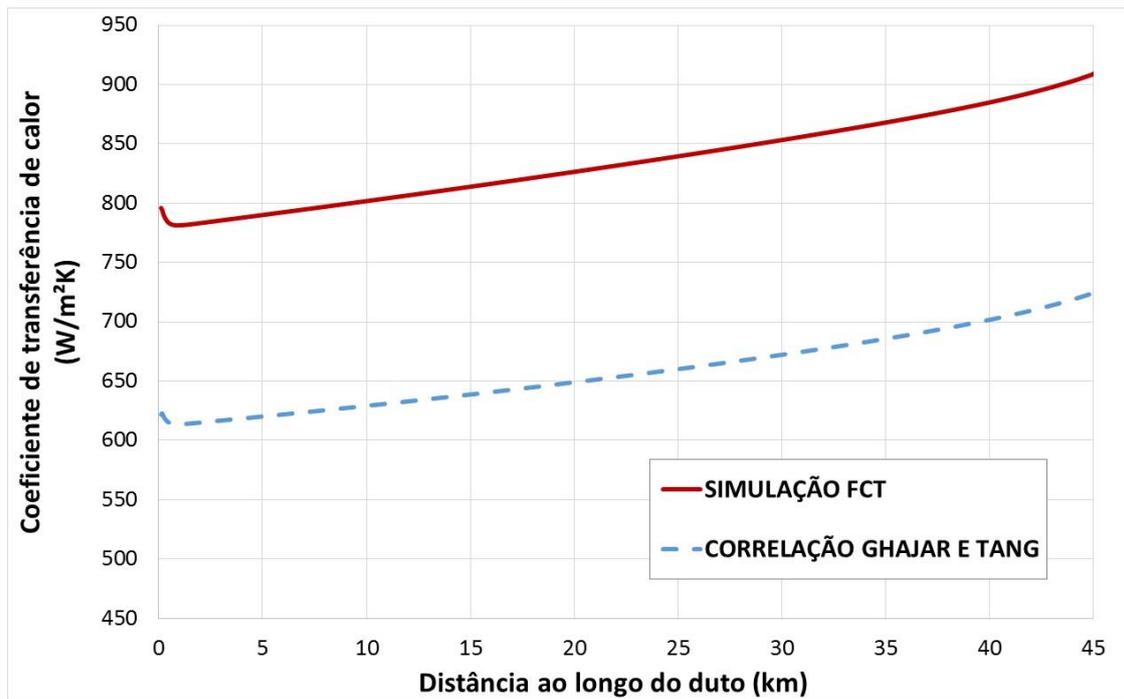


Figura 6.20: Variação do coeficiente de transferência de calor calculado ao longo do duto para caso fluxo constante na parede com duto real.

### 6.4.3 Caso de Validação do Coeficiente de Transferência de Calor para Temperatura Constante na Parede do Duto – Dimensões de um Gasoduto Real

Um último caso referente a esta validação foi o caso de temperatura constante na parede. As configurações do duto que foram utilizadas para analisar este caso foram as mesmas do caso para fluxo constante, representadas na Tabela 6.10. Para este caso foram consideradas condições de contorno, baseado na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho, conforme Tabela 6.12, onde  $T_{wall}$  é a temperatura da parede do duto:

Tabela 6.12: Condições de contorno para validação com correlação de GHAJAR E TANG (2010) para caso temperatura constante na parede para duto real.

	$p$ (Pa)	$u_G$ (m/s)	$u_L$ (m/s)	$T$ (K)	$\alpha_L$ (-)	$T_{wall}$ (K)
Entrada		4,5	0,8	293	0,08	303
Saída	$20 \times 10^5$					303

Para este estudo, obteve-se o gráfico a seguir, que representa o resultado da simulação em regime permanente para o coeficiente de transferência de calor obtido pelo FCT, curva vermelha contínua, e pela correlação de GHAJAR E TANG (2010), a curva azul tracejada.

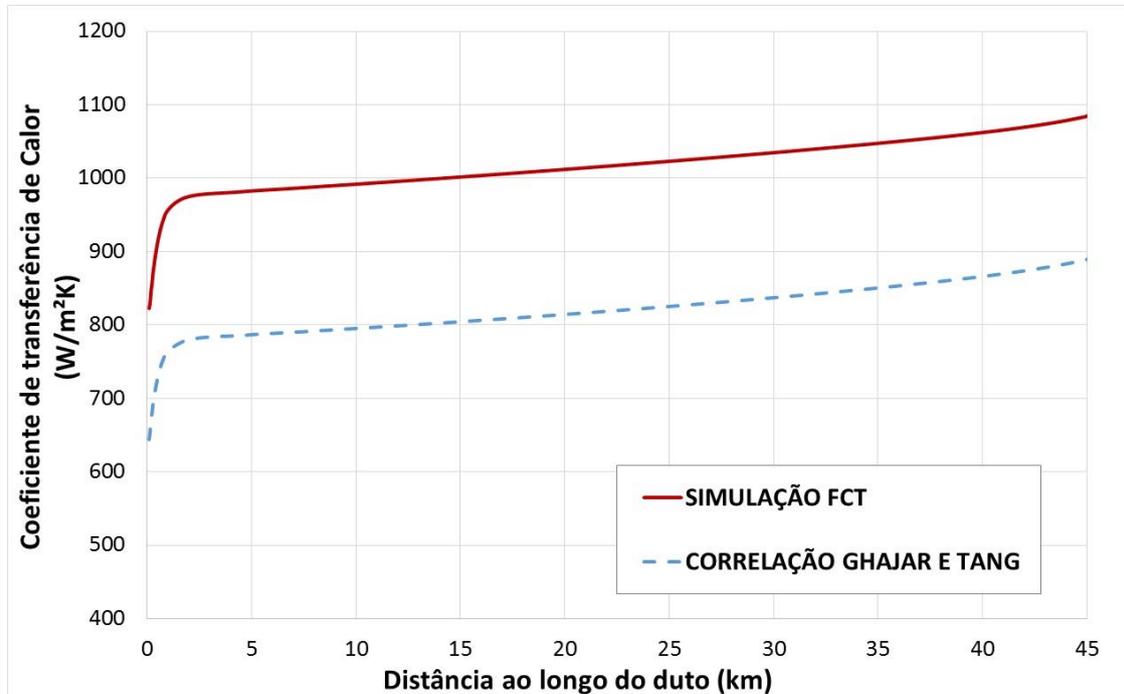


Figura 6.21: Variação do coeficiente de transferência de calor calculado ao longo do duto para caso temperatura constante na parede com duto real.

De maneira análoga aos casos anteriores, foi calculado o erro relativo do coeficiente de transferência de calor calculado pelo FCT em relação ao da correlação de GHAJAR E TANG (2010) integrados em todo domínio. O erro encontrado foi de 23,9%, sendo um valor próximo dos valores encontrados pelos autores da correlação, de 22,2%, para o caso de escoamento de ar e água em dutos horizontais.

Tendo em vista todos os resultados obtidos por esta validação, o FCT associado ao modelo matemático adotado está em concordância com o esperado, demonstrando resultados satisfatórios para o trabalho.

## 6.5 AVALIAÇÃO DA HIPÓTESE DE ESCOAMENTO ISOTÉRMICO

Muitos autores da literatura que simulam escoamentos horizontais em gasodutos consideram em seus modelos a hipótese de escoamento isotérmico por simplicidade.

Porém, o efeito da temperatura, por menor que seja em alguns casos, existe e não se pode deixar de contabilizá-lo. Em alguns casos reais em gasodutos em que o gradiente de temperatura é significativo, pode-se levar à formação de hidratos no duto e deposição de parafina, o que causaria perdas na produção de petróleo e gás natural.

A fim de comparar e quantificar o efeito da variação da temperatura entre o escoamento bifásico dentro do duto e o meio externo, simulou-se um caso em que o fluido escoava com uma temperatura inicial igual à temperatura externa do ambiente, denominado quase-isotérmico, cujas condições de contorno são apresentadas na Tabela 6.13, baseadas na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho.

Tabela 6.13: Condições de contorno para a análise da hipótese de escoamento quase-isotérmico para o caso isotérmico.

	$p$ (Pa)	$u_G$ (m/s)	$u_L$ (m/s)	$T$ (K)	$\alpha_L$ (-)	$T_\infty$ (K)
Entrada		4,5	0,8	277	0,008	277
Saída	$20 \times 10^5$					277

Em contrapartida, simulou-se outro caso em que os fluidos trocam calor com o ambiente externo que está a uma temperatura menor que os fluidos e varia linearmente de 4°C (ou 277 K) à 12°C (ou 285 K), ou seja, um caso mais compatível com a realidade dos gasodutos. Para esta análise, foi considerada a troca de calor por convecção interna, a condução radial e a convecção externa ao duto. As condições de contorno utilizadas para esta simulação encontram-se na Tabela 6.14, baseadas na análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno apresentada no Apêndice A deste trabalho. Este segundo caso foi denominado não-isotérmico.

Tabela 6.14: Condições de contorno para a análise da hipótese de escoamento isotérmico para o caso não-isotérmico.

	$p$ (Pa)	$u_G$ (m/s)	$u_L$ (m/s)	$T$ (K)	$\alpha_L$ (-)	$T_\infty$ (K)
Entrada		4,5	0,8	293	0,008	277
Saída	$20 \times 10^5$					285

A Tabela 6.15 indica os dados de configuração do duto, bem como fluidos envolvidos nas duas simulações utilizadas para este estudo.

Tabela 6.15: Dados da configuração do duto e do escoamento para a análise da hipótese de escoamento isotérmico.

Fluidos considerados	Ar e Água
Comprimento	45,0 km
Diâmetro	0,45 m
Número de células de discretização	1000 células
Material do duto	Aço
Rugosidade	$4,572 \times 10^{-5}$ m
Espessura do duto	$2,54 \times 10^{-2}$ m
Condutividade térmica do material do duto	50 W/mK
Fluido que escoar externamente ao duto	Água
Velocidade do escoamento externo ao duto	1 m/s

O gráfico da Figura 6.22 a seguir ilustra a variação da temperatura e o fluxo de calor ao longo do duto para o caso denominado quase-isotérmico. A curva vermelha contínua representa a variação do fluxo de calor e a curva verde tracejada representa a variação da temperatura.

O efeito que se percebe é que há uma ligeira tendência ao aumento de temperatura no caso que simula o escoamento quase-isotérmico, evidenciando a presença do aquecimento do fluido pelo atrito presente na parede do duto e na interface entre os fluidos. A curva inversa representa o fluxo de calor, que aumenta, em módulo, acompanhando a tendência do aumento de temperatura do fluido devido ao calor gerado pelo atrito.

Já para o caso não-isotérmico, Figura 6.23, constata-se uma queda de temperatura no início e à medida que a temperatura ambiente vai aumentando, os fluidos vão se aquecendo, devido a troca de calor com o ambiente. Já a curva do fluxo de calor, evidencia que o fluido vai se resfriando perdendo calor para o ambiente na região perto da entrada do duto, até que a temperatura do fluido acompanha a temperatura do ambiente, o fluxo de calor se aproxima de zero.

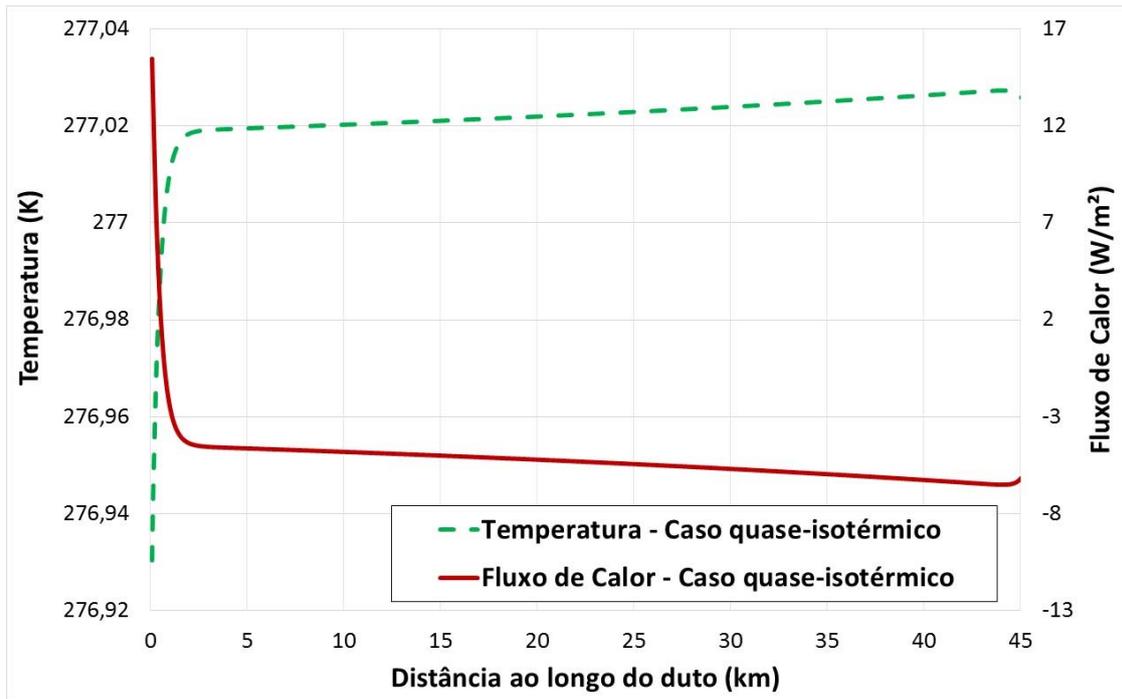


Figura 6.22: Variação da temperatura e do fluxo de calor ao longo do duto para caso quase-isotérmico.

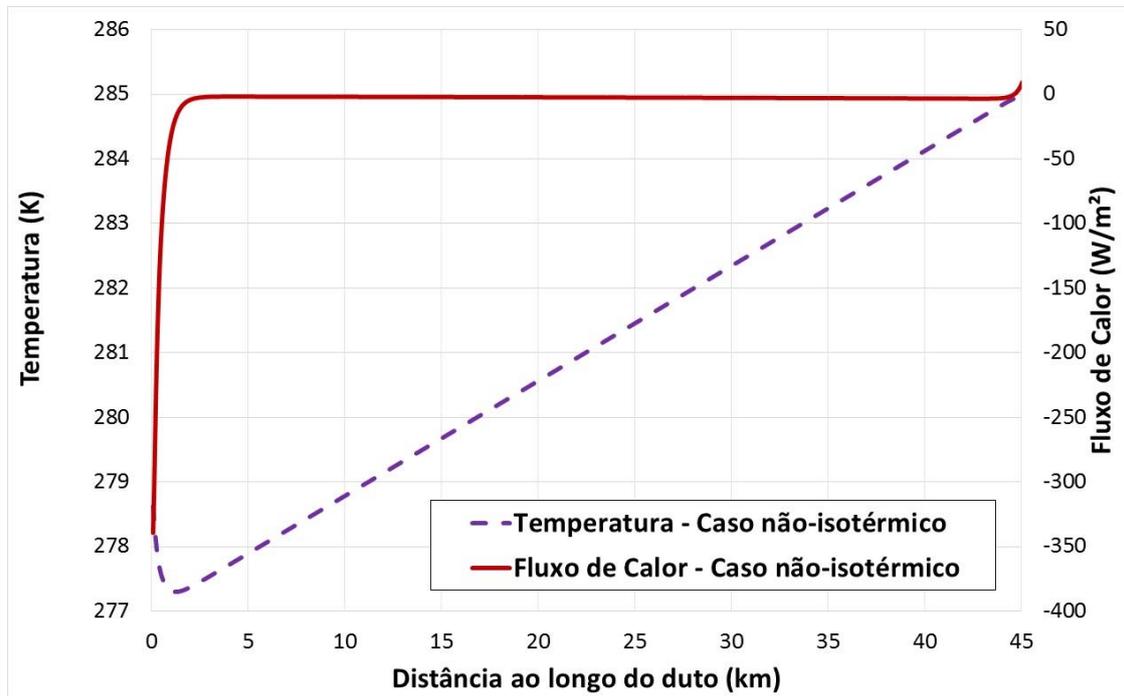


Figura 6.23: Variação da temperatura e do fluxo de calor ao longo do duto para caso não-isotérmico.

Os gráficos a seguir representam as variações das demais grandezas físicas do escoamento como pressão, velocidade de líquido e gás e fração volumétrica de líquido ao longo do duto, para os dois casos analisados. A curva verde tracejada está relacionada ao caso quase-isotérmico e a curva roxa contínua para o caso não-isotérmico.

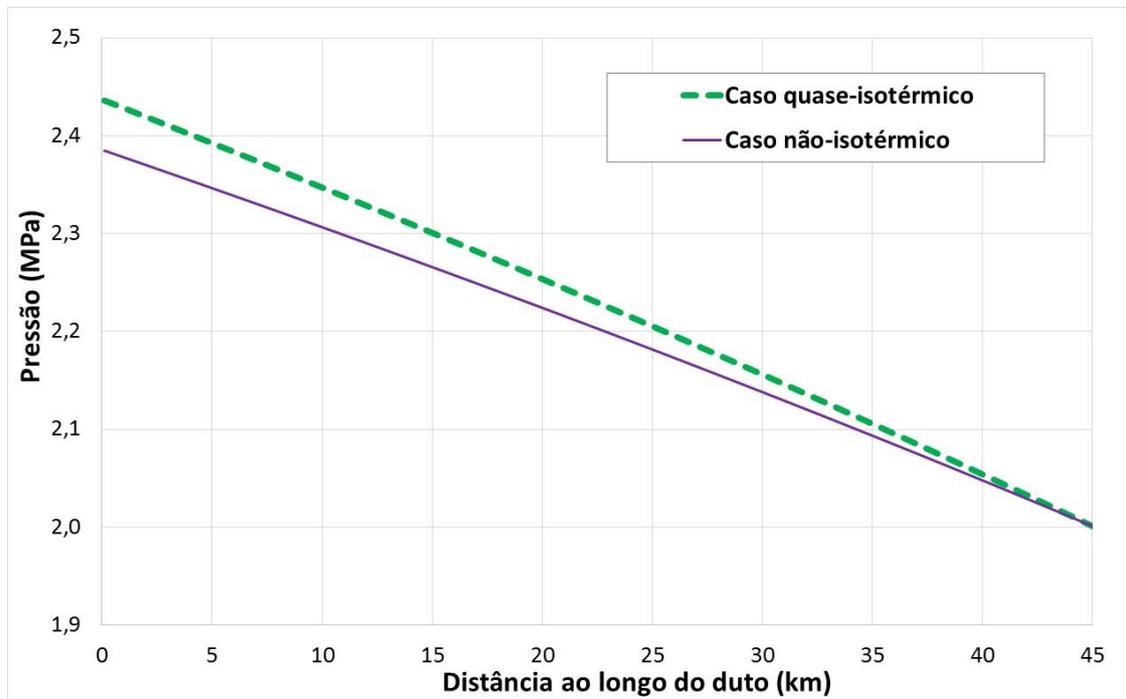


Figura 6.24: Variação de pressão ao longo do duto.

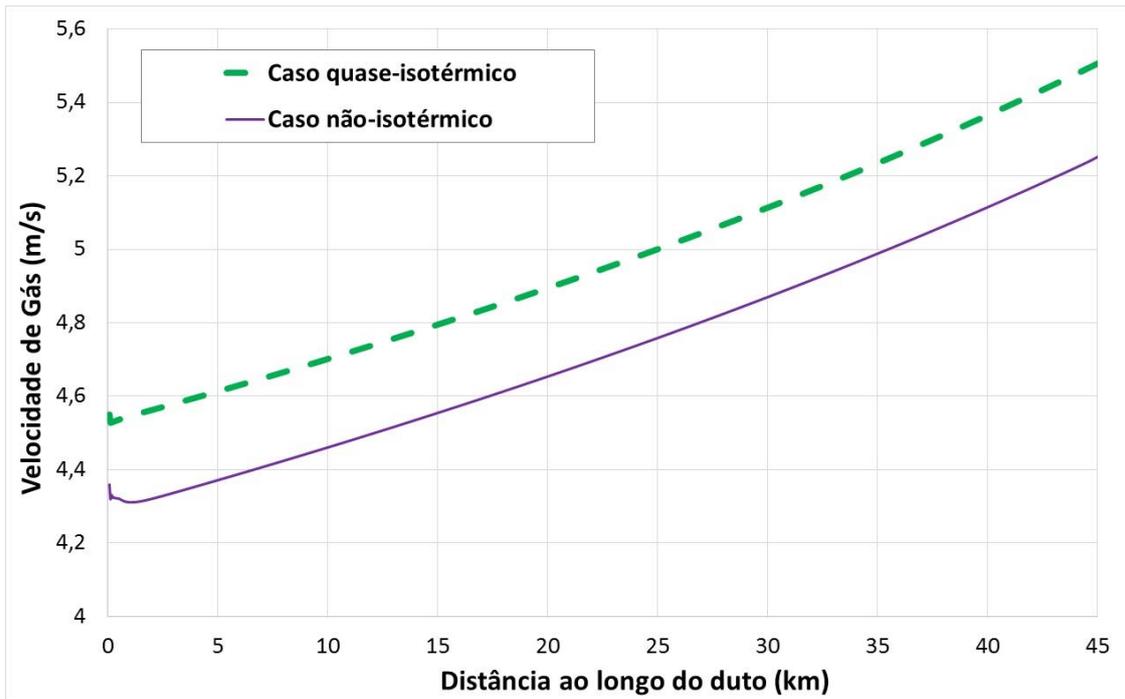


Figura 6.25: Variação de velocidade de gás ao longo do duto.

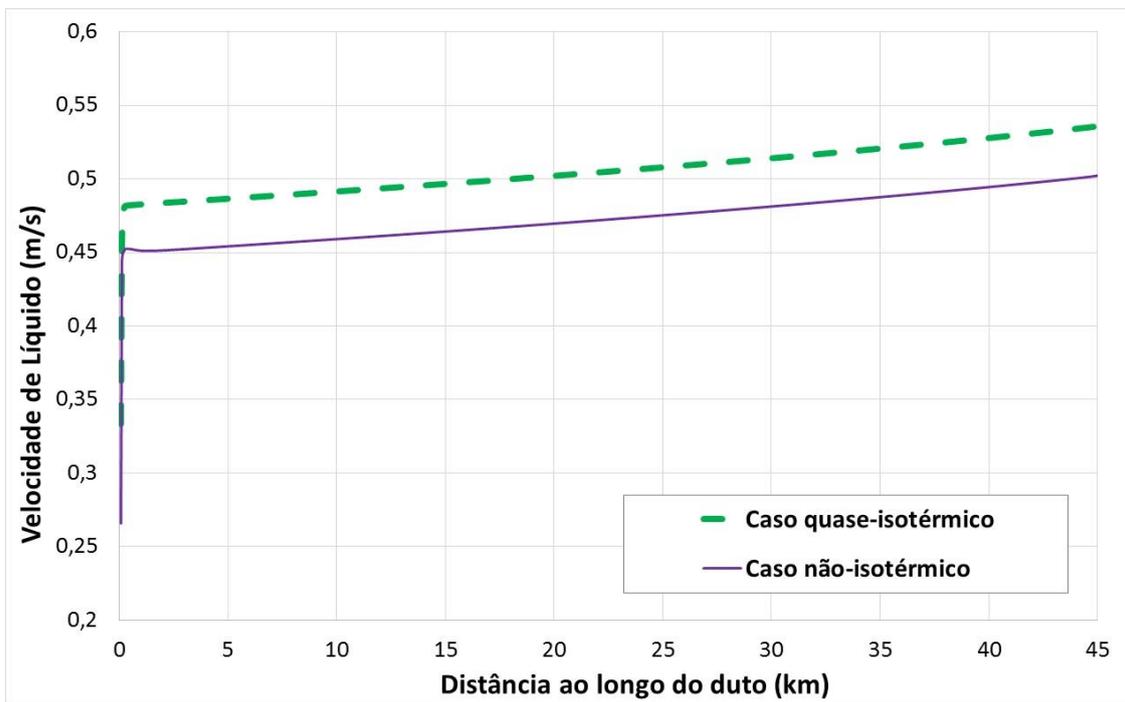


Figura 6.26: Variação de velocidade de líquido ao longo do duto.

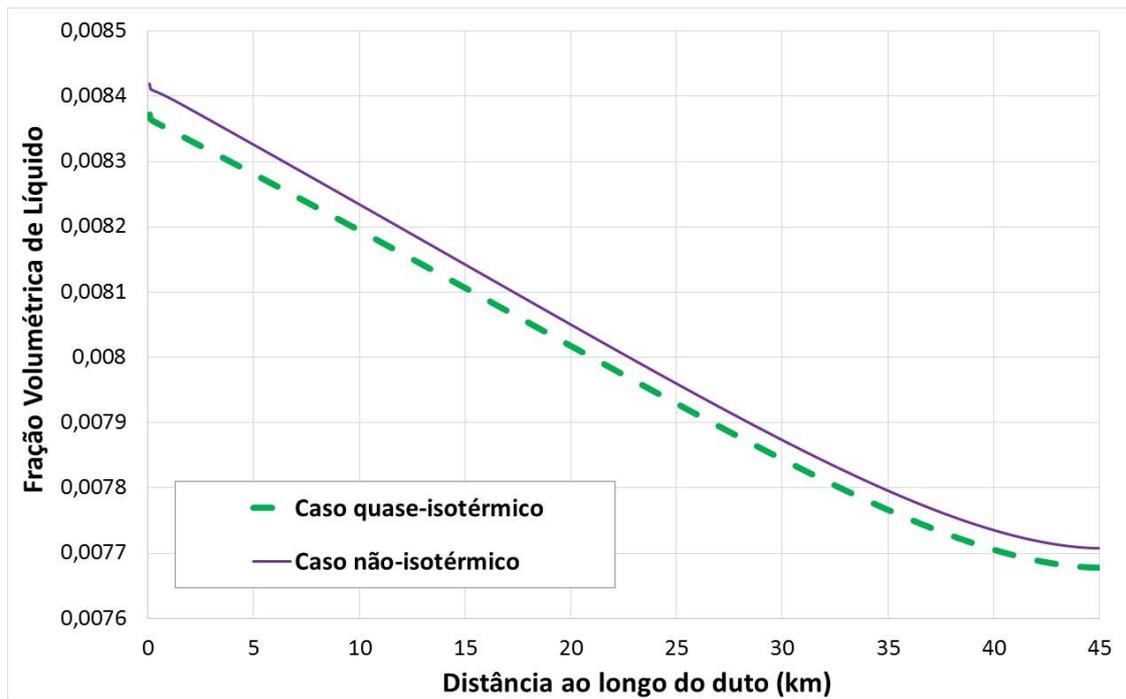


Figura 6.27: Variação de fração volumétrica de líquido ao longo do duto.

Esta análise serviu para identificar o quanto a variação da temperatura influencia no escoamento como um todo ao longo do duto. O gráficos representados pelas Figura 6.24 a 6.27, apresentam algumas diferenças, não muito expressivas, entre as duas simulações.

Nota-se também, que a variação de temperatura, considerando este caso de estudo, não é significativa, porém, dependendo das condições em que o gasoduto está submetido, esta diferença pode ser bem expressiva, como por exemplo em dutos muito longos em que a temperatura externa varia muito. Para esses casos, a temperatura interna dos fluidos tende a acompanhar esse comportamento, o que pode gerar uma variação grande de temperatura entre a entrada e a saída do gasoduto. Sendo assim, a hipótese de escoamento isotérmico não seria ideal, visto que a variação da temperatura afeta as propriedades dos fluidos, bem como a condição do duto.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi apresentada uma modelagem de escoamento bifásico de líquido e gás em gasodutos. O modelo utilizado é o modelo de Dois Fluidos que considera os fluidos de forma independente, constituído de duas equações de conservação de massa uma para cada fase, duas equações de quantidade de movimento uma para cada fase e uma equação da energia referente à mistura. Esse sistema de equações hiperbólicas foi resolvido numericamente utilizando o método numérico FCT através de um código programado em linguagem FORTRAN.

A modelagem deste trabalho contempla escoamentos bifásicos em dutos horizontais sem variação de área na seção transversal, no padrão estratificado, através de uma abordagem unidimensional, transiente e sem mudança de fase. Para esta modelagem, o escoamento foi considerado não-isotérmico, ou seja, a temperatura ao longo do duto é também uma variável a ser calculada na simulação. A pressão e a temperatura são consideradas iguais para as duas fases, ou seja, é um modelo de pressão e temperatura uniformes em cada seção, mas que variam ao longo do tempo. Diversas simulações foram realizadas neste trabalho utilizando o método numérico FCT, um método de acurácia de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço.

### 7.1 CONCLUSÕES

A primeira etapa do trabalho consistiu em uma abordagem mais simplificada para escoamento monofásico de gases. Nessa etapa, o objetivo era verificar como o método numérico se comporta ao se incluir a variável temperatura no modelo. Os resultados obtidos foram muito satisfatórios, visto que pôde-se constatar a validade do modelo através de comparações com casos analíticos da literatura e com o caso em regime permanente, conforme mostrado no Capítulo 5. Verificou-se que o FCT é um método eficaz em resolver escoamentos transientes e além disso um ótimo método de representação de descontinuidades que podem estar presentes na solução, visto que o FCT representou com acurácia as soluções analíticas e exatas dos casos utilizados para validação.

Na segunda etapa do trabalho, referente às simulações de escoamento bifásico em dutos, realizou-se inicialmente uma verificação do modelo através da comparação com

dois casos simulados no *software* multifásico OLGA. Os resultados obtidos com a verificação foram extremamente satisfatórios, principalmente quando se considera que os dois métodos, FCT e o método utilizado pelo OLGA, e seus modelos são bastante diferentes. Pôde-se constatar que o FCT representou a simulação para escoamento bifásico de maneira esperada, tanto para o caso com dutos com pouco líquido quanto para o caso de dutos com muito líquido, conforme demonstrado no Capítulo 6. Todos os parâmetros do escoamento foram calculados corretamente e apresentaram o mesmo comportamento físico ao longo do duto, mostrando que o FCT é um método confiável para resolver sistemas complexos de equações hiperbólicas.

Outra simulação realizada neste trabalho foi o caso comparativo com a correlação de GHAJAR E TANG (2010) para o cálculo do coeficiente de transferência de calor em duas situações: fluxo de calor constante na parede do duto e temperatura constante na parede do duto. Este cálculo foi realizado localmente ao longo do duto e também integrado em todo o domínio, a fim de obter um valor global desta variável e calcular o erro relativo entre os resultados obtidos com a simulação com FCT e com a correlação. Novamente, os resultados obtidos mostraram acurácia satisfatória, visto que os casos estudados obtiveram erros relativos dentro ou próximo da faixa de erros da correlação, obtida da validação com dados experimentais da literatura.

Outro caso de interesse também foi simulado. Muitos autores da literatura consideram a hipótese de escoamento isotérmico em seus modelos de escoamento bifásico em gasodutos. A fim de analisar como essa hipótese afeta a determinação dos parâmetros do escoamento, simulou-se um caso em que a temperatura dos fluidos no instante inicial é igual à temperatura do ambiente externo. Verificou-se que há uma pequena tendência ao aumento da temperatura, devido à contribuição do calor gerado pelo atrito na parede e pelo atrito da interface entre os fluidos. Este resultado valida a hipótese de escoamento isotérmico, desde que a temperatura externa esteja sujeita a gradientes de temperatura suaves, visto que essa simplificação não altera significativamente o escoamento como um todo. Porém, essa hipótese não é a realidade nos campos *offshore*, visto que há um gradiente de temperatura entre a água do mar e a temperatura do fluido. Constatou-se também que, para casos em que a temperatura do ambiente externo varia muito, a temperatura interna dos fluidos tende a acompanhar esse comportamento, o que pode gerar uma variação grande de temperatura entre a entrada e a saída do gasoduto. Em outras palavras, é importante considerar a equação da energia quando se deseja simular

situações reais de gasodutos *offshore*, onde sempre há um gradiente de temperatura externa ao duto significativo.

Além de simulações de escoamento em dutos, foi realizado um estudo de convergência da malha, realizado através do cálculo da quantidade de movimento linear total no duto. Esta variável global combina explicitamente todas as variáveis do escoamento em uma única grandeza física, exceto a pressão e a temperatura. Estas duas variáveis, no entanto, determinam o valor da massa específica do gás e, portanto, tem um papel implícito de quantificação da quantidade de movimento linear global dos fluidos no duto. A quantidade de movimento linear foi calculada para diversos valores de  $\Delta x$  para um valor constante de  $\Delta t$ . Os resultados obtidos revelam que para valores grandes de  $\Delta x$ , o método se comporta como de primeira ordem. Já para valores menores de  $\Delta x$ , o FCT se comporta como de segunda ordem. Esses resultados indicam que malhas pouco refinadas podem não representar o escoamento bifásico em gasodutos da maneira desejada, visto que os erros serão de primeira ordem, o que não é interessante quando se utiliza um método de segunda ordem. Para garantir uma acurácia no espaço de segunda ordem, fica evidente que o ideal é utilizar  $(\Delta x/L) \leq 0,001$ .

Para concluir, destacou-se a importância da análise de hiperbolicidade para sistemas de equações hiperbólicas, como as utilizadas neste trabalho, mostradas no Capítulo 3. O problema é considerado bem-posto quando os autovalores associados ao polinômio característico gerado a partir das equações do sistema são reais e seus autovetores são linearmente independentes. A presença de algum autovalor complexo faz com que o modelo perca hiperbolicidade, levando a instabilidades na solução numérica. Além disso, é importante analisar o sinal destes autovalores em cada contorno, pois é a partir desta informação que se sabe como impor as condições de contorno na solução. As análises de hiperbolicidade dos casos abordados neste trabalho estão no Apêndice A deste documento, bem como o equacionamento para obter o polinômio característico. A identificação das regiões de hiperbolicidade associadas ao sistema de equações diferenciais parciais representa matematicamente o modelo para escoamento bifásico utilizado neste trabalho teve papel fundamental na escolha dos casos simulados. Casos que não estejam claramente no interior destas regiões de hiperbolicidade não produzem soluções fisicamente corretas. Pode-se concluir que, para o modelo adotado neste trabalho, é muito importante verificar a priori se as condições do escoamento correspondem a pontos que estejam na região de hiperbolicidade. Associado a este estudo,

pode-se avaliar a importância de se determinar os sinais dos autovalores na entrada e na saída devido à necessidade de se especificar as condições de contorno corretamente.

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se em trabalhos futuros melhorar o modelo matemático adotado neste trabalho. Para isso, propõem-se incorporar efeitos da variação de propriedades dos fluidos, tais como viscosidade, condutividade térmica e calores específicos, em função da temperatura dos fluidos, visando uma melhor comparação com o *software* OLGA e uma maior aproximação com a realidade em gasodutos. Outra melhoria que se pretende incorporar ao modelo matemático é a contabilização de efeitos de transferência de massa entre as fases. Além disso, sugere-se estender o modelo para outros padrões de escoamento bifásico, como bolhas e golfadas.

Sugere-se também em trabalhos futuros, incorporar a equação de evolução para a fração volumétrica de líquido no modelo, como proposto por SAUREL *et al.* (1999), considerando a fase líquida como compressível. Desta forma, segundo os autores, o modelo é sempre hiperbólico, ou seja, os autovalores associados ao polinômio característico são sempre reais e seus autovetores são linearmente independentes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBASPOUR, M., CHAPMAN, K.S., 2008, “Nonisothermal transient flow in natural gas pipeline”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 75, pp. 0310181 – 0310188;

ABBASPOUR, M., CHAPMAN, K.S., GLASGOW, L.A., 2010, “Transient modeling of non-isothermal, dispersed two-phase flow in natural gas pipelines”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, pp. 495–507;

ABBASPOUR M., CHAPMAN, K.S., GLASGOW, L.A., ZHENG, Z.C, 2005, “Dynamic simulation of gas-liquid homogeneous flow in natural gas pipeline using two-fluid conservation equations”, *Proceedings of FEDSM2005 2005 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting and Exhibition*, Houston, TX, U.S.A., June;

ALVES, I.N, ALHANATAL, F.J.S., SHOHAM, O., 1992, “A Unified Model for Prediction Flowing Temperature Distribution in Wellbores and Pipeline”, *SPE Production Engineering*, v. 7, pp. 363 - 367;

ANDREUSSI, P., PERSEN, L.N., 1987, “Stratified Gas-Liquid Flow in Downwardly Inclined Pipes”, *International Journal of Multiphase Flow*, v. 13, n. 4, pp. 565-575;

BAPTISTA, R.M., 2013, *Detecção de Vazamentos em Gasodutos com a Presença de Escoamento Bifásico, Baseada em Análise Estatística de Desbalanceamentos de Inventário*, Tese de D.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

BAPTISTA, R.M, 2007, “On the Estimation of Dual Phase Gas Pipeline Gas Leakage Flow Rate from the Leak Diameter”, *In: Proceedings of the Rio Pipeline Conference*, IBP-1238-07, Rio de Janeiro, RJ;

BENDIKSEN, K. M., MALNES, D., MOE, R., NULAND, S., 1991, “The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and Application”, *SPE Production Engineering*, pp. 171-180, May;

BOOK, D.L., BORIS, J.P., HAIN, K., 1975, “Flux-Corrected Transport II. Generalizations of the Method”, *Journal of Computational Physics*, v.18, pp.248-283;

BORIS, J.P., BOOK, D.L., 1973, “Flux correct transport I - SHASTA - A fluid transport algorithm that works”, *Journal of Computational Physics*, v. 11, pp. 38-69;

BORIS, J.P., BOOK D.L., 1976, “Solution of Continuity Equation by the Method of Flux-Corrected Transport”, *Journal of Computational Physics*, v.16, pp.85-129;

BUENO, D.E.G.P., 2013, *Modelagem numérica do escoamento bifásico em gasodutos com padrão estratificado*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

BUENO, D., FIGUEIREDO, A., BAPTISTA, R., RACHID, F., BODSTEIN, G., 2014, “Numerical simulation of stratified two-phase flow in a nearly horizontal gas-liquid pipeline with a leak”, *Proceedings of the 2012 9th International Pipeline Conference – IPC*, Calgary, Alberta, Canada, September 2014;

CHACZYKOWSKI, M., 2010, “Transient flow in natural gas pipeline - The effect of pipeline thermal model”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, pp. 1051 - 1067;

CHURCHILL, S.W., BERNSTEIN, M., 1977, “A correlating equation for forced convection from gases and liquids to a circular cylinder in cross-flow”, *Journal Heat Transfer*, v. 99, pp. 300-306;

CLERC, S., 2000, “Numerical Simulation of the Homogeneous Equilibrium Model for Two-Phase Flows”, *Journal of Computational Physics*, v.161, pp. 354-375;

DUKHOVNAYA, Y., ADEWUMI, M.A., 2000, “Simulation of non-isothermal transients in gas/condensate pipelines using TVD scheme”, *Powder Technology*, v. 112, pp. 163 – 171;

ESSAMA, C.O., 2004, *Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified & Slug Flow Regimes)*, PhD Thesis, School of Engineering Applied Mathematics and Computing Group, Cranfield University, Bedford, United Kingdom;

FABRE, J., LINE, A., PERESSON, L., 1989, “Two-Fluid/Two-Flow-Pattern Model for Transient Gas-Liquid Flow in Pipes”. *4th BHRA Multiphase Flow International Conference*, Cranfield University, London, UK, pp. 269-289, June;

FIGUEIREDO, A.B, 2010, *Validação teórica de uma modelagem para escoamentos bifásicos em gasodutos com duas equações de conservação para cada fase*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

FIGUEIREDO, A., BUENO, D., BAPTISTA, R., RACHID, F., BODSTEIN, G., 2012, “An accuracy study of the flux-corrected transport numerical method applied to transient two-phase flow simulation in gas pipelines”, *Proceedings of the 2012 9th International Pipeline Conference – IPC 2012*, Calgary, Alberta, Canada, September;

FLETCHER, C.A. J., 1988, *Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific techniques for Flow Categories*, Volume 2. Springer-Verlag;

FOX, R.W., PRITCHARD, P.J., MCDONALD, A.T., 2009, *Introduction to fluid dynamics*, John Wiley & Sons, 7th edition;

GARCIA, F., GARCIA, J.M., GARCIA, R., JOSEPH, D.D., 2007, “Friction factor improved correlations for laminar and turbulent gas-liquid flow in horizontal pipelines”, *International Journal of Multiphase Flow*, v. 33, pp.1320-1336;

GHAJAR, A.J., TANG, C.C., 2010, “Importance of non-boiling two-phase flow heat transfer in pipes for industrial applications”, *Heat Transfer Engineering*, v. 31(9), pp. 711-732;

GNIELINSKI, V., 1976, “New equations for heat and mass-transfer in turbulent pipe and channel flow”, *International Chemical Engineering*, v. 16, pp. 359-368;

HANCOX, W.T., FERCH, R.L., LIU, W.S., NIEMAN, R.E., 1979, “One-dimensional models for transient gas-liquid flows in ducts”, *International Journal Multiphase Flow*, v. 6, pp. 25 - 40;

HARTEN, A., 1983, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, v. 49, pp. 357-393;

HIRSCH, C., 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of numerical discretization*, Volume 2. John Wiley & Sons;

INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P., BERGMAN, T.L., LAVINE, A.S., 2007, *Fundamentals of heat and mass transfer*, Sixth Edition, John Wiley & Sons;

INTEL, INTEL ® Visual FORTRAN Compiler Professional Edition for Windows with IMSL, Version 10.1;

ISHII, M., HIBIKI, T., 2003, “One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, pp. 4935–4948;

ISHII, M., HIBIKI, T., 2006, *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*, 1<sup>st</sup>ed. New York, Springer Science;

ISHII, M., MISHIMA, K., 1984, “Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 82, pp. 107-126;

ISSA, R.I., KEMPF, M.H.W., 2003, “Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model”, *International Journal of Multiphase Flow*, v.29, pp. 69-95;

JEFFREY, A., 1976, *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*, London, Pitman Publishing;

LEZEAU, P., THOMPSON, C. P., 1998, “Numerical Simulation of Multi-Phase Flow: Speed, Error Control & Robustness”, *Cranfield University Technical Report*;

LIENHARD IV, J.H., LIENHARD V, J.H., 2008, *A heat transfer textbook*, 3<sup>rd</sup> ed., U.S.A., Phlogiston Press Cambridge Massachusetts;

LOCKHART, R.W., MARTINELLI, R.C., 1949, “Proposed correlation of data for isothermal two-phase two-component flow in pipes”, *Chem. Eng. Prog.*, v. 45, pp. 34-48;

MADEIRA, I.M., 2011, *Detecção de fechamento de válvula em gasodutos pela utilização de filtros de partículas*, Tese de D.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

MANUAL IMSL – versão 7.0 (IMSL Fortran Numerical Library – User’s Guide Math Library – Version 7.0) – Visual Numerics;

MASELLA, J.M., TRAN, Q.H, FERRE, D., PAUCHON, C., 1998, “Transient simulation of two-phase flows in pipes”. *International Journal Multiphase Flow*, v. 24, pp. 739-755;

MEDINA, C.D.P., 2011, *Simulação numérica do escoamento líquido-gás em golfadas com transferência de calor em dutos horizontais*, Dissertação de M.Sc. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, Brasil. Disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/>>. Acesso em: Novembro de 2014;

MORALES-RUIZ, S., RIGOLA, J., RODRIGUEZ, I., OLIVA, A., 2012, “Numerical resolution of the liquid-vapour two-phase flow by means of the two-fluid model and a pressure based method”, *International Journal of Multiphase Flow*, v. 43, pp. 118 – 130;

MOODY, L.F., 1947, “An approximate Formula for Pipe friction factors”, *Transactions of ASME*, v. 69, pp.1005;

OSIADACZ, A. J., CHACZYKOWSKI, M., 2001, “Comparison of isothermal and non-isothermal pipeline gas flow models”, *Chemical Engineering Journal*, v.81, pp. 41 - 51;

PETROBRAS, Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br>>. Acesso em: 11 fev. 2016, 18:00;

SAUREL, R., ABGRALL, R., 1999, “A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows”, *Journal of Computational Physics*, v. 150, pp. 425–467;

SCHLUMBERGER, OLGA – Simulador Dinâmico de Escoamento Multifásico (do inglês: Dynamic Multiphase Flow Simulator), Versão 2014.2 – As licenças foram fornecidas através de uma parceria entre a Schlumberger e a COPPE ;

SIMÕES, E.F., CARNEIRO, J.N.E., NIECKELE, A.O, 2013, “High Resolution simulations of non-isothermal intermittent flow in horizontal pipes with the 1D two-fluid model”, *8<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow*, ICMF 2013, May 26-31, Jeju, Korea;

SIMÕES, E.F., CARNEIRO, J.N.E., NIECKELE, A.O, 2014, “Numerical prediction of non-boiling heat transfer in horizontal stratified and slug flow by Two-Fluid Model”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 47, pp. 134-145;

SOD, G.A., 1985. “Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and Boundary Value Problems”, *Cambridge University Press*;

SONDERMANN, C.N., PATRICIO, R.A.C, FIGUEIREDO, A.B., BAPTISTA, R.M., RACHID, F.B.F., BODSTEIN, G.C.R., 2015, “Hyperbolicity analysis of a two- fluid two-phase flow one-dimensional model for stratified pattern”, *Proceedings of the 2015 International Mechanical Engineering Congress & Exposition*, Houston, Texas, USA, November;

STEWART, H. B., WENDROFF, B., 1984, “Two-phase flow: Models and Methods”, *Journal of Computational Physics*, v. 56, pp. 363-409;

TAITEL, Y., DUKLER, A. E., 1976, “A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near-horizontal gas-liquid flow”. *AIChE Journal*, v. 22, n. 1, pp. 47-55, Jan;

THORLEY, A.R.D, TILEY, C.H., 1987, “Unsteady and transient flow of compressible fluids in pipelines – A review of theoretical and some experimental studies”, *International Journal Heat Fluid Flow*, v. 8, pp. 3-15;

TORO E. F., 1997, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer;

XIAO, J. J., SHOHAM, O., 1991, “Evaluation of Interfacial Friction Factor Prediction Methods for Gas/Liquid Stratified Flow”, *SPE 22765 66th Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, Texas, U.S.A;

WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10;

ZALESAK, S.T., 1979, “Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids”, *Journal of Computational Physics*, v.31, pp. 335-362;

ZHANG, H.Q., WANG, Q., SARICA, C., BRILL, J.P., 2004, “Unified Model of Heat Transfer in Gas-Liquid Pipe Flow”, *SPE 90459 Annual Technical Conference and Exhibition*, Houston, Texas, U.S.A, September;

ZIGRANG, D.J., SYLVESTER, N.D., 1985, “A Review of Explicit Friction Factor Equations”, *Journal of Energy Resources Technology*, v. 107, pp. 280-283.

## Apêndice A. Análise de Hiperbolicidade e Avaliação da Imposição das Condições de Contorno

Escoamentos bifásicos são descritos por equações diferenciais parciais hiperbólicas, são elas: conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Por envolver equações hiperbólicas, o modelo está sujeito a sofrer interferências de perda de hiperbolicidade, ou seja, pode se tornar um problema mal posto.

Nesta seção será apresentada a análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição das condições de contorno para os casos estudados neste trabalho. Muitos trabalhos na literatura apresentam estudos parecidos, de acordo com o modelo estudado. Recentemente, SONDERMANN *et al.* (2015) realizaram um estudo de hiperbolicidade para escoamento bifásico no padrão estratificado para o modelo isotérmico SPM4, modelo este utilizado por ESSAMA (2004), BUENO (2013), que envolvem quatro equações: duas equações de conservação de massa, uma para a fase líquida e outra para a gasosa, e duas equações de quantidade de movimento, também uma para cada fase.

Neste estudo de SONDERMANN *et al.* (2015), fica enfatizada a importância da análise de hiperbolicidade para garantir que o caso a ser estudado forma um problema bem-posto. Os autores alegam que o modelo perde hiperbolicidade perto das fronteiras do padrão estratificado e em outras áreas desta região, referindo-se à região do mapa de padrão de escoamentos de TAITEL E DUKLER (1976).

A análise de hiperbolicidade é fundamental para casos que levam em consideração um sistema envolvendo equações hiperbólicas. Um problema é considerado bem-posto quando os autovalores associados são reais e seus autovetores são linearmente independentes. A presença de algum autovalor complexo faz com que o modelo perca hiperbolicidade, levando a instabilidades na solução numérica.

Para realizar a análise de hiperbolicidade para o sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas deste estudo (apresentadas no Capítulo 3), é conveniente reescrever as equações governantes de acordo com a seguinte forma matricial primitiva:

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{W}), \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são duas matrizes quadradas não singulares que são funções das variáveis dependentes do escoamento, onde:

$$\mathbf{W} \equiv [p \quad \alpha_L \quad u_G \quad u_L \quad T]^T, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_G}{RT} & -\rho_g & 0 & 0 & -\frac{\alpha_G p}{RT^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_G \alpha_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_L \alpha_L & 0 \\ 0 & 0 & \rho_G \alpha_G u_G & \rho_L \alpha_L u_L & \rho_G c_{vG} \alpha_G + \rho_L c_{vL} \alpha_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_G u_G}{RT} & -\rho_g u_G & \rho_G \alpha_G & 0 & -\frac{\alpha_G u_G p}{RT^2} \\ 0 & u_L & 0 & \alpha_L & 0 \\ \alpha_G & -p_{cG} & \rho_G \alpha_G u_G & 0 & 0 \\ \alpha_L & p_{cL} & 0 & \rho_L \alpha_L u_L & 0 \\ \alpha_G u_G + \alpha_L u_L & p_{cL} u_L - p_{cG} u_G & \rho_G \alpha_G u_G^2 & \rho_L \alpha_L u_L^2 & \rho_G c_{vG} u_G \alpha_G + \rho_L c_{vL} u_L \alpha_L \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

O polinômio característico associado a Eq. (A.1) é obtido a partir do cálculo do determinante de:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{A.5})$$

em que  $\lambda$  representa os autovalores associados às equações hiperbólicas. A Eq. (A.5) pode ser escrita em termos das variáveis primitivas dependentes do sistema de equações diferenciais parciais gerando um polinômio característico, como:

$$\begin{aligned} & (u_L - \lambda)^2 \left[ (u_G - \lambda)^3 \frac{\rho_G \alpha_G c_{vG}}{RT} + (u_L - \lambda)(u_G - \lambda)^2 \frac{\rho_L \alpha_L c_{vL}}{RT} - (u_G - \lambda) \rho_G \alpha_G c_{vG} - (u_L - \lambda) \rho_L \alpha_L c_{vL} \right] + \\ & (u_G - \lambda)^2 \left[ -(u_G - \lambda) \frac{\rho_G^2 \alpha_L c_{vG}}{\rho_L} - (u_L - \lambda) \frac{\rho_G \alpha_L^2 c_{vL}}{\alpha_G} - (u_G - \lambda) \frac{\rho_G \alpha_G c_{vG} p_{cL}}{RT \rho_L} - (u_L - \lambda) \frac{\alpha_L c_{vL} p_{cL}}{RT} \right] + \\ & (u_G - \lambda) \left[ \frac{\rho_G \alpha_L c_{vG} p_{cG}}{\rho_L} + \frac{\rho_G \alpha_G c_{vG} p_{cL}}{\rho_L} \right] + (u_L - \lambda) \left[ \frac{\alpha_L^2}{\alpha_G} c_{vL} p_{cG} + \alpha_L c_{vL} p_{cL} \right] = 0. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

As raízes deste polinômio são os autovalores correspondentes que devem ser reais e seus autovetores associados devem ser linearmente independentes para caracterizar um problema bem-posto, ou seja, hiperbólico. Esta análise de hiperbolicidade também é importante para determinar a imposição das condições de contorno, feita a partir da análise dos sinais dos autovalores encontrados. O número de condições prescritas é função do número de características que emanam do contorno para dentro do domínio. Autovalores positivos avaliados em  $x=0$  indicam número de condições de contorno impostas na entrada do duto e autovalores negativos avaliados em  $x=L$  indicam número de condições de contorno impostas na saída do duto. Esse cálculo foi realizado numericamente através da elaboração de uma rotina, escrita com o auxílio do *software* comercial Mathematica (WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10).

Para a elaboração desta rotina, foi abrangido todo o intervalo de velocidades superficiais de líquido,  $u_{SL}$ , e gás,  $u_{SG}$ , que estão dentro do padrão estratificado, segundo TAITEL E DUKLER (1976). O valor da fração volumétrica de líquido é mantido constante e obtém-se um mapa dentro da região do padrão estratificado em que consta a informação se os autovalores são reais e a quantidade de autovalores que são positivos e negativos.

Nas Figuras A.1 a A.8 serão representados os gráficos obtidos desta análise de hiperbolicidade para os casos estudados neste trabalho. Os gráficos representam a região do padrão estratificado, determinado por TAITEL E DUKLER (1976), variando as velocidades superficiais de líquido e gás. Esta região determina para cada par de valores de velocidades superficiais qual é o sinal dos autovalores associados à condição de entrada e saída do duto. A área amarela, região mais clara dos gráficos no canto direito, representa a região não hiperbólica para o par de valores de velocidades superficiais escolhido, ou seja, indica a presença de autovalores complexos que invalidam a solução. A área marrom representa a região em que os autovalores são reais indicando que o caso é hiperbólico, porém quatro deles são positivos e apenas um é negativo. Já a área azul representa a região em que os autovalores são reais gerando novamente um caso hiperbólico, entretanto três deles são positivos e dois negativos.

Em cada gráfico abaixo consta um ponto na cor vermelha, que identifica a região no mapa em que o caso estudado se encontra. Além disso, para cada caso foi analisada a hiperbolicidade com as condições na entrada e saída do duto, locais estes onde são impostas as condições de contorno. Na rotina de cálculo elaborada no Mathematica

(WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10) são fornecidos parâmetros como pressão, fração volumétrica de líquido e temperatura do fluido em cada caso, além das propriedades dos fluidos como massa específica do líquido, constante do gás e calores específicos a volume constante do gás e do líquido. Os casos estudados são:

- Caso ar e água utilizado para o estudo da malha:

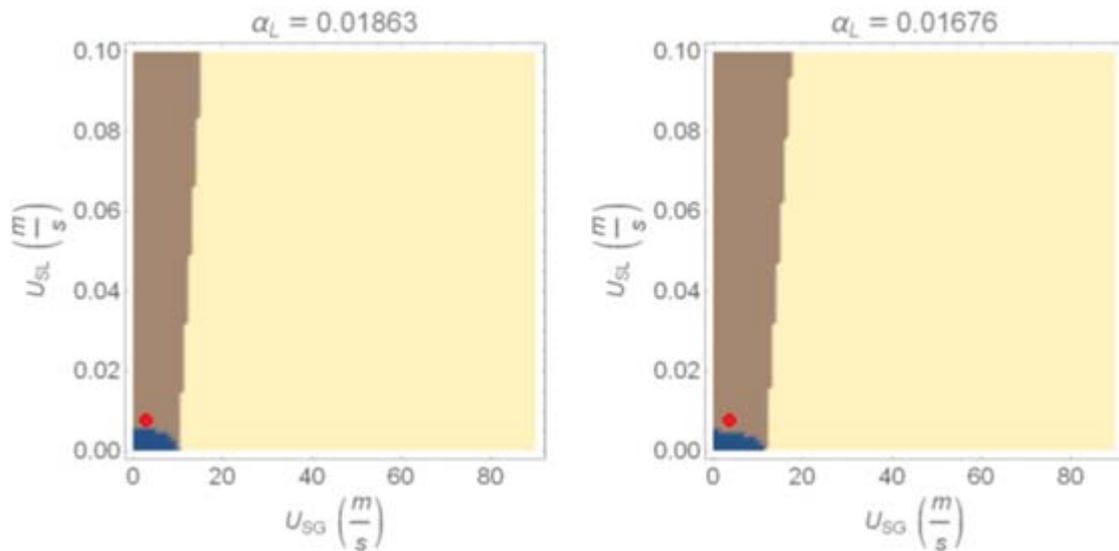


Figura A.1: Análise de hiperbolicidade para o caso do estudo da malha com ar e água. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso pouco líquido, ou seja, Fluidos Tipo 1 para comparação com OLGA:

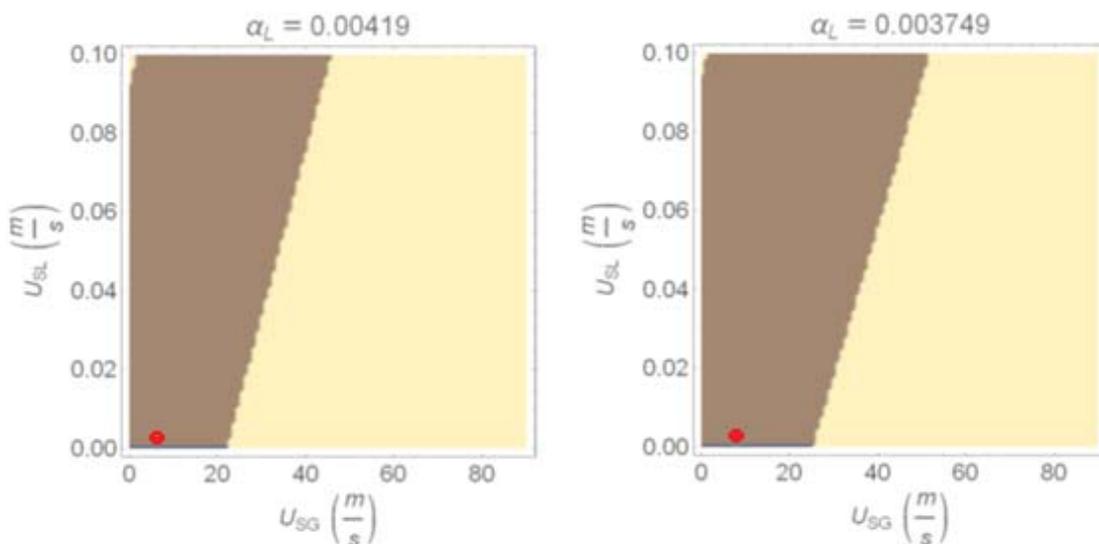


Figura A.2: Análise de hiperbolicidade para o caso fluidos Tipo 1. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso muito líquido, ou seja, Fluidos Tipo 2 para comparação com OLGA:

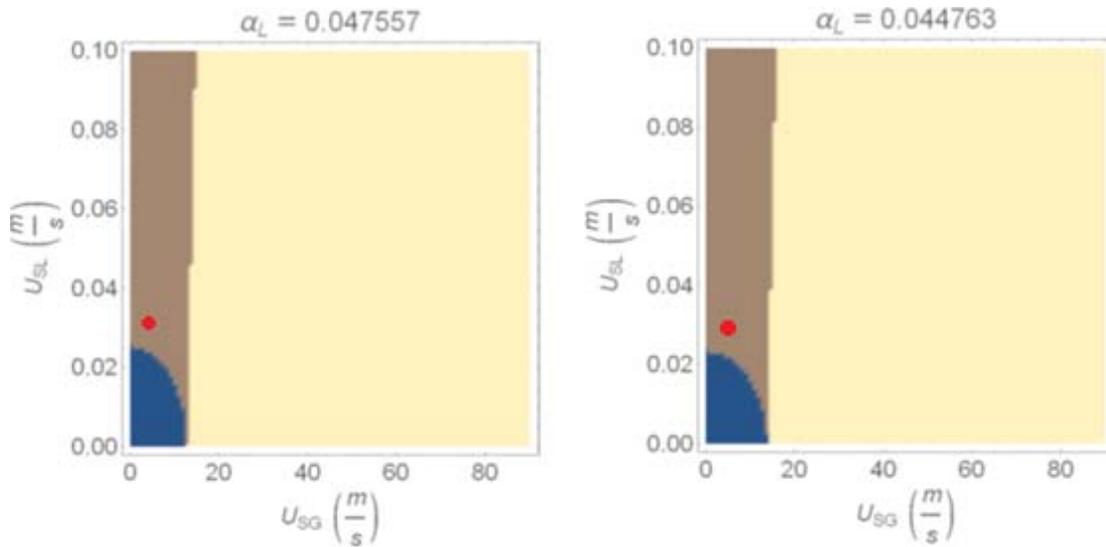


Figura A.3: Análise de hiperbolicidade para o caso fluidos Tipo 2. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso de validação da correlação de GHAJAR E TANG (2010) para fluxo constante na parede com duto de dimensões não reais:

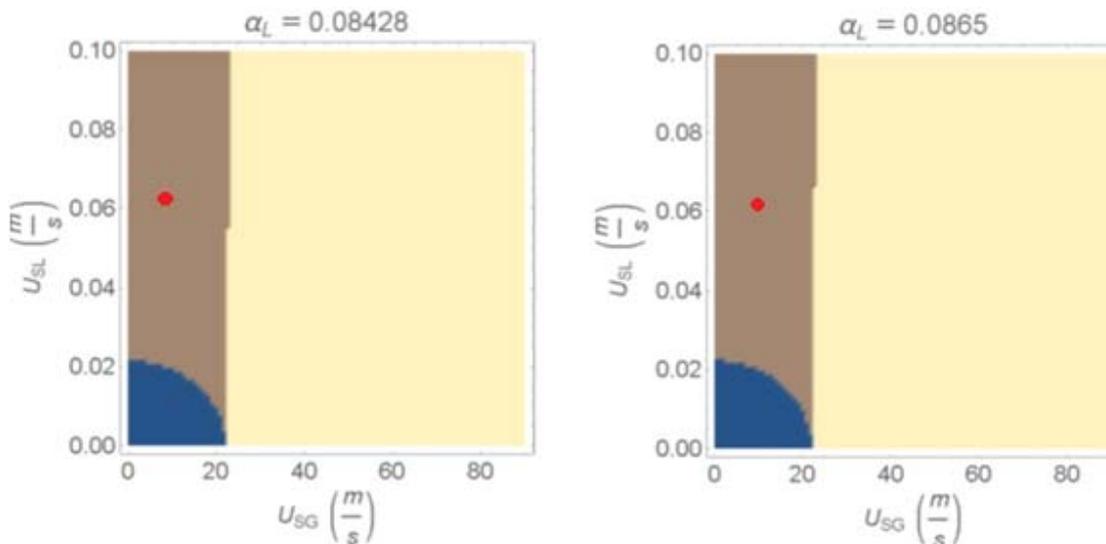


Figura A.4: Análise de hiperbolicidade para o caso da validação com correlação GHAJAR E TANG(2010) para fluxo prescrito com gasoduto de dimensões não reais. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso de validação da correlação de GHAJAR E TANG (2010) para fluxo constante na parede com gasoduto de dimensões reais:

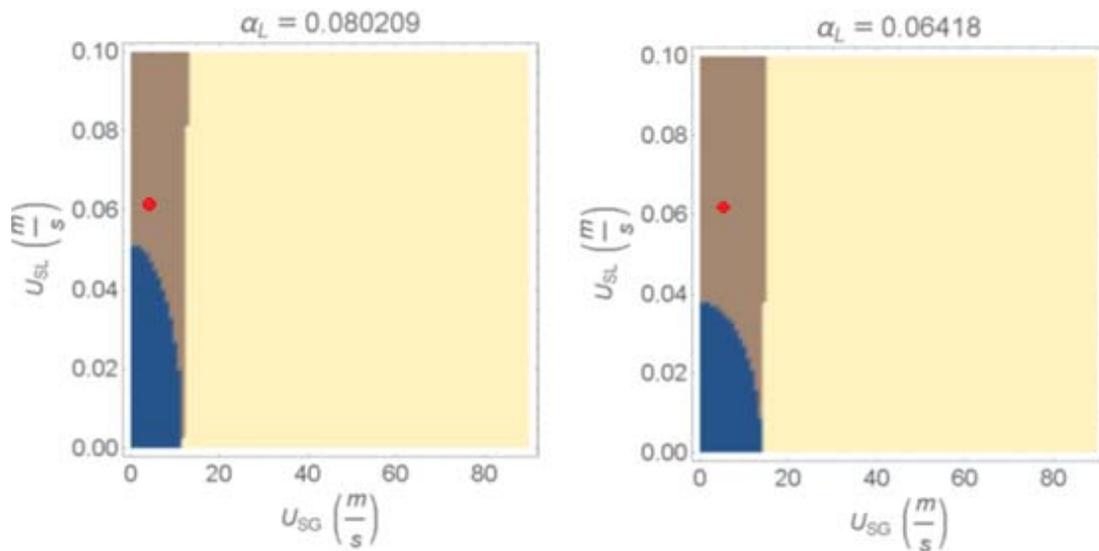


Figura A.5: Análise de hiperbolicidade para o caso da validação com correlação GHAJAR E TANG(2010) para fluxo prescrito com gasoduto de dimensões não reais. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso de validação da correlação de GHAJAR E TANG (2010) para temperatura constante na parede com gasoduto de dimensões reais:

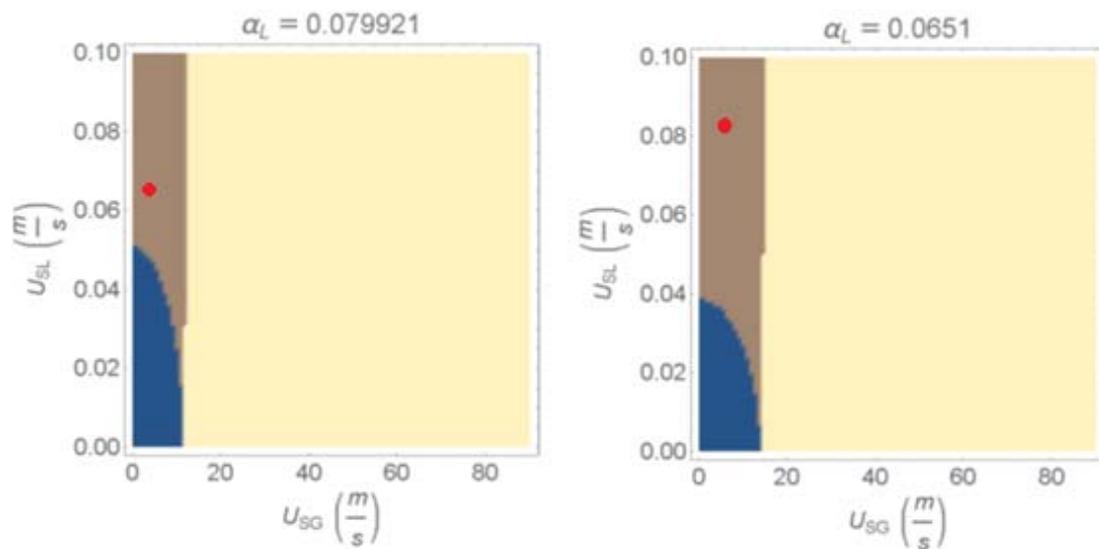


Figura A.6: Análise de hiperbolicidade para o caso da validação com correlação GHAJAR E TANG(2010) para temperatura constante com gasoduto de dimensões reais. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso da hipótese de escoamento isotérmico – Caso temperatura do ambiente igual à temperatura inicial do fluido, denominado quase-isotérmico:

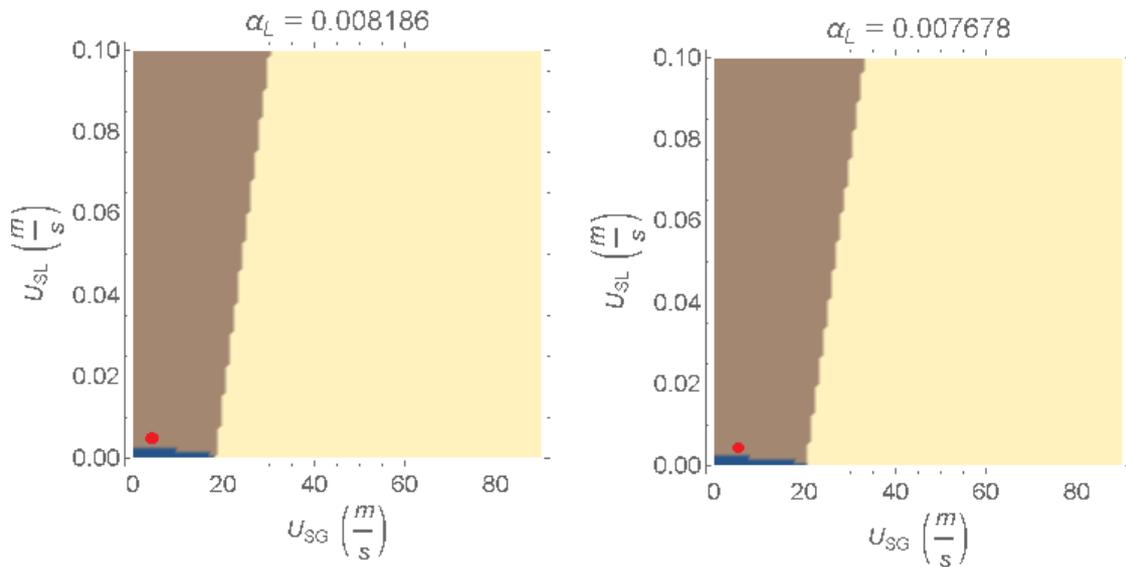


Figura A.7: Análise de hiperbolicidade para o caso da hipótese de escoamento isotérmico – Caso quase-isotérmico. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso da hipótese de escoamento isotérmico – Caso denominado não-isotérmico:

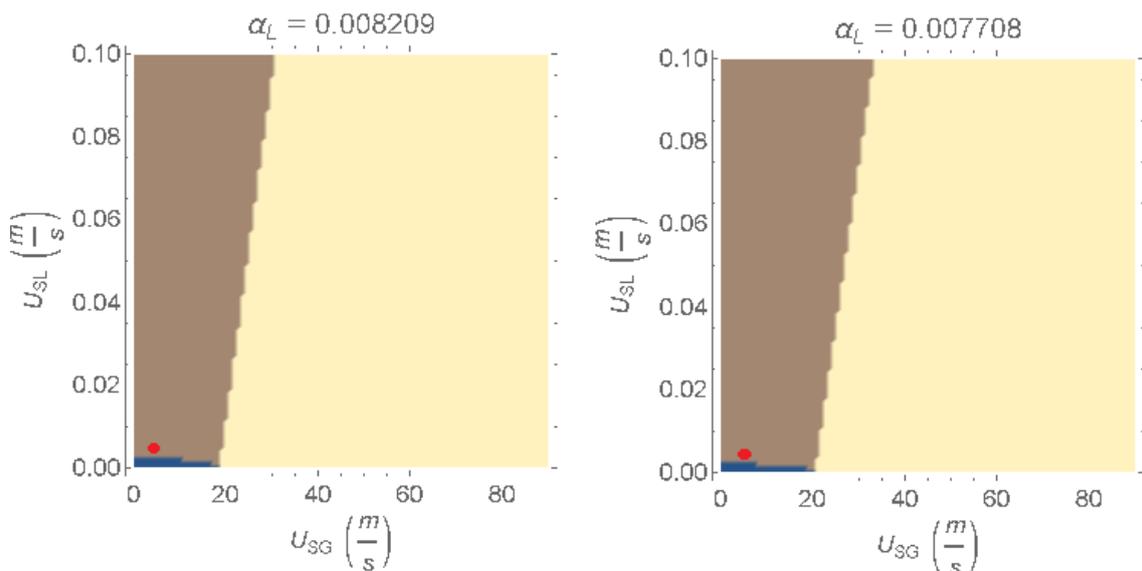


Figura A.8: Análise de hiperbolicidade para o caso da hipótese de escoamento isotérmico – Caso não-isotérmico. À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

Para todos os casos analisados neste trabalho, foi imposta a condição de contorno de quatro variáveis na entrada e uma na saída, visto que os pontos se encontram na região marrom dos gráficos. Esta análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição da condição de contorno também foi calculada em cada instante de tempo da simulação através de uma rotina implementada no FORTRAN para o cálculo dos autovalores.

Vale ressaltar a importância deste estudo da hiperbolicidade, visto que cada caso em particular se comporta de maneira diferente. E além disso, é possível identificar pelos gráficos apresentados, que dentro do padrão estratificado, a maior parte da região, para os casos estudados, é composta por autovalores complexos, o que restringe bastante a área que representa o sistema hiperbólico.

Observou-se também que os casos em que a fração volumétrica de líquido é menor, apresenta-se uma região hiperbólica mais ampla, se comparado com os casos em que a fração volumétrica é maior, para valores de pressão da mesma ordem de grandeza. Sendo assim, a hiperbolicidade do problema tende a sofrer maior influência pelas variações da pressão e a da fração volumétrica de líquido.

## Apêndice B. Dedução da Equação da Energia

A equação da energia é postulada como:

$$\dot{K} + \dot{U} = \dot{W}_{\text{ext}} + \dot{Q}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\dot{W}_{\text{ext}}$  é a potência dos esforços externos,  $\dot{K}$  é o termo referente a energia cinética,  $\dot{U}$  é o termo da energia interna térmica e  $\dot{Q}$  é o termo de calor. Utilizando o teorema da energia cinética:

$$\dot{K} + \dot{W}_{\text{int}} = \dot{W}_{\text{ext}}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $\dot{W}_{\text{int}}$  é a potência dos esforços internos.

Substituindo a Eq.(B.2) em Eq.(B.1):

$$\dot{U} = \dot{W}_{\text{int}} + \dot{Q}, \quad (\text{B.3})$$

No caso do modelo de Dois Fluidos escrito pelas Eqs.(3.3-3.6), para a fase  $k$ , tem-se:

$$\dot{K}_k = \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} \rho_k \alpha_k u_k^2 A dx + \left[ \frac{\rho_k \alpha_k u_k^2 u_k A}{2} \right]_a^b, \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{U}_k = \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_k \alpha_k e_k A dx + [\rho_k \alpha_k e_k u_k A]_0^L, \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{Q}_k = \int_0^L q_{ik}'' S_i dx + \int_0^L q_{wk}'' S_k dx + [q_k'' A_k]_{x=0} - [q_k'' A_k]_{x=L}, \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \int_0^L \rho_k \alpha_k g \text{sen}(\beta) u_k A dx, \quad (\text{B.7})$$

onde  $q''_{ik}$  é o termo de calor referente à interface,  $q''_k$  é o termo de calor referente à condução axial e  $q''_{wk}$  é o termo de calor trocado na parede por cada uma das fases.

Para o cálculo da potência dos esforços externos de superfície de natureza esférica, tem-se:

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \int_0^L \left( -\frac{\delta(\alpha_k p u_k)}{\delta x} + (p - p_{ck}) u_k \frac{\delta \alpha_k}{\delta x} + p \alpha_k \frac{\delta u_k}{\delta x} \right) A dx. \quad (\text{B.8})$$

Logo, reescrevendo a Eq. (B.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} \rho_k u_k^2 A dx + \left[ \frac{\rho_k u_k^2 u_k A}{2} \right]_0^L + \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_k e_k A dx + [\rho_k e_k u_k A]_0^L = \\ & \int_0^L \rho_k g \text{sen}(\beta) u_k A dx + \int_0^L \left[ -\frac{\delta(\alpha_k p u_k)}{\delta x} + (p - p_{ck}) u_k \frac{\delta \alpha_k}{\delta x} + p \alpha_k \frac{\delta u_k}{\delta x} \right] A dx + \\ & \int_0^L q''_{ik} S_i dx + \int_0^L q''_{wk} S_k dx + [q''_k A_k]_{x=0} - [q''_k A_k]_{x=L}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

A equação da energia escrita na forma final, utilizando o teorema fundamental do cálculo é:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left( \rho_k \alpha_k \left( e_k + \frac{1}{2} u_k^2 \right) \right)}{\partial t} + \frac{\partial u_k \left( \rho_k \alpha_k \left( e_k + \frac{1}{2} u_k^2 \right) + \alpha_k p \right)}{\partial x} = (p - p_{ck}) u_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + \\ & + p \alpha_k \frac{\delta u_k}{\delta x} + \alpha_k \rho_k g \text{sen}(\beta) u_k + \frac{q''_{wk} S_k}{A} + \frac{q''_{ki} S_i}{A} - \frac{\partial(\alpha_k q''_k)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Para este trabalho, foi considerado um modelo de temperatura única, ou seja, uma temperatura relacionada à mistura entre as fases. Desta forma, a equação da energia é reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\{(\rho_G\alpha_G E_G)+(\rho_L\alpha_L E_L)\}}{\partial t} + \frac{\partial\{u_G(\rho_G\alpha_G E_G + \alpha_G p) + u_L(\rho_L\alpha_L E_L + \alpha_L p)\}}{\partial x} = \\
& \frac{\partial\alpha_L}{\partial x}\{(p-p_{cL})u_L - (p-p_{cG})u_G\} + \alpha_G p \frac{\partial u_G}{\partial x} + \alpha_L p \frac{\partial u_L}{\partial x} + u_G B_{fG} + u_L B_{fL} + \\
& \frac{q''_{wG} S_k}{A} + \frac{q''_{wL} S_k}{A} - \frac{\partial(\alpha_G q''_G)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha_L q''_L)}{\partial x}, \tag{B.11}
\end{aligned}$$

onde:

$$E_k \equiv e_k + \frac{u_k^2}{2}. \tag{B.12}$$