



COPPE/UFRJ

ESTUDO NUMÉRICO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AEROFÓLIO
MONTADO EM UMA GRADE LINEAR DE TURBOMÁQUINA

Antônio Felipe Flutt

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Rio de Janeiro
Setembro de 2008

ESTUDO NUMÉRICO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AEROFÓLIO
MONTADO EM UMA GRADE LINEAR DE TURBOMÁQUINA

Antônio Felipe Flutt

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Hélcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

Prof. Luiz Antonio Alcântara Pereira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2008

Flutt, Antônio Felipe

Estudo Numérico do Escoamento ao Redor de um Aerofólio Montado em uma Grade Linear de Turbomáquina/
Antônio Felipe Flutt. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2008.

IX. 119p.: il.: 29,7 cm

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2008.

Referências Bibliográficas: p. 105-108.

1. Método dos Painéis. 2. Grade Linear. 3. Turbomáquinas.

I. Bodstein, Gustavo César Rachid. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica.

III. Título.

A meus Pais
(In Memoriam)

AGRADECIMENTOS

A elaboração de uma Dissertação de Mestrado é um trabalho árduo, de muito esforço, dedicação e superação. Representa o final de um ciclo e, como tudo na vida, o início de outro. Fruto de orgulho de seu autor, mais do que tudo, sua conclusão transmite uma grande sensação de alívio para os que o cercam.

Engana-se aquele que vislumbra uma produção intelectual como um trabalho individual, solitário e abnegado, como a imagem que o beneditino de Olavo Bilac transparece, no aconchego de seu claustro. A conclusão dessa obra não seria possível sem o apoio daqueles que me cercam e que, agora, externo-lhes minha gratidão, tecendo meus agradecimentos.

Em primeiro lugar, à minha esposa, Jaqueline e aos meus filhos, Luiz Antônio e Flávio Antônio, pelo apoio, compreensão, carinho e sacrifícios por eles empreendidos durante essa jornada.

À Petrobras, empresa onde trabalho, pelo incentivo ao desenvolvimento pessoal e profissional, capitalizado pela Universidade Petrobras, equipe da qual tenho imenso orgulho em fazer parte.

A meus colegas e verdadeiros amigos, que juntos trilharam essa jornada, pelo estímulo, ajuda e cumplicidade, quer no sucesso, quer nos infortúnios que, por ventura, enfrentamos. Em especial, aos amigos Marcus Vinícius da Silva Neves e Marco Antonio Haikal Leite.

Um especial agradecimento é devido a meu Orientador e amigo, Gustavo César Rachid Bodstein, por sua capacidade, conhecimento, compreensão e, acima de tudo, enorme paciência.

Por fim, não posso deixar de agradecer a um amigo muito especial, por quem tenho profunda admiração, cujo exemplo procuro seguir e que é o maior responsável por todo o sucesso que tenho obtido desde que o conheci: Paulo Sérgio Barbosa Rodrigues. Muito obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc)

ESTUDO NUMÉRICO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AEROFÓLIO MONTADO EM UMA GRADE LINEAR DE TURBOMÁQUINA

Antônio Felipe Flutt

Setembro/2008

Orientador: Gustavo César Rachid Bodstein

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho desenvolve-se uma metodologia para o estudo numérico de um escoamento invíscido, bidimensional, incompressível e em regime permanente, através de uma grade linear de uma turbomáquina. O algoritmo empregado utiliza o Método dos Painéis para a obtenção da solução do problema potencial, através da realização de simulações que contemplam, desde o estudo inicial do escoamento ao longo de um único perfil aerodinâmico de referência, até diversas configurações de montagem da grade linear. Cada etapa da implementação do método é amplamente discutida e detalhada, com fundamentação teórica nas equações constitutivas da Mecânica dos Fluidos. São utilizados perfis simétricos, como o aerofólio de Van der Vooren e o perfil NACA 0012 para a validação do método e o perfil NACA 65-410 para representar a grade linear infinita, visto sua ampla aplicação em compressores axiais. Utiliza-se o conceito de periodicidade do escoamento na direção transversal para resumir a análise ao escoamento através de um único perfil aerodinâmico da grade linear. Os resultados obtidos são comparados com dados experimentais e simulações semelhantes existentes na literatura. São analisados parâmetros fundamentais do escoamento, como campo de pressões, cargas aerodinâmicas e ângulo de deflexão da grade. Conclui-se pela necessidade de desenvolvimento de um método adaptado para lidar com perfis de bordo de fuga muito esbeltos, exemplificado através de uma técnica desenvolvida nessa dissertação.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

NUMERICAL STUDY OF FLOW AROUND AN AIRFOIL ASSEMBLED IN
TURBOMACHINE LINEAR CASCADE

Antônio Felipe Flutt

September/2008

Advisor: Gustavo César Rachid Bodstein

Department: Mechanical Engineering

This work presents a numerical method dedicated to the study of no-viscous, two-dimensional, incompressible, steady flows through a linear turbomachinery cascade. A numerical algorithm using the Panel Method to solve the potential problem is developed to carry out simulations covering from flow past an isolated airfoil to a wide range of blade row cascade configurations. Each step of the numerical method is discussed in detail, based on theoretical background provided by the Fluid Mechanics equations. Symmetrical airfoils are used, like Van der Vooren and NACA 0012, in order to validate the method. The NACA 65-410 airfoil is also employed as an elementary cell of an infinite blade row, because of its usage in turbomachinery applications. The normal flow periodicity along the cascade leads the study to the flow past an isolated airfoil. Results are compared with experiments and similar simulations found in the literature. The analysis involves fundamental parameters of the flow, as the pressure distribution, the aerodynamics loads on the airfoil surface and the cascade deflection angle. The conclusion is the need of the development of an adapted method to deal with airfoils with thin trailing edge, which is carried out in this study.

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução	1
1.1 Motivação.....	3
1.2 Objetivos.....	4
Capítulo 3 – Revisão Bibliográfica	6
2.1 Teoria das Máquinas de Fluxo.....	6
2.2 Método dos Painéis.....	7
2.3 Outros Métodos de Análise.....	8
Capítulo 2 – Máquinas de Fluxo	12
3.1 Conceituação e Classificação.....	12
3.2 Relação Máquina – Sistema.....	13
3.3 Máquinas Axiais.....	14
3.3.1 Compressores Axiais.....	14
3.3.2 Bombas Axiais.....	16
3.3.3 Turbinas a Vapor.....	16
3.4 Teoria Clássica.....	18
3.4.1 O Estágio Axial e o Diagrama de Velocidades.....	19
3.4.2 O Processo de Difusão – O Problema da Compressão.....	20
3.4.3 Equação de Euler.....	21
3.4.4 Triângulos de Velocidade Combinados.....	22
3.4.5 Performance – Curva “ Head-Vazão” de um Compressor Axial.....	24
3.4.6 Peculiaridades de uma Turbomáquina Axial Real.....	25
Capítulo 4 –Escoamento Potencial	27
4.1 Modelagem de Problemas em Mecânica dos Fluidos.....	27
4.1.1 Derivada Material.....	28
4.1.2 Equações Constitutivas.....	28
4.1.3 Princípio da Conservação da Massa.....	28
4.1.4 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear.....	29
4.2 Escoamento Potencial.....	31
4.3 Limitações da Teoria Potencial.....	34
4.4 Vórtices Singulares e Vórtices Reais.....	36
4.5 Modelo Físico – Matemático.....	39
4.5.1 Geometria e Região Fluida.....	39

4.5.2	Hipóteses Simplificadoras da Formulação Matemática.....	41
4.5.3	Formulação Matemática do Problema de Valores de Contorno.....	41
4.5.4	Adimensionalização do Problema de Valores de Contorno Proposto.....	42
4.5.5	Formulação do Problema Potencial.....	43
Capítulo 5 – Método dos Painéis – Fundamentos Teóricos e Implementação.....		47
5.1	Introdução.....	47
5.2	Discretização da Geometria.....	50
5.2.1	Singularidades.....	55
5.3	Determinação da Matriz de Influência e Solução da Equação Matricial.....	61
5.3.1	Método de Lewis (Lewis, 1991).....	61
5.3.2	Método de Katz & Plotkin (Katz & Plotkin, 2001).....	66
5.3.3	Método Linear Adaptado.....	68
5.3.4	A Condição de Kutta.....	75
5.4	Cargas Aerodinâmicas e Coeficientes de Pressão.....	79
Capítulo 6 – Resultados e Discussões.....		82
6.1	Sumário de Simulações.....	83
6.2	Escoamento ao Redor de um Único Perfil Aerodinâmico.....	84
6.2.1	Aerofólio de Van der Vooren.....	85
6.2.2	Perfil NACA 0012.....	87
6.2.3	Perfil NACA 65-410.....	88
6.3	Escoamento ao Redor de uma Grade Linear de Turbomáquina.....	92
6.3.1	Aerofólio de Van der Vooren.....	93
6.3.2	Perfil NACA 0012.....	94
6.3.3	Perfil NACA 65-410.....	95
Capítulo 7 – Conclusões e Sugestões.....		102
Referências Bibliográficas		105
Apêndice A – Sistemas de Eixos Coordenados para Grades Lineares.....		109
Apêndice B – Distribuição Linear de Vorticidade.....		113
Apêndice C – Dados Experimentais.....		116

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

As máquinas de fluxo desempenham importante papel nas indústrias de processamento de fluidos, como refinarias, petroquímicas e indústrias químicas em geral. Normalmente são equipamentos de alto custo e cujo desempenho interfere decisivamente no comportamento global da planta industrial em que estão inseridos.

Pode-se afirmar que, relativamente ao projeto e fabricação dessas máquinas, os esforços empreendidos pelos fabricantes nas últimas décadas levaram a uma acentuada melhora em suas características de desempenho, através de um excelente grau de otimização de “*design*” e avanços nas tecnologias de fabricação. Para isso muito contribuiu o desenvolvimento de ferramentas de simulação do escoamento interno do fluido, possibilitado pelo avanço nas metodologias de análise e pela utilização de computadores de alta capacidade de processamento. As ferramentas empíricas e semi-empíricas de desenvolvimento estão sendo continuamente substituídas e/ou aperfeiçoadas através de métodos modernos de simulação numérica dos fenômenos associados à movimentação do fluido utilizando esses equipamentos.

O termo CFD (“Computational Fluid Dynamics”), utilizado como uma referência genérica aos inúmeros métodos e ferramentas computacionais para simulação numérica de escoamentos, já saiu dos meios acadêmicos para ser definitivamente incorporado ao vocabulário dos engenheiros da indústria, tanto de projeto, como de aplicação. Essa popularização deve-se, em muito, ao surgimento de “softwares” comerciais com esse fim. Porém, mesmo para o uso desses “softwares”, é necessário que se entenda e domine o que existe por trás de seu desenvolvimento. Só assim o profissional poderá fazer um uso adequado e eficaz dos resultados obtidos, pois a capacidade de análise crítica faz-se essencial.

Neste trabalho busca-se a simulação do escoamento bidimensional e incompressível através de perfis aerodinâmicos montados em uma grade linear de uma turbomáquina axial. Trata-se de um estudo que visa a melhor compreensão do método numérico, suas potencialidades e deficiências, além das metodologias que vêm sendo desenvolvidas para seu aperfeiçoamento. Em função de se vislumbrar grande aplicabilidade dessa ferramenta de análise de escoamentos em turbomáquinas, seja na solução de problemas, análise de falhas, aumento da eficiência, ou na previsão de seu comportamento e desempenho, deseja-se que esse

trabalho se constitua em uma contribuição para o desenvolvimento de turbomáquinas na indústria.

Para o estudo proposto, existem duas maneiras básicas de abordagem no âmbito da Mecânica dos Fluidos: a descrição de Lagrange e a descrição euleriana do escoamento. Em função do paradigma escolhido, diferenças quanto às etapas da análise fazem-se presentes, quer quanto ao algoritmo de solução do modelo matemático, quer quanto às técnicas utilizadas para a discretização do domínio, condições de contorno e definição da região de interesse que influencia na simulação.

Métodos eulerianos são muito úteis na solução de problemas de forma analítica em Mecânica dos Fluidos. Nesse caso, são definidas no escoamento grandezas de campo como função da posição no espaço e do tempo. Muitos métodos numéricos de simulação também são baseados nessa descrição de campo, onde as técnicas numéricas são utilizadas na solução das equações governantes do escoamento em questão. Como exemplo, têm-se: Método dos Volumes Finitos, Método das Diferenças Finitas, entre outros. A característica fundamental desse grupo reside na exigência da modelagem da região fluida através de malhas, que definem sub-regiões para as quais serão determinadas as funções de campo. O “software” comercial CFX[®], hoje associado ao Ansys[®], segue essa linha de abordagem, muito usual.

O Método dos Painéis associado ao Método de Vórtices faz parte de um grupo maior de métodos que se utilizam uma descrição de Lagrange do escoamento, ou seja, as “partículas” (elementos de fluido) são identificadas e acompanhadas individualmente, conforme a evolução do escoamento no tempo. O Método de Painéis, dentre os métodos de simulação numérica, é adequado à resolução do problema potencial e se caracteriza por adotar uma representação da geometria do perfil estudado por uma série de painéis retos ou curvos, sobre os quais se distribuem singularidades para simular os fenômenos físicos que ocorrem em sua superfície. A solução potencial para o regime permanente é, então, obtida através do cálculo da interação entre os painéis e sua influência na região fluida.

Não é difícil concluir que a qualidade da simulação dependerá, no caso euleriano, do refinamento da malha e, no outro caso, do número de painéis utilizados, o que, em qualquer um dos métodos, traduz-se em um esforço computacional crescente, em função do aumento da capacidade de processamento requerida.

É importante ressaltar que as ferramentas globais de análise não podem ser deixadas de lado, pois fazem parte do dia-a-dia do engenheiro de aplicação de máquinas na indústria. Sendo assim, sempre se fará referência nesse texto às técnicas clássicas consolidadas para projeto e avaliação de turbomáquinas a partir de parâmetros globais, teóricos ou semi-empíricos. Em função desse enfoque, podem-se mensurar os ganhos relativos com a simulação numérica, além de serem destacadas as aplicações onde se concentram as melhores relações custo-benefício para que se direcionem os esforços de simulação.

A abordagem escolhida para essa dissertação parte da modelagem físico-matemática apresentada inicialmente por MARTENSEN (1957), para implementar um novo algoritmo de simulação numérica baseado em KATZ & PLOTKIN (2001) e em SILVA (2005), com variações no método para a solução potencial que contemplem distribuição linear de singularidade aplicada a uma grade linear de turbomáquina. A validade da metodologia é analisada através da comparação dos resultados obtidos com outras abordagens de simulação existentes na literatura e com dados experimentais. Com isso, buscam-se alternativas à análise teórica simplificada, até hoje amplamente utilizada, denominada classicamente por Teoria de Euler.

1.1 MOTIVAÇÃO

Embora o estudo e a determinação dos parâmetros globais do escoamento sejam suficientes para uma abordagem simplificada do projeto de uma máquina de fluxo, análises de seus transientes de partida e parada e compreensão de problemas relativos a instabilidades do escoamento, a quantidade e qualidade das informações obtidas mostram-se deficientes e incompletas. Também, mesmo para o regime permanente, há a necessidade da utilização de diversas correções, através de correlações experimentais, que variam de acordo com o tipo de máquina e do método experimental empreendido para as obter.

A utilização de teorias e ferramentas de Mecânica dos Fluidos Computacional,, encontra, assim, um vasto campo de aplicação, ainda mais quando associada às teorias semi-empíricas desenvolvidas ao longo de anos. Mas, para que esse tipo de abordagem gere resultados confiáveis, é necessário que a solução potencial seja obtida de forma estável e bem condicionada, como será discutido ao longo desse texto.

Além de proporcionarem um maior conhecimento e domínio dos parâmetros determinantes no comportamento dessas máquinas, os métodos numéricos de análise do escoamento interno que se processa seja em uma turbina, uma bomba ou um compressor, representam uma poderosa ferramenta à disposição dos engenheiros. Com sua utilização, grandes avanços podem ser obtidos, tanto na busca da otimização de projeto, resultando em equipamentos cada vez mais eficientes e robustos, como na solução de problemas de máquinas existentes, com expressiva economia em comparação com métodos empíricos.

Assim se justifica o crescente interesse de pesquisadores sobre o tema. O objetivo precípuo das teses e estudos na área consiste no desenvolvimento de métodos confiáveis, com alto grau de precisão, aliados a uma redução de custo computacional através da utilização de algoritmos otimizados. Pode-se afirmar que, a cada artigo, tese ou dissertação publicados ou defendidos, grandes passos são dados no desenvolvimento e consolidação desses métodos.

1.2 OBJETIVOS

Dentro desse contexto, busca-se, no presente trabalho, uma solução para o escoamento potencial do problema estudado e, com isso, domínio dos métodos aplicados em simulações transientes que podem ser obtidas através dos chamados métodos de partículas, como o Método de Vórtices (LEWIS, 1991).

Podem-se, assim, enumerar as metas almeçadas da seguinte forma, em uma seqüência associada ao processo de desenvolvimento e conclusão da dissertação:

- a) Aprofundamento dos conhecimentos no campo de simulação numérica de escoamentos aplicados a turbomáquinas;
- b) Utilização do Método dos Painéis na solução do problema de escoamento através de uma grade linear de uma turbomáquina axial, envolvendo todas as etapas, a saber: modelagem, desenvolvimento do algoritmo para solução, implementação numérica, comparação com resultados de simulações semelhantes, além da análise dos resultados confrontados com dados experimentais existentes na literatura;

- c) Estabelecimento das potencialidades do método utilizado e proposição de refinamentos que possam orientar futuros trabalhos;

Para que a simulação nos moldes propostos fosse possível, tornou-se premente a criação de um método matemático que permitisse a aplicação de uma distribuição linear de vorticidade sobre a superfície do perfil de referência estudado. Essa técnica encontra-se detalhada no corpo desse trabalho e pode ser considerada como uma contribuição original para superar as dificuldades analíticas inerentes à metodologia de implementação.

A partir de uma revisão da literatura existente sobre as máquinas de fluxo e métodos numéricos de análise do escoamento que nelas se processa feita no capítulo seguinte, apresenta-se, no capítulo 3, a teoria clássica das máquinas de fluxo com o detalhamento da equação de Euler para a obtenção de uma relação funcional entre a energia por unidade de massa transferida por estágio de uma turbomáquina, sua rotação e vazão volumétrica desenvolvida. O capítulo 4 contém o desenvolvimento da formulação física e matemática relacionada ao escoamento potencial, em que se baseia o Método dos Painéis. Inicialmente estuda-se a metodologia de análise do escoamento através de um único perfil aerodinâmico para, em seguida, estender-se a análise para uma grade linear de turbomáquina. No capítulo 5, detalha-se a técnica numérica utilizada para a obtenção dos resultados apresentados no capítulo 6, onde esses são discutidos. Por fim, no capítulo 7, tem-se o fechamento dessa dissertação, com as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Há, atualmente, uma extensa literatura disponível a respeito do desenvolvimento e aplicação de métodos numéricos para estudo de escoamentos ao redor de perfis esbeltos ou rombudos. Também, em relação às máquinas de fluxo e, em especial, às turbomáquinas, é crescente o número de publicações que abordam desde a teoria clássica, até estudos complexos sobre o escoamento que se processa em seu interior. Isso se deve à grande importância dessa classe de máquinas para a indústria. Neste capítulo, procuram-se destacar os principais artigos e publicações relacionados ao tema, principalmente aqueles diretamente relacionados com as turbomáquinas. De uma forma didática e consoante com os objetivos dessa dissertação, podem-se dividir as obras em três grandes grupos: Teoria das Turbomáquinas, Método dos Painéis e demais Métodos Numéricos de Análise.

2.1 TEORIA DAS MÁQUINAS DE FLUXO

Em relação à teoria clássica de turbomáquinas, em meio a um grande número de títulos, com os mais diferentes enfoques, destacam-se algumas obras básicas, através das quais pode-se ter uma visão sistêmica e estruturada do assunto. Dentre essas, citam-se o livro de Compressores Industriais (RODRIGUES, 1991), Compressor Technology e Steam Turbine Technology (BLOCH, 2006 e 1996, respectivamente) e Centrifugal and Axial Flow Pump (STEPANOFF, 1957). Sobre turbinas a gás, uma publicação da Universidade de Cranfield (RAMSDEN *et al.*, 2006), utilizada em cursos regulares daquela instituição, apresenta uma abordagem bem apropriada no que se refere aos parâmetros de projeto e de desempenho desse tipo de equipamento. LEWIS (1996), apresenta uma valiosa obra, fruto de inúmeros anos de pesquisa, onde procura construir uma técnica universal de análise de desempenho de turbomáquinas, associando métodos teóricos, experimentais e numéricos.

É importante ressaltar nesse ponto que, com o crescente avanço tecnológico das máquinas de fluxo, a bibliografia relativa ao estudo desses equipamentos tornou-se menos pública, uma vez que tais desenvolvimentos saíram dos muros universitários e passaram a ser propriedade intelectual das companhias fabricantes, onde o conhecimento técnico passou a ser um diferencial na conquista do mercado, extremamente competitivo.

2.2 MÉTODO DOS PAINÉIS

Na dissertação de mestrado de SILVA (2005) são apresentadas, de forma resumida e organizada, as principais publicações referentes à evolução das metodologias de análise relacionadas ao Método dos Painéis e de outros métodos numéricos. Baseado nessa compilação, destacam-se aquelas que podem ilustrar um breve histórico do desenvolvimento das técnicas de análise.

De acordo com LEWIS (1991), a publicação que pode ser considerada como o verdadeiro marco inicial no campo de desenvolvimento de técnicas numéricas baseadas no método dos painéis, fazendo a discretização do contorno entre o corpo e o meio fluido através de singularidades representadas por uma distribuição de vorticidade, foi o trabalho de MARTENSEN (1959). Além de lançar as bases de poderosa ferramenta computacional fundamentada na resolução de sistemas de equações lineares, estendeu a aplicação da teoria potencial para a determinação da distribuição de velocidades do escoamento em grades de turbomáquinas compostas de aerofólios delgados.

O trabalho de MARTENSEN (1959) tem seu grande valor na fundamentação física e matemática, onde demonstra a unicidade e continuidade da solução de equações integrais de segunda ordem, a implementação da solução numérica através da resolução de sistemas de equações lineares e a introdução do conceito da periodicidade para a análise de escoamentos através de grades de aerofólios. Devido às limitações computacionais e ao uso de algoritmos ainda pouco otimizados, os resultados careciam de acurácia quando da necessidade de uma discretização mais refinada. Mas, ao invés de um problema, isso resultou na motivação de pesquisadores que o sucederam para o desenvolvimento do método.

Outra importante contribuição no desenvolvimento dessa área é o trabalho de HESS & SMITH (1966), onde os autores abordam o cálculo de escoamentos potenciais através de diversas geometrias. HESS (1973) analisou a precisão do método dos painéis de distribuição constante para escoamentos bidimensionais modelados através de fontes e sumidouros e também examinou a possibilidade de aumentar a taxa de convergência com singularidades de ordem superior, para o qual o efeito de curvatura é incluído. BELLAMY-KNIGHTS *et al.* (1988) também estudaram as propriedades de convergência do Método dos Painéis, considerando tanto a continuidade da distribuição de singularidades quanto a curvatura do corpo.

Desde então, várias extensões e desenvolvimentos foram realizados. Podemos dizer que a evolução de método consolida-se com a publicação do livro de KATZ & PLOTKIN (2001), obra que pode ser considerada básica e de referência de toda a teoria envolvida na solução de problemas de Aerodinâmica através da Teoria Potencial com a utilização do Método dos Painéis. Não obstante, o livro de LEWIS (1991) que trata, em sua primeira parte, de escoamentos potenciais ao redor de aerofólios e grades lineares de turbomáquinas, apresenta técnicas bem consistentes, com ótimos resultados, mesmo utilizando singularidades de ordem inferior, como vórtices concentrados no ponto médio dos painéis.

Dentre os estudos nacionais que serviram como base para a elaboração do presente trabalho e que apresentam importantes contribuições para o desenvolvimento do método, devem-se citar os trabalhos de GOMES PEREIRA *et al.* (2004), com uma análise sistemática de diversas possibilidades de escolha de singularidades e suas formas de distribuição, ampliado em GOMES PEREIRA & BODSTEIN (2004), através de métodos com função de distribuição quadrática. No ano seguinte, a dissertação de mestrado de GOMES PEREIRA (2005) complementa o estudo com a análise detalhada do desempenho do Método dos Painéis de ordem superior no cálculo do escoamento ao redor de um aerofólio.

2.3 OUTROS MÉTODOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE

Uma obra que pode ser considerada como básica e consolidadora de toda a teoria envolvida na análise de escoamentos através de métodos lagrangianos, orientando o seu desenvolvimento e sistematização é o já mencionado livro de LEWIS (1991). Nele encontra-se didaticamente apresentado o desenvolvimento do Método de Vórtices Discretos e sua importante aplicação no estudo dos escoamentos através de grades lineares de turbomáquinas. Nesse contexto pode-se ainda destacar o livro de COTTET & KOUMOUTSAKOS (2000), onde se encontra detalhadamente a fundamentação matemática para a implementação do Método de Vórtices Discretos.

O Método dos Vórtices, dentre os métodos lagrangianos de análise de escoamento, apresenta-se como o que melhor se adapta à modelagem de escoamentos viscosos ao redor de corpos de geometria as mais variadas. Embora, inicialmente, a discretização da superfície de contorno de um corpo de geometria

variável através de elementos de vórtices tenha sido estudada e aplicada a escoamentos potenciais, a aplicação desses elementos se faz natural no estudo de escoamentos rotacionais, no que concerne à camada limite e à convecção e difusão da vorticidade presente. Os métodos desenvolvidos, denominados de “nuvem de vórtices” ou “vórtices discretos”, representam, fisicamente, a abordagem mais natural para o tratamento de escoamentos de fluidos reais.

Faz-se, a seguir, referência aos principais trabalhos para a fundamentação e desenvolvimento dessa teoria, com o intuito de permitir uma breve visão da evolução histórica das técnicas aplicadas.

O trabalho de ROSENHEAD (1931), historicamente, é considerado como a primeira tentativa de aplicação do método dos vórtices discretos em modelagem de escoamento viscoso. Seu estudo analisa a instabilidade de Kelvin-Helmholtz em escoamentos sobre folhas de vórtices.

CHORIN (1973) e LEONARD (1985) dedicam-se ao desenvolvimento de metodologias para a simulação numérica da evolução da vorticidade em um meio fluido (essência do método). Ao primeiro credita-se a simulação da difusão viscosa através do Método do Avanço Randômico, baseado na concepção do movimento Browniano de Einstein.

LEWIS (1981) associa o Método de Vórtices com o Método dos Painéis, facilitando a extensão daquele para geometrias mais complexas. Neste trabalho, simula-se o processo de separação, mas os efeitos da difusão de vorticidade na esteira são ignorados.

PORTHOUSE & LEWIS (1981) adicionam o avanço randômico no modelo com o Método dos Painéis, uma evolução do anterior.

LEWIS (1989) apresenta um esquema básico para a aplicação do Método de Vórtices Discretos em perfis aerodinâmicos dispostos em grades lineares, como uma adaptação do seu algoritmo desenvolvido para corpos isolados. A abordagem feita considera uma grade linear contendo infinitos aerofólios idênticos e assume que, a camada limite e a esteira viscosa desenvolvidas em cada um destes aerofólios são idênticas. Sendo assim, torna-se suficiente analisar o escoamento sobre um perfil aerodinâmico de referência da grade.

LEWIS (1991), em seu livro já referenciado, trata da geração de vorticidade na superfície do corpo e seu subsequente desprendimento na esteira, indicando algoritmos para simulação e apresentando programas utilizados. Constitui-se numa consolidação sistematizada de diversas iniciativas anteriores.

PUCKETT (1993) resume os fundamentos do Método de Vórtices e apresenta o algoritmo conhecido como Expansão em Multipolos, que resulta em uma redução considerável no custo computacional. Até então, todos os trabalhos até aqui mencionados utilizavam a Lei de Biot-Savat modificada para o cálculo da interferência mútua entre vórtices da nuvem que representa a parcela dominante dos esforços computacionais requeridos.

A tese de doutorado de PEREIRA (2002) e a publicação decorrente (PEREIRA *et al.*, 2004), onde o escoamento ao redor de uma grade linear de turbomáquina utilizando função de interferência de grade, é analisado com o Método dos Painéis de LEWIS (1991) e um Método de Vórtices com modelagem de turbulência via Função Estrutura de Velocidade de segunda ordem, mostra resultados promissores.

SILVA (2005) elabora modelos matemáticos e numéricos para estudar o escoamento ao redor de um perfil aerodinâmico, utilizando-se para este fim o Método de Vórtices Discretos. Concentra-se em escoamento bidimensional, transiente e incompressível ao redor de perfis aerodinâmicos. O Seu trabalho procura associar os métodos de vórtices e painéis para simulação numérica de escoamentos ao redor de aerofólios, obtendo bons resultados e interessantes conclusões, de acordo com os algoritmos implementados. Silva utiliza o Método dos Painéis para simular a contribuição de um corpo de geometria arbitrária no escoamento.

Muitos avanços e refinamentos do método continuam sendo realizados, o que demonstra sua constante evolução e ampliação das aplicações. Do ponto de vista computacional, alguns trabalhos merecem destaque em função da criação e otimização de algoritmos que minimizam os cálculos necessários, principalmente em relação ao algoritmo convectivo, que representa o maior esforço computacional do método. Nesta classe citamos GREENGARD & ROKHLIN (1987) e BARNES & HUT (1986).

Dentre os trabalhos de revisão da metodologia, podemos citar, além dos livros já mencionados: SARPKEYA (1989 e 1994), que possui grande valor didático pela sua extensa e detalhada compilação de esquemas numéricos e aplicações, além de ilustrar e discutir os avanços recentes na implementação das técnicas; LEWIS (1999) em trabalho complementar ao seu livro revisa a metodologia do Método de Vórtices Discretos com exemplos de aplicação; KAMEMOTO (2004), que apresenta um resumo das aplicações do Método de Vórtices em problemas práticos de Engenharia, mostrando suas potencialidades.

Em suma, o Método de Vórtices aplicado para perfis aerodinâmicos em grades de turbomáquinas apresenta uma grande potencialidade, sendo visto como uma ferramenta bastante promissora para a análise de diversos problemas. Fenômenos tais como “*stall*”, instabilidade fluido-dinâmica e escoamentos transientes na partida e parada do equipamento podem ser estudados através das técnicas desenvolvidas. Uma vez que tal técnica utiliza o Método dos Painéis na discretização da geometria e na geração dos vórtices nascentes, dentre outros cálculos, é necessário que a solução potencial seja conhecida. Dificuldades apresentam-se quando do estudo de perfis aerodinâmicos com bordo de fuga muito delgado, quando a simulação carece de convergência (SILVA, 2005). Neste ponto reside o maior interesse no conhecimento e domínio da metodologia discutida no presente trabalho. Deseja-se obter uma solução do problema potencial através do Método dos Painéis que contemple os perfis típicos utilizados em turbomáquinas, permitindo uma futura simulação com inserção dos efeitos viscosos.

CAPÍTULO 3 **MÁQUINAS DE FLUXO**

3.1 CONCEITUAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO

A partir da maioria das publicações sobre o estudo de máquinas de fluxo, encontradas nas referências bibliográficas dessa dissertação, elabora-se uma classificação de caráter prático e consoante com o objetivo desse trabalho. Alternativamente, deve-se fazer menção ao trabalho de PEREIRA (2002), que apresenta uma forma acadêmica de divisão desses equipamentos, um pouco diferente daquela aqui apresentada.

Classificam-se como máquinas de fluxo todos os equipamentos atravessados por um escoamento contínuo de fluido. Essas máquinas interagem energeticamente com o fluido que passa por seu interior, podendo a energia ser transferida da máquina para o escoamento, ou em sentido contrário, de acordo com seu tipo. Duas grandes categorias de Máquinas de Fluxo são assim identificadas:

- Máquinas Operatrizes – são aquelas que transferem potência a um escoamento de fluido.

- Máquinas Motrizes – são as que obtêm potência a partir de um escoamento de fluido.

As máquinas operatrizes destinam-se à movimentação e/ou compressão de fluidos, requerendo para isso o recebimento de potência proveniente de um acionador. Nesse grupo, podem-se destacar: ventiladores; bombas; compressores e máquinas multifásicas. Já as máquinas motrizes são capazes de disponibilizar potência num eixo a partir do escoamento de fluidos através do seu interior e trabalham, usualmente, como acionadores de máquinas operatrizes. Podem-se citar nessa categoria: turbinas a vapor; turbinas a gás e expansores.

Enquanto as máquinas de deslocamento positivo operam com o elemento propulsor empurrando mecanicamente o fluido contra a resistência imposta pelo sistema (Ex.: compressor alternativo, bomba de engrenagens, etc.), as turbomáquinas baseiam-se no princípio dinâmico de funcionamento, sendo a energia transferida, no caso das máquinas operatrizes, preferencialmente sob a forma cinética, havendo

posterior conversão em entalpia, no processo termodinâmico que o fluido sofre ao passar por um difusor (Ex.: compressores e bombas centrífugas e axiais).

Especificamente para as chamadas turbomáquinas, algumas categorias adicionais podem ser mencionadas. Classificam-se como máquinas de impulsão ou de reação, caso haja, ou não, respectivamente, variação de pressão no escoamento através do rotor. Também, em função da natureza do caminho do escoamento através dos canais do rotor, pode-se classificá-las, simplificada, em: máquinas de fluxo axial – quando o escoamento é paralelo ao eixo de rotação; máquina de fluxo radial (ou centrífuga) – quando o escoamento ocorre em um plano perpendicular ao eixo de rotação; máquinas de fluxo misto – quando na saída do rotor, o escoamento apresenta correntes com componentes de velocidade radiais e axiais em quantidades significativas.

3.2 RELAÇÃO MÁQUINA - SISTEMA

De acordo com a caracterização do tipo de escoamento envolvido, compressível (gases) ou incompressível (líquidos), procede-se a uma metodologia de análise diferenciada, função do comportamento típico do fluido. Os equipamentos utilizados para cada caso apresentam, logicamente, características e configurações peculiares para o desempenho do serviço a que se prestam. Procura-se dar um tratamento unificado por grupo de máquinas que apresentem propriedades geométricas e funções similares.

Independente do tipo de máquina de fluxo em análise, um princípio básico relativo ao seu comportamento, e que caracteriza a sua interação com o sistema no qual está inserida, pode ser formulado da seguinte maneira (RODRIGUES, 1991): “O desempenho de uma máquina de fluxo é determinado não só pelas características construtivas e de ajuste da máquina, mas também por alguns parâmetros relativos ao serviço executado, que são essencialmente quatro: pressão na entrada, temperatura na entrada, pressão na saída e natureza de fluido”. Na figura 3.1 tem-se uma representação esquemática desse princípio.

Isso quer dizer que uma máquina de fluxo não pode ser analisada independentemente do sistema a que pertence. Todas as características operacionais resultantes, tais como vazão, potência requerida ou desenvolvida, níveis de esforços a que está submetida, são função dessa interação.

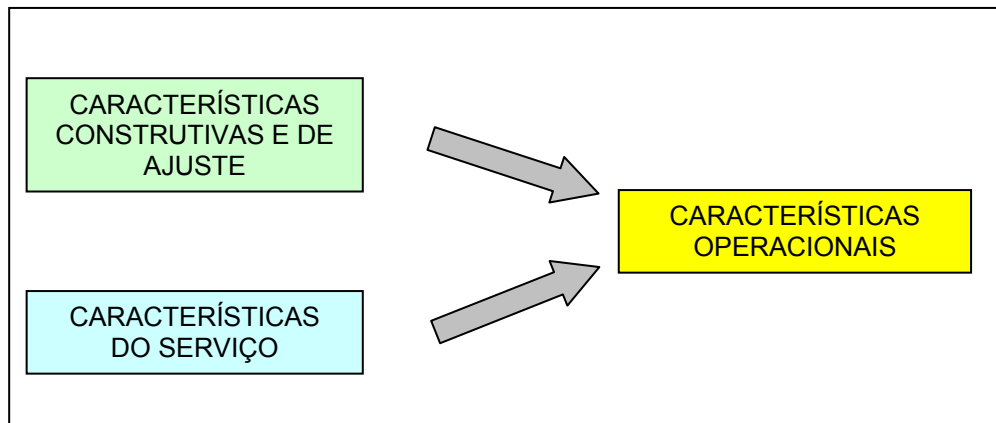


Figura 3.1 – Fatores que influenciam na performance de uma máquina de fluxo

3.3 MÁQUINAS AXIAIS

Nesse estudo, concentra-se a atenção nas máquinas classificadas como axiais assim denominadas em função do movimento global do fluido desenvolver-se segundo uma trajetória hélico-axial em torno do rotor. Além disso, limitar-se-á a análise aos escoamentos incompressíveis e bidimensionais, conforme modelo matemático a ser apresentado adiante. Ressalta-se, nesse ponto, que tal escolha não representa limitação do método estudado, mas uma simplificação do problema real a ser estudado, que atende aos objetivos propostos no desenvolvimento desse trabalho. As principais turbomáquinas axiais de uso na indústria são:

3.3.1 Compressores Axiais

É um tipo de compressor que requer o emprego de tecnologias realmente sofisticadas em seu projeto e construção e que vem sendo usado vantajosamente em aplicações de processamento, notadamente nas plantas mais modernas (RODRIGUES, 1991).

Os compressores axiais (Fig. 3.2) são dotados de um tambor rotativo em cuja periferia são dispostas séries de palhetas em arranjos circulares igualmente espaçados. Essas palhetas compõem os impelidores da máquina. Quando o rotor é posicionado na máquina, essas rodas de palhetas móveis ficam intercaladas por rodas de palhetas fixas, ou seja, arranjos de palhetas dispostos circunferencialmente ao longo da carcaça, desenhadas de modo a promover a difusão do escoamento. Um estágio de compressão é constituído por uma roda de palhetas móveis e uma de palhetas fixas.

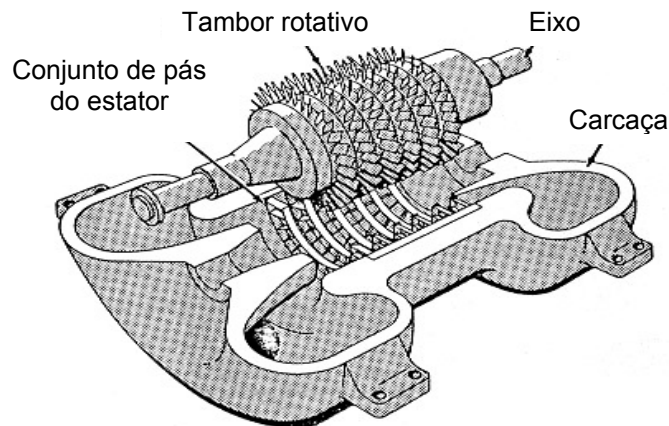


Figura 3.2 – Compressor axial com detalhes do rotor e estator (RODRIGUES, 1991).

Embora, do ponto de vista de processo, esses compressores superem os centrífugos em aplicações que requerem alta vazão e baixas pressões de descarga, em função de o escoamento estar menos sujeito a mudanças de direção, conferindo-lhes maior capacidade e eficiência aerodinâmica, sua aplicação ainda é restrita, devido, principalmente, às seguintes razões:

- reduzida demanda por vazões compatíveis com seu emprego. (vale lembrar que essas máquinas foram originalmente concebidas para fazer parte das turbinas a gás, comprimindo grandes volumes de ar);
- necessidade do desenvolvimento de projeto aerodinâmico específico para cada tipo de fluido empregado.

Esse último aspecto merece maior atenção. Os compressores axiais são muito mais sensíveis às vibrações de natureza aerodinâmica, pois estas provocam efeitos mais graves devido à baixa rigidez das palhetas do rotor. Outro ponto a se considerar são as conseqüências da operação fora do ponto de projeto da máquina, que são amplificadas pelo número excessivo de estágios requerido para o compressor axial, levando a um progressivo aumento desse desvio. Em função disso, vislumbra-se um campo fértil para aplicação da teoria desenvolvida nesse trabalho, como se pode observar em LEWIS (1996).

3.3.2 Bombas Axiais

Nas bombas de fluxo axial a direção de saída do líquido é paralela ao eixo de rotação do impelidor. Este se constitui em uma roda dotada de pás que transferem energia cinética ao fluido, sendo que não há componente radial da velocidade. Essas pás formam canais de espaçamento fixo de forma a se conseguir um escoamento de características convenientes. O processo de difusão se dá através de pás fixas presas à carcaça no canal difusor, cujo diâmetro aumenta ligeiramente ao longo do escoamento. Essas bombas são empregadas quando se desejam elevadas vazões para baixos “heads” (energia por unidade de massa de fluido) impostos pelo sistema, sendo sua aplicação mais comum em serviços de irrigação. Podem apresentar vários tipos construtivos, com variedade de projetos em função dos fabricantes, mas, de forma geral, dividem-se em dois grandes grupos de acordo com a orientação do seu eixo: verticais ou horizontais, sendo as primeiras as mais comuns.

As pás difusoras são colocadas atrás do impelidor em número que varia de 5 a 8, de acordo com o projeto. Quanto mais curtas (na direção axial) e maior o número dessas pás, melhor a eficiência da bomba. Porém, o “design” adotado dependerá da velocidade específica de projeto (parâmetro característico para esse tipo de equipamento). Para valores muito altos desse parâmetro, é comum construir apenas um difusor cônico ao invés do anel de pás fixas.

3.3.3 Turbinas a Vapor

Uma turbina é uma máquina acionadora que retira energia de um escoamento de fluido que se processa em seu interior e a disponibiliza através de um eixo de rotação. No caso das turbinas a vapor, esse fluido é o vapor d’água.

O processo de transferência de energia para o eixo da turbina se processa em duas etapas. Primeiro, o vapor é expandido em bocais de modo a ter sua entalpia convertida em energia cinética e, posteriormente, o escoamento, em alta velocidade, é direcionado contra as pás dispostas ao longo da periferia de uma roda móvel, transferindo para esta parte de sua energia. São pouco comuns turbinas industriais em que esse processo de transferência de energia seja feito em um único estágio, ou seja, utilizando uma única roda móvel, devido a restrições de projeto. As máquinas de múltiplos estágios são utilizadas na quase totalidade das aplicações, sendo que

podem ter duas formas distintas de concepção: estágios de velocidade ou estágios de pressão.

Em um conjunto de estágios de velocidade o vapor sofre uma única expansão inicial e o fluxo passa a seguir por mais de uma roda móvel. Ou uma única roda móvel com duas fileiras de pás circunferencialmente distribuídas e separadas por uma grade de pás fixas defletoras. Esse último arranjo, como estágio Curtis (Fig. 3.3), é freqüentemente utilizado na construção de turbinas pequenas ou como primeiro estágio na maioria das turbinas de grande porte.

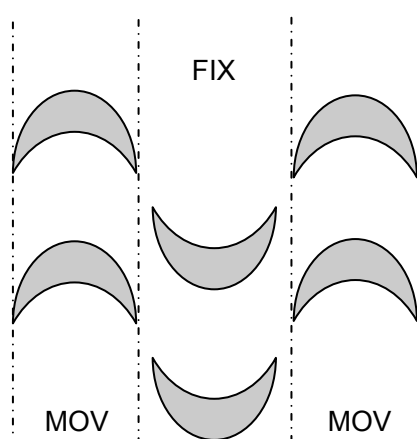


Figura 3.3 – Diagrama esquemático do estágio de velocidade (Estágio Curtis) de uma turbina a vapor.

O projeto de estágios de pressão, também denominado de estágios Rateau, (Fig. 3.4) consiste na decomposição da diferença de pressão total, associando diversos pares constituídos por uma roda de pás fixas (expansores) e uma roda de pás móveis cada um. Neste caso, os bocais são utilizados como elementos expansores apenas na entrada de vapor da turbina, com o conjunto de pás dispostas ao longo de uma roda fixa cumprindo essa função a cada estágio.

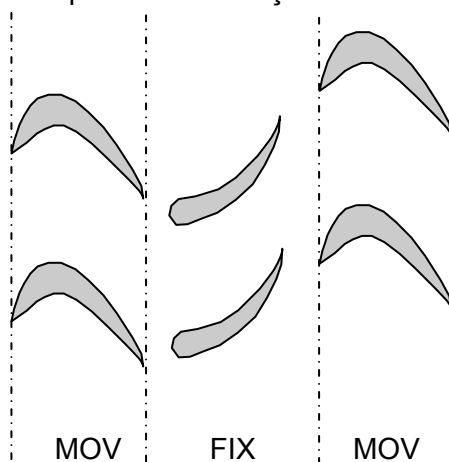


Figura 3.4 – Diagrama esquemático do estágio de pressão (Estágio Rateau) de uma turbina a vapor.

O projeto típico de turbinas de grande porte constitui-se de um primeiro estágio Curtis, seguido de diversos estágios de pressão, de acordo com o nível de expansão disponível.

3.4 TEORIA CLÁSSICA

Para a aplicação de métodos numéricos em simulação de escoamento através de grades de turbomáquinas axiais, torna-se necessária, em primeiro lugar, a definição da modelagem geométrica matemática a ser utilizada. Para tal, procede-se a uma análise construtiva dessas máquinas, que já foram sumariamente descritas anteriormente. Sem perda de generalidade, tomamos por base um compressor axial, pois, ressalvadas características particulares de cada projeto, todas funcionam segundo o mesmo princípio conceutivo. Os efeitos da compressibilidade do fluido podem, a princípio, ser negligenciados, uma vez que tais máquinas trabalham com relações de compressão muito baixas.

Ao contrário das máquinas radiais, como compressores e bombas centrífugas, a análise do funcionamento das turbomáquinas axiais, fundamentada nas condições puramente geométricas da teoria de Euler, não fornece bons resultados. Isso se deve ao fato da camada limite do escoamento, não estando “pressionada” por forças centrífugas, mostrar-se bastante espessa e com possibilidade de descolamento, sobretudo quando o escoamento apresenta alto ângulo de incidência com relação às pás. Dessa forma, não há preenchimento uniforme dos canais formados pelas pás, nem se pode considerar que o fluido escoar unidimensionalmente e governado pelo formato desses canais (RODRIGUES, 1991). A alternativa existente é a análise aerodinâmica do funcionamento dessas máquinas, como será exemplificado no caso de um compressor. Nesse caso, as forças que intervêm na transferência de energia são determinadas a partir do campo de pressões gerado na camada limite em torno das pás. Esse procedimento é a base das teorias empíricas e semi-empíricas aplicadas na análise do desempenho das pás e da máquina como um todo, além de se constituir no conceito físico fundamental para a aplicação da simulação numérica.

Não se deve, no entanto, abandonar uma análise teórica através de parâmetros médios globais do escoamento. Essa abordagem clássica é muito útil para nortear o projeto de máquinas axiais no sentido do estabelecimento das condições para o ponto de projeto e avaliação qualitativa de tendências de desvio de desempenho, quando operando em condições “off-design”. Para tal, são

desenvolvidas correlações empíricas de correção em função de grandezas adimensionais (RAMSDEN, 2002).

3.4.1 O Estágio Axial e o Diagrama de Velocidades

O diagrama abaixo (Figura 3.5) representa esquematicamente um estágio intermediário de compressão de um compressor axial, em corte no plano meridional. Para se proceder a uma modelagem física e matemática, deve-se estabelecer, inicialmente, a configuração de velocidades do escoamento através da máquina. Na figura 3.6, são vistos, em esquema planificado, um par de pás móveis e um par de pás fixas que fazem parte de um estágio axial em seção ao longo da linha média de fluxo. Atribuir-se-ão o índice (1) à entrada das pás móveis, (2) à saída dessas e (3) e (4), respectivamente, a entrada e saída das pás fixas. Adotar-se-á uma velocidade periférica nominal U para as pás móveis, mesmo reconhecendo que essa velocidade sofre variação ao longo da extensão das pás, uma vez que o canal por onde se processa o escoamento tem sua área diminuída pelo aumento gradativo do raio do tambor sobre o qual são montadas as pás móveis (Fig. 3.5).

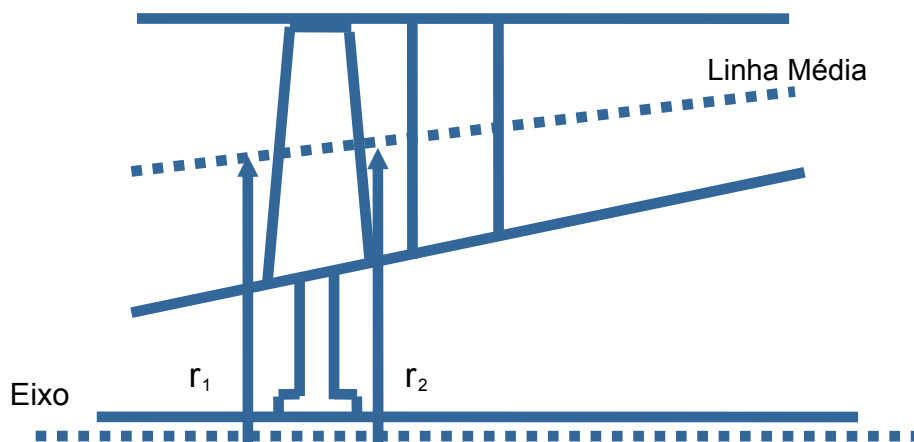


Figura 3.5 – Diagrama esquemático representando um estágio de um compressor axial (corte no plano meridional).

Para possibilitar a disposição em série de vários estágios, uma circunstância que sempre deve ser levada em conta, o projeto de cada um deve prever a mesma velocidade absoluta do escoamento na entrada C_1 e na saída C_4 . Isso significa, termodinamicamente, que toda a energia fornecida ao fluido sob a forma de carga dinâmica foi convertida em carga estática, o que é, obviamente, de interesse.

Em cada ponto da trajetória do fluido, os ângulos λ e α indicam, respectivamente, as inclinações da velocidade absoluta \mathbf{C} e da velocidade relativa \mathbf{W} em relação à direção axial, enquanto que o ângulo da inclinação da linha de curvatura média da pá em relação a essa mesma direção é designado por β .

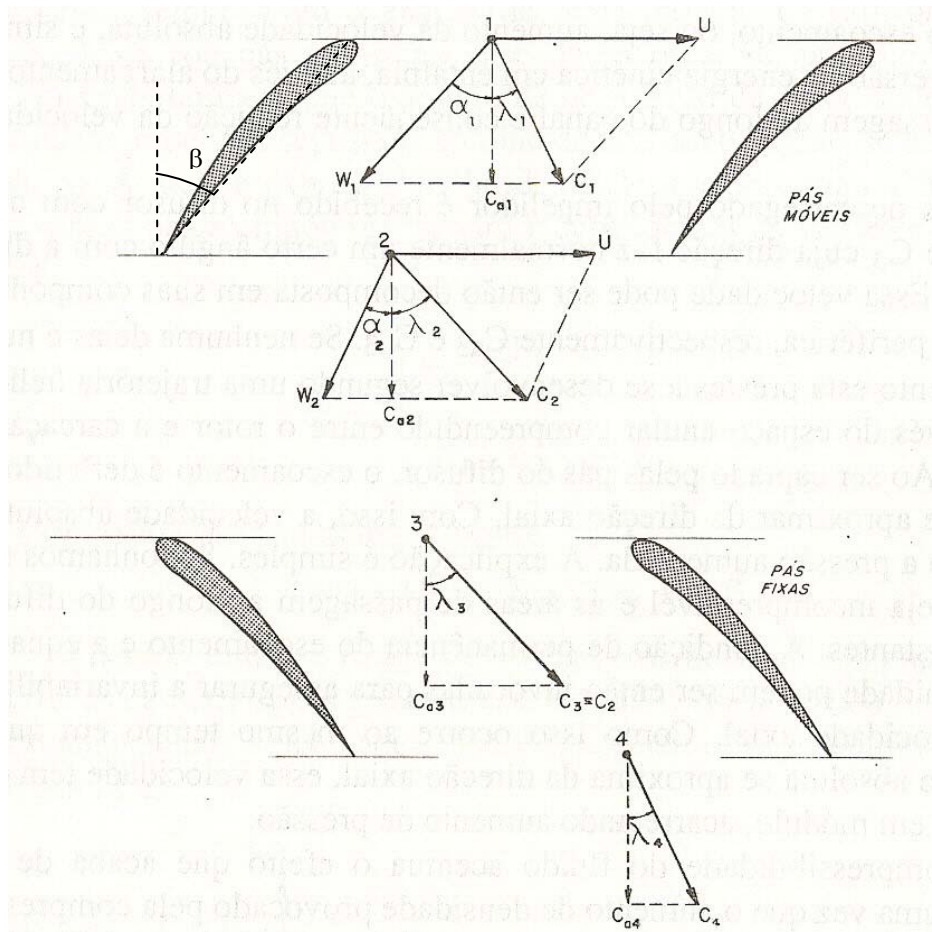


Figura 3.6 – Diagrama padrão de velocidades num compressor axial (RODRIGUES, 1991)

Nos triângulos de velocidade representados, utilizam-se o índice (a) para as projeções dos vetores velocidade na direção axial e o índice (u) para as respectivas projeções periféricas. Sendo assim, cada vetor velocidade absoluta pode ser decomposto em suas componentes axial e periférica, respectivamente, \mathbf{C}_a e \mathbf{C}_u .

3.4.2 O Processo de Difusão – Problema da Compressão

Através da figura 3.7, pode-se verificar que a área da seção transversal entre duas pás consecutivas de uma roda de palhetas aumenta. Assim, ao longo do escoamento, há uma redução da velocidade axial com o conseqüente aumento da

pressão estática. Esse efeito é denominado termodinamicamente de difusão. Com uma análise mais detalhada da figura 3.7, verifica-se que o escoamento inicialmente acelera, ocorrendo paralelamente uma redução de pressão. Tal processo continua até a seção transversal de área mínima A^* (garganta), onde a pressão média da seção é denominada p^* . A difusão do escoamento processa-se, então, a partir da garganta, ficando confinada no canal formado entre as pás.

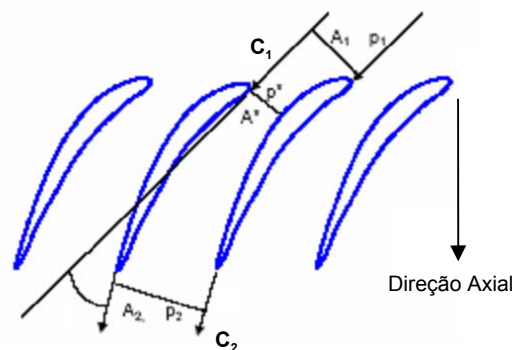


Figura 3.7 – Roda de pás (planificada), com indicação das áreas da seção transversal ao escoamento.

Essa característica do escoamento é devido a requisitos mecânicos de resistência do material das pás. O quanto deve o fluido ser pré-acelerado é determinada pela espessura das pás e, em função dessa espessura e dos requisitos de integridade mecânica a ela associados, a difusão deve ficar confinada na região limitada pelas pás, em ambos os lados. Nessa região, a camada limite é submetida a uma razão de pressão adversa (p_2/p^*) maior do que a razão total da roda considerada entre entrada e saída (p_2/p_1). Em termos de projeto, deseja-se a maior elevação de pressão em cada estágio para minimizar o número de rodas necessário.

3.4.3 Equação de Euler

Como mencionado anteriormente, a teoria de Euler é uma ferramenta útil na escolha das condições de projeto de um compressor axial. Mostra-se, entretanto, insuficiente para avaliar o desempenho da máquina fora das condições de projeto, e por isso deve ser olhada com reservas na tentativa de se estabelecer os parâmetros operacionais desse tipo de máquina. Porém há um interesse acadêmico nesse procedimento (RODRIGUES, 1991).

Referindo-se novamente à figura 3.6, tanto as pás móveis como as pás fixas são desenhadas e posicionadas de modo a receberem o fluxo suavemente nas

condições de projeto. Adotando-se os sub-índices (1) e (2) para a entrada e saída das pás móveis, respectivamente, nessa situação, o fluido se apresenta na entrada do impelidor com uma velocidade relativa cujo ângulo de inclinação α_1 coincide com o ângulo de orientação das pás, β_1 . E também é nessa situação que se mostra mais razoável a hipótese de que, na saída do impelidor, coincidem os ângulos α_2 e β_2 , o que é fundamental para garantir a aplicabilidade da teoria de Euler. Considera-se ainda que a projeção axial da velocidade absoluta ao longo do escoamento é mantida constante. Esse é um critério de projeto freqüentemente adotado, mediante o conveniente dimensionamento das áreas de passagem do escoamento.

Aplicando o princípio da conservação do momento angular entre a entrada e saída das pás móveis, tem-se:

$$H = U (C_{u2} - C_{u1}). \quad (3.1)$$

Essa é a expressão da Equação de Euler para a compressão axial. O termo H , tradicionalmente utilizado, denomina-se *head* e corresponde à energia por unidade de massa transferida ao fluido no estágio. Sendo a velocidade axial constante, essa expressão é equivalente a:

$$H = U C_a (\operatorname{tg} \lambda_2 - \operatorname{tg} \lambda_1). \quad (3.2)$$

Conclui-se assim que a transferência de energia nas pás móveis está associada à deflexão do escoamento. Essa transferência se dá de duas formas: concessão de energia cinética ao escoamento e simultânea conversão de energia cinética em entalpia, através do alargamento da área de passagem do canal e conseqüente redução da velocidade relativa, como já visto.

3.4.4 Triângulos de Velocidade Combinados

Uma forma conveniente de representar os triângulos de velocidade de entrada e saída das pás móveis consiste em combiná-los em uma única figura (Fig. 3.8). Tem-se, com isso, uma visualização gráfica, tanto do head imposto por estágio, a partir da Teoria de Euler, como de parâmetros adimensionais utilizados em projeto de máquinas axiais. A partir da equação 3.1, pode-se escrever, abreviadamente:

$$H = U \Delta C_u. \quad (3.3)$$

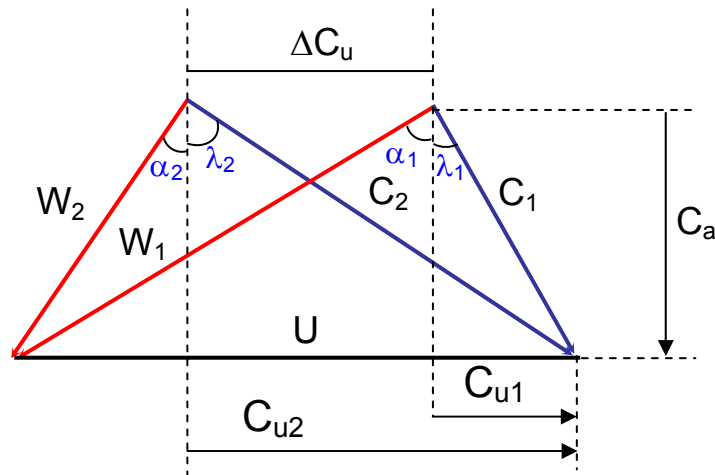


Figura 3.8 – Triângulos de velocidade combinados (velocidades axial e periférica constantes)

Definindo alguns dos parâmetros adimensionais mais usuais:

- Coeficiente de carga por estágio (relacionado à transferência de energia):

$$\psi = \frac{\Delta H}{U^2} = \frac{\Delta C_u}{U}; \quad (3.4)$$

- Coeficiente de fluxo (relacionado à vazão volumétrica)

$$\xi = \frac{C_a}{U}. \quad (3.5)$$

Para uma rápida visualização desses parâmetros de projeto básicos de um compressor axial, a representação da figura 3.8 é muito prática. Pode-se verificar, por exemplo, que, a partir da equação 3.3, a energia por unidade de massa (trabalho específico ou “head”) introduzida por estágio é simplesmente o produto dos módulos do vetor da base, \mathbf{U} e do vetor superior, $\Delta \mathbf{C}_u$. De forma similar, pela expressão 3.4, observa-se que o coeficiente ψ é a razão entre os módulos do vetor superior ($\Delta \mathbf{C}_u$) e da velocidade periférica da pá (\mathbf{U}).

3.4.5 Performance – Curva “Head-Vazão” de um Compressor Axial

Apesar das limitações da aplicação da Teoria de Euler para máquinas axiais, a determinação de uma correspondência “head” x vazão teórica nela baseada tem sua importância na análise qualitativa da influência dos parâmetros construtivos da máquina em seu desempenho. O objetivo é determinar uma expressão do “head” em função dos ângulos λ_1 e β_2 . Caso o ângulo de orientação da velocidade absoluta na entrada do impelidor seja independente das condições de operação e a direção da velocidade relativa na saída do estágio sempre seja coincidente com a inclinação das pás, tais parâmetros não são dependentes da vazão de operação. Pode-se escrever, então, a partir da equação 3.2:

$$H = U^2 - U C_a (\operatorname{tg}\lambda_1 + \operatorname{tg}\beta_2). \quad (3.6)$$

A partir dessa equação, verifica-se uma relação linear entre o “head” e a velocidade axial do fluido, para uma dada rotação e diâmetro nominal do impelidor, bem como para determinadas características geométricas das pás (Figura 3.9).

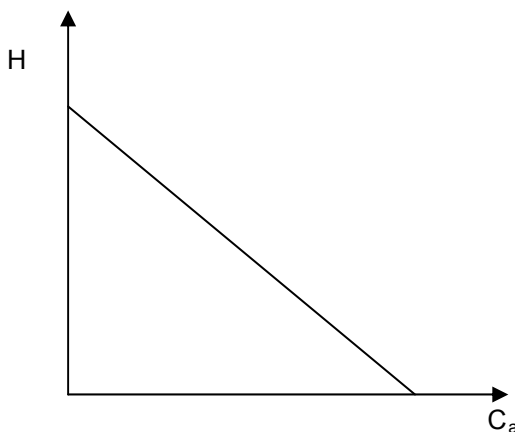


Figura 3.9 – Curva head-vazão teórica para um compressor axial.

As hipóteses simplificadoras consideradas só ocorrem rigorosamente na condição de projeto da máquina. Ao se variar a vazão do compressor axial, a igualdade das velocidades axiais admitida deixa de existir, embora variem no mesmo sentido. Isso resulta, na prática, em um comportamento decrescente do “head” em função da vazão, porém com ligeira curvatura e maior inclinação. Também, nos compressores reais, há de se considerar o efeito da compressibilidade do gás no estabelecimento da curva de performance.

Em suma, de acordo com a teoria clássica, os aspectos geométricos de projeto da máquina que estão comprometidos com o processo de transferência de energia são a curvatura e o posicionamento das pás do impelidor, além do diâmetro nominal

da roda. Há uma flexibilidade em se escolher a opção “curvatura-posição” para uma mesma quantidade de energia transferida. Além disso, o próprio perfil aerodinâmico característico das pás constitui-se como outra variável de projeto. Classicamente, a escolha desses parâmetros é função da experiência do projetista e análises experimentais de protótipos em fábrica. O desenvolvimento dos métodos numéricos de análise e simulação veio, assim, complementar as ferramentas de projeto utilizadas para o desenvolvimento dessas máquinas.

3.4.6 Peculiaridades de uma Turbomáquina Axial Real

As máquinas axiais, mais do que qualquer outro tipo, apresentam grande sensibilidade quanto ao seu desempenho em função do seu projeto aerodinâmico. Daí a importância da aplicação, em sua concepção, de ferramentas diversas que permitam uma melhor representação e entendimento dos fenômenos envolvidos no escoamento que se processa em seu interior. Alguns fenômenos não considerados na análise de Euler influenciam decisivamente o comportamento quer de compressores, quer de turbinas axiais e são tratados classicamente pela introdução de fatores empíricos de correção nas equações desenvolvidas anteriormente.

Um fenômeno que ocorre mesmo na condição de projeto da máquina e que influi na transferência de energia por estágio está relacionado com a variação do perfil de velocidades ao longo da altura das pás. A existência das superfícies do rotor e da carcaça no contorno do escoamento (os termos “*hub*” e “*shroud*” nas simulações numéricas) e os efeitos viscosos resultantes promovem esse gradiente na direção radial.

Outro efeito digno de menção é a não coincidência do ângulo de saída do escoamento com o ângulo de inclinação das pás, o que pode ser atribuído a uma certa inércia do fluido resistindo às mudanças de direção a ele impostas. Esse desvio torna-se cada vez mais importante quanto maior o afastamento das condições de projeto.

Ao se analisar a eficiência da transferência de energia ao fluido (ou do fluido) em um estágio axial, observam-se grandes perdas em função do arrasto aerodinâmico no perfil e vorticidades geradas em suas bordas, tal qual na teoria dos aerofólios. Esses efeitos tornam-se mais intensos quanto maior o ângulo de incidência do fluxo nas pás, ou seja, com o aumento do chamado ângulo de ataque. A situação limite é aquela em que ocorre o descolamento da camada limite com a conseqüente formação

de uma extensa esteira viscosa, fenômeno denominado de “*stall*”. Há, então, um súbito e acentuado aumento da resistência ao escoamento, comprometendo a eficiência e desempenho da máquina e podendo transferir-se às pás vizinhas criando uma onda perturbadora rotativa em torno do eixo: o “*rotating stall*”.

A partir do exposto, o desenvolvimento de métodos mais precisos de descrição do escoamento no interior das turbomáquinas axiais é o caminho para um melhor projeto que permita um alto desempenho e soluções de problemas operacionais, tal como instabilidades que afetem seu comportamento mecânico. Considera-se este ponto a grande motivação para o estudo de ferramentas computacionais que simulem de forma cada vez mais precisa os fenômenos aerodinâmicos inerentes a estes tipos de equipamentos.

CAPÍTULO 4

ESCOAMENTO POTENCIAL

4.1 MODELAGEM DE PROBLEMAS EM MECÂNICA DOS FLUIDOS

Após um breve resumo da teoria clássica para análise de turbomáquinas e compreensão de suas limitações, principalmente no que concerne às máquinas axiais, onde um estudo mais aprofundado do escoamento se faz necessário, passa-se a uma resenha da teoria da Mecânica dos Fluidos Clássica. A forma de abordagem, os princípios de conservação e as equações resultantes de sua aplicação consistem no foco desse capítulo. As ferramentas matemáticas necessárias ao desenvolvimento dos processos de simulação numérica de um escoamento são aqui apresentadas para posterior utilização. Nas seções seguintes, é apresentada uma formulação das equações diferenciais utilizadas na representação de um escoamento em Mecânica dos Fluidos a partir dos princípios físicos básicos de conservação.

4.1.1 Derivada Material

Quando em um escoamento as funções de campo são conhecidas, a determinação da variação das grandezas de análise, como velocidade, acompanhando uma partícula que se desloca na região de estudo, é obtida através do operador matemático apresentado na expressão 4.1 abaixo:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla(\cdot) . \quad (4.1)$$

Esse operador é definido como derivada material, que leva em consideração, além da variação da grandeza no tempo, sua variação em função do movimento do elemento de fluido no campo do escoamento. A aceleração de um elemento de fluido que se desloca através de um campo de velocidades, por exemplo, é representada pela soma de duas parcelas (Eq. 4.2): a derivada da velocidade em relação ao tempo (primeira parcela do lado direito da expressão) e a sua variação em função da mudança de posição desse elemento no campo (segunda parcela, denominada de convectiva),

$$\frac{D(\mathbf{q})}{Dt} = \frac{\partial(\mathbf{q})}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla(\mathbf{q}) . \quad (4.2)$$

4.1.2 Equações Constitutivas

O estudo de problemas em Mecânica dos Fluidos envolve a aplicação dos princípios de conservação a determinado tipo de escoamento. A partir da aplicação dessas leis básicas, conseguem-se desenvolver expressões matemáticas que descrevam o fenômeno em análise. A formulação completa do problema envolve a determinação do PVC (Problema de Valores de Contorno) que se constitui nas equações diferenciais constitutivas com suas respectivas condições de contorno e condição inicial, quando for o caso.

4.1.3 Princípio da Conservação da Massa (PCM)

A aplicação do princípio de conservação da massa traduz-se na expressão da Equação da Continuidade (Eq. 4.3):

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 , \quad (4.3)$$

onde $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla\rho$ é a derivada material da massa específica, cujos termos correspondem a:

- $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ - taxa de variação em função do tempo em um ponto do campo;
- $\mathbf{q} \cdot \nabla\rho$ - taxa de variação da massa específica em função do deslocamento da partícula de fluido no campo.

No caso de um escoamento incompressível, a equação da continuidade se reduz à expressão 4.4:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 . \quad (4.4)$$

O termo $\nabla \cdot \mathbf{q}$ pode ser interpretado como a taxa de variação percentual de volume de um elemento de fluido na medida em que ele se desloca ao longo do escoamento. No caso do escoamento incompressível (seja com massa específica constante ou bastando que essa não varie em função da pressão), a expressão

anterior significa que uma partícula de fluido não tem seu volume alterado, seja em função do tempo ou e de sua posição no espaço (Fig. 4.1).

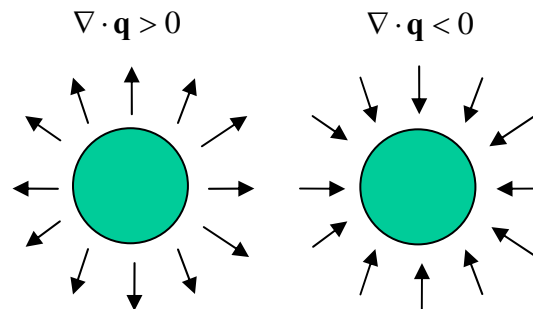


Figura 4.1 – Interpretação física do termo do divergente do campo de velocidades.

4.1.4 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear (PCQML)

Esse princípio consiste na aplicação da segunda lei de Newton a um volume material de fluido, ou seja:

“A taxa de variação da quantidade de movimento linear de um elemento de fluido ao longo de um escoamento é igual à resultante das forças (de campo e de corpo) a ele aplicadas.”

A expressão matemática representativa desse princípio depende da classe de fluido em estudo, com respeito à maneira como um elemento se deforma em função das tensões sobre ele exercidas. Nesse trabalho, limitaremos nossa atenção aos fluidos newtonianos, que possuem taxa de deformação proporcional à tensão cisalhante. A constante de proporcionalidade dessa relação é definida como viscosidade absoluta do fluido.

As Equações de Navier-Stokes correspondem às equações diferenciais do movimento aplicadas a fluidos newtonianos (possuem equações constitutivas relacionando tensões com gradientes de velocidade e propriedades do fluido). São de grande importância no estudo de problemas de Mecânica dos Fluidos e simplificam-se enormemente quando aplicadas a escoamentos com propriedades constantes (ρ e μ). Na hipótese de escoamento com massa específica e viscosidade constantes, tem-se, então, considerando pequenas variações da viscosidade com a temperatura e supondo que o fluido se caracteriza como newtoniano:

$$\rho \frac{D\mathbf{q}}{D} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{q} + \rho \mathbf{F} \quad (\text{forma vetorial}), \quad (4.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (\text{com notação indicial}), \quad (4.6)$$

onde q_i , ($i = 1,2,3$) são as componentes do vetor velocidade \mathbf{q} nas direções cartesianas.

Os termos dessa equação (4.6) podem ser interpretados fisicamente da seguinte forma:

- $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ - aceleração local;
- $q_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j}$ - aceleração convectiva ou advectiva;
- $\rho \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + q_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right)$ - termo de inércia da equação de N-S;
- $-\frac{\partial p}{\partial x_i}$ - termo de pressão;
- $\mu \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_j}$ - termo de difusão da QML;
- ρf_i - força de corpo.

Considerando um sistema cartesiano de coordenadas as equações de Navier-Stokes para a solução de um escoamento viscoso incompressível, podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 ESCOAMENTO POTENCIAL

Os escoamentos denominados de potenciais consistem na suposição da existência de um fluido ideal, de viscosidade nula. As equações de Navier-Stokes assumem uma forma mais simples em função da hipótese de idealidade do fluido. Considerando ainda o escoamento como incompressível, que significa $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, temos a chamada equação de Euler:

$$\rho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{F}. \quad (4.8)$$

Considerando a integral de linha em uma região simplesmente conexa, ao longo de uma linha arbitrária C , a circulação ao longo de C é definida como:

$$\Gamma \equiv \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l} = \int_C (u dx + v dy + w dz), \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{q} = (u, v, w)$ e $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$.

Pelo teorema de Stokes, tem-se:

$$\Gamma \equiv \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.10)$$

Como a viscosidade é considerada desprezível, o escoamento é denominado irrotacional, ou seja, a vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{q}$ é nula em toda a região. Logo, ao se aplicar essa condição na equação 4.10, pode-se mostrar que a integral de linha se torna uma derivada de ponto, ou seja, a diferencial inexata torna-se exata. Desse modo, o campo de velocidades pode ser descrito através de uma função escalar. Assim, os escoamentos incompressíveis e irrotacionais também são chamados de escoamentos potenciais, uma vez que se pode definir uma função potencial de velocidade ϕ tal que

$$\mathbf{q} = \nabla \phi, \quad (4.11)$$

e, conseqüentemente, a equação da continuidade torna-se:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4.12)$$

conhecida como equação de Laplace.

Essa equação diferencial parcial requer duas condições de contorno, uma na superfície do corpo e outra no infinito. Em função da hipótese de idealidade do fluido, a condição de contorno de impenetrabilidade é a mais natural a ser considerada na fronteira sólida, representada pela equação (4.13):

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (4.13)$$

A segunda condição contorno requer que a velocidade tenda à velocidade do escoamento incidente para um ponto distante do corpo. Referindo-se à figura 4.2, onde \mathbf{Q}_∞ é a velocidade incidente, α , o ângulo de ataque e, conforme o sistema de coordenadas representado, $r = (x, y)$, um ponto qualquer do escoamento, pode-se escrever:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\nabla \phi - \mathbf{Q}_\infty) = 0. \quad (4.14)$$

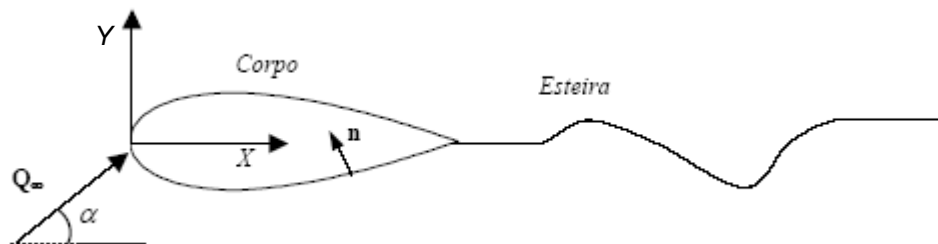


Figura 4.2 – Desenho esquemático para o escoamento potencial bidimensional ao redor de um perfil aerodinâmico.

Uma grande gama de soluções analíticas para a equação de Laplace é conhecida, uma vez que foi objeto de diversos estudos, abrangendo diversas áreas, como condução do calor, magnetismo e eletricidade.

Do ponto de vista da Mecânica dos Fluidos, as hipóteses simplificadoras que levam ao modelo do escoamento potencial limitam em parte sua aplicação. Em termos de escoamento externo ao redor de um corpo, os resultados mostram-se com precisão razoável para corpos esbeltos, com pequeno ângulo de ataque e elevado número de Reynolds. Isso porque a região de influência dos efeitos viscosos fica, nesse caso, limitada a uma fina camada ao redor do corpo (camada limite), e à medida que nos afastamos deste, os efeitos da viscosidade podem ser considerados desprezíveis.

No caso clássico de escoamento ao redor de um cilindro circular, observa-se que, à medida que aumenta o número de Reynolds, as condições associadas ao escoamento irrotacional vão perdendo sua validade. A camada limite tende a se separar da superfície, com a formação de uma esteira viscosa cada vez mais espessa, o que leva à quebra da simetria horizontal, tornando o escoamento periódico em função de descolamento alternado de vórtices. Os cálculos relativos à força de sustentação e ao arrasto passam a apresentar grandes desvios, pois o campo de pressão ao redor do cilindro muda bruscamente, influenciando no equilíbrio de forças sobre o corpo (Fig. 4.3). Tais efeitos se intensificam quanto maior o número de Reynolds, até se chegar a uma esteira completamente turbulenta.

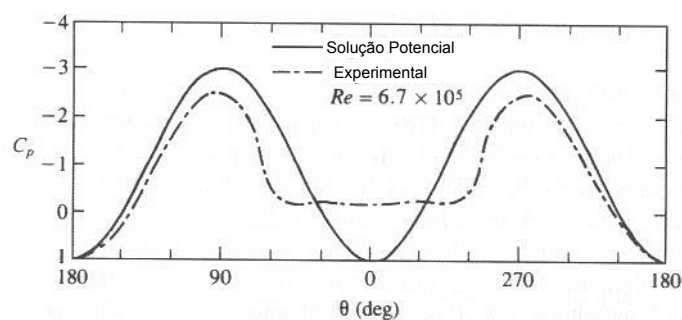


Figura 4.3 – Comparação entre o modelo potencial e resultados experimentais para o campo de pressões ao redor de um cilindro circular ($Re \cong 10^6$) (KUNDU, 2004).

No caso de escoamento ao redor de aerofólios esbeltos, de particular interesse para máquinas de fluxo, o modelo potencial mostra-se adequado quando o ângulo de incidência do escoamento é pequeno. Ao inclinar o aerofólio relativamente à direção do escoamento incidente, os resultados obtidos com essa modelagem simplificada passam a apresentar desvios cada vez maiores quando em comparação com dados experimentais reais. Isso se deve ao fato de se provocar, com o aumento desse ângulo, o descolamento da camada limite e o espessamento da região do escoamento perturbada em torno do perfil (Fig. 4.4). Esses fenômenos, resultantes da ação da viscosidade, não podem mais ser simulados por uma teoria que se baseia na idealidade do fluido.

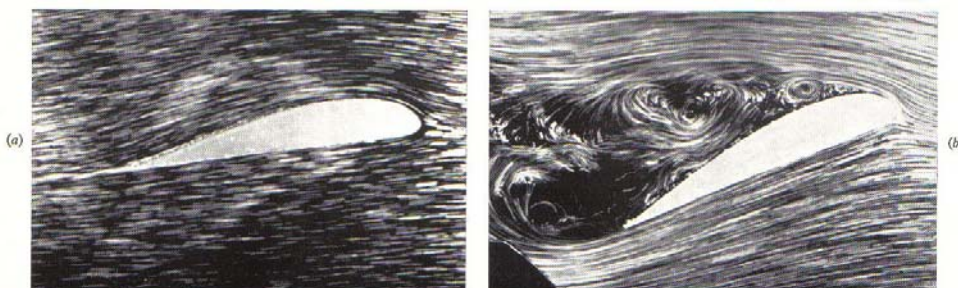


Figura 4.4 – Escoamento ao redor de um aerofólio para dois diferentes ângulos de ataque. No caso (b) verifica-se o fenômeno do descolamento da camada limite e a formação da esteira viscosa. (BATCHELOR, 1967)

4.3 LIMITAÇÕES DA TEORIA POTENCIAL

A Teoria Potencial apresenta excelentes resultados no estudo de escoamentos irrotacionais, porém, como visto na seção anterior, suas limitações são evidenciadas na medida em que os efeitos da viscosidade tornam-se importantes. Nesses casos, o afastamento dos resultados teóricos de dados experimentais mostra a necessidade de desenvolvimento de novos métodos de análise.

Considerando o caso de escoamento ao redor de aerofólios, de particular interesse na análise de máquinas de fluxo axiais, a Teoria Potencial falha ao se aumentar o ângulo de inclinação desse em relação à direção da velocidade do escoamento incidente. Predições de suma importância, como das forças de arrasto e de empuxo, afastam-se, e muito dos valores reais (Fig. 4.4). Uma modelagem que leve em consideração os efeitos da viscosidade conduzirá a melhores resultados.

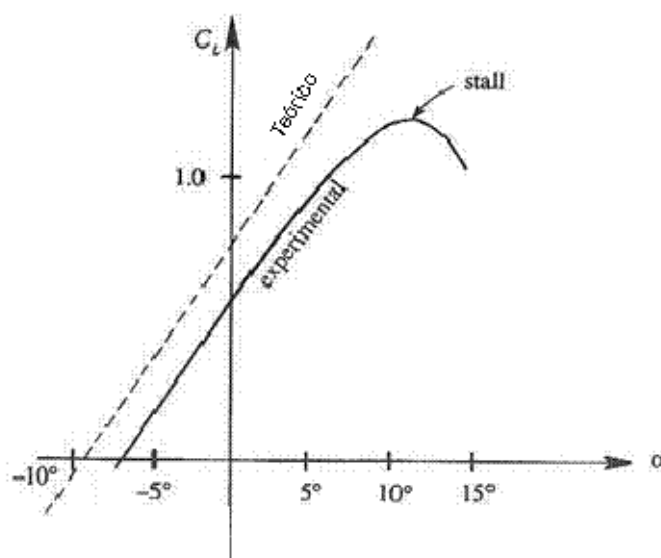


Figura 4.4 – Gráfico típico do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque para um aerofólio, comparando dados teóricos (Escoamento Potencial) e práticos (ANDERSON, 2001).

Para entender os efeitos da viscosidade do fluido sobre um corpo inserido em um escoamento, far-se-á referência à figura 4.5 (Anderson, 2001). De acordo com Prandtl, um fluido, ao passar por uma superfície sólida, apresenta as partículas em contato com esta a ela solidárias, ou seja, sem movimento relativo. Essa é a condição de não escorregamento. O escoamento pode então ser dividido em duas partes: a primeira, próxima à superfície e a segunda, ao se afastar dessa. Insere-se nesse

contexto o conceito de camada limite, região fluida próxima à superfície sólida onde os efeitos da viscosidade são relevantes. A camada limite apresenta um gradiente de velocidades na direção normal à superfície e o escoamento em seu interior apresenta vorticidade não-nula. Ao longo do escoamento, os efeitos da viscosidade vão se difundindo e sendo convectados para o interior do fluido, aumentando a camada em espessura. Caso se forme um gradiente de pressão contrário ao sentido do deslocamento dentro da camada limite, o fluido será retardado cada vez mais até que ocorra sua reversão. É o que se chama de ponto de descolamento da camada limite. A partir daí forma-se uma região de intensa vorticidade com fluxo reverso. Em sua seqüência forma-se o que se denomina esteira viscosa, com movimento caótico e grandes perturbações de pressão, onde a vorticidade fica confinada.

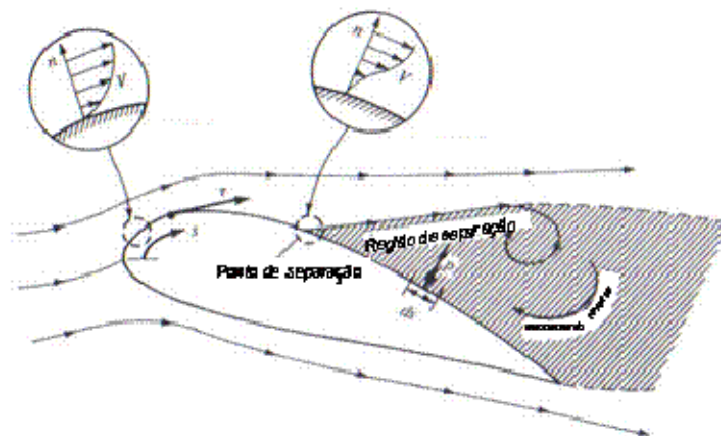


Figura 4.5 – Diagrama esquemático para a visualização dos efeitos da viscosidade sobre um corpo em movimento ou inserido em um escoamento. (ANDERSON, 2001)

Os efeitos de tais perturbações no escoamento levam a erros quando estes são tratados como meramente irrotacionais, principalmente no que concerne aos esforços a que o corpo está submetido, ainda mais quando há transição de regime laminar para turbulento na camada limite. As previsões de coeficientes de empuxo e de arrasto para um aerofólio, por exemplo, afastam-se dos valores reais encontrados, mostrando a necessidade de novos métodos para análise de escoamentos viscosos.

Soluções analíticas para o problema são obtidas apenas em casos muito particulares, sendo os métodos numéricos os mais adequados e utilizados. Tão melhores serão, quanto maior o grau de refinamento utilizado, sendo que isso implicará sempre em maiores esforços computacionais.

Segundo BATCHELOR (1967), um dos problemas mais importantes em Dinâmica dos Fluidos é a determinação das propriedades de um escoamento viscoso devido ao movimento de corpos de formas simples em função de uma ampla faixa de números de Re , desde $Re \ll 1$ até $Re \gg 1$. Nesses casos o número de Re pode ser interpretado como a relação entre a ordem de grandeza das forças de inércia e das forças viscosas presentes. De acordo com a classe do problema, simplificações podem ser feitas na equação do movimento permitindo uma solução, quer analítica (em poucos casos), quer numérica, mesmo que de forma aproximada.

Para Re muito inferiores à unidade, o processo dominante é a difusão da vorticidade a partir do contorno do corpo. As aproximações de Stokes e Oseen podem ser utilizadas levando a soluções de boa qualidade. No outro extremo temos os escoamentos de altos números de Re , onde, com raciocínio análogo, ao feito anteriormente, conclui-se que as forças de inércia e seus efeitos tornam-se dominantes, levando, em um primeiro momento, ao descarte dos termos relativos à viscosidade na equação do movimento e à solução do problema irrotacional. Porém, para muitas situações como já mencionado, os resultados não são satisfatórios em função do que é observado.

O cerne dessa questão reside no fato de não se poder aplicar a condição de não escorregamento a fluidos ideais, levando a desvios em relação a fluidos reais, mas com pequena viscosidade. Todo o problema resume-se em como tratar matematicamente de forma adequada essa situação.

Toda essa breve discussão não tem por objetivo a introdução de uma análise detalhada da resolução de problemas envolvendo escoamentos viscosos incompressíveis, mas visa mostrar as dificuldades inerentes a esse estudo. Além disso, a apresentação de uma visão sistêmica do assunto é necessária para que se possa compreender o vasto campo de pesquisa em Mecânica dos Fluidos ainda a explorar, principalmente no que se refere a problemas de grande interesse prático da indústria.

4.4 – VÓRTICES SINGULARES E VÓRTICES REAIS

Uma vez que o vetor vorticidade é muito útil no estudo numérico que se procederá, há a necessidade de se expressar o campo de velocidades em função do campo de vorticidade (SILVA, 2005). Através da Lei de Biot-Savart, desenvolvida

inicialmente no estudo do eletromagnetismo, consegue-se expressar a velocidade induzida em um ponto do escoamento em função de regiões de concentração de vorticidade.

Os métodos numéricos de discretização da superfície do corpo inserido no escoamento, base do Método dos Painéis se utilizam, dentre outras formas de singularidades, de vórtices singulares distribuídos na superfície do perfil e que induzem velocidades sobre os denominados pontos de controle. Torna-se, então, necessário calcular a velocidade induzida por cada um relativamente aos outros para que se processe a simulação.

Define-se um filamento de vorticidade como um tubo de vorticidade de seção transversal infinitesimal. Vórtices singulares são, então, filamentos em que toda a vorticidade está concentrada em seu núcleo. Partindo-se de um tubo de vorticidade com núcleo finito, ao fazermos o limite de sua seção transversal tender a zero a vorticidade tenderá ao infinito. Para que o sentido dessa representação matemática tenha uma aplicação física para os problemas reais, convencionou-se definir um vórtice singular, com núcleo infinitesimal, porém finito e com um perfil de vorticidade em seu interior. Variando-se esse perfil, temos diferentes modelos de vórtices reais. Caso esse filamento seja uma linha reta, chama-se vórtice linha, extremamente útil na representação de escoamentos bidimensionais onde essas linhas de vorticidade são ortogonais ao plano do movimento do fluido. O vetor vorticidade passa a ter uma única componente e pode ser tratado como um escalar. Além disso, cada vórtice induzirá velocidades apenas no plano do escoamento.

Referindo-se à figura 4.6, a velocidade induzida por um filamento singular de vorticidade de circulação Γ em um ponto P do escoamento, segundo a lei de Biot-Savart, pode ser calculada através da integração das contribuições de cada elemento $d\mathbf{l}$ do filamento:

$$\Delta \mathbf{q} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} \quad \text{e} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} . \quad (4.16)$$

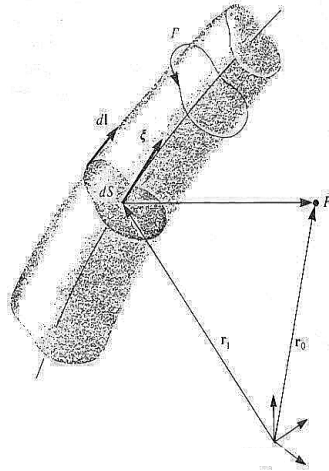


Figura 4.6 – Diagrama esquemático para a aplicação da Lei de Biot-Savart no cálculo da velocidade induzida em um ponto do escoamento (KATZ & PLOTKIN, 2001)

Para um vórtice linha, denominado vórtice potencial no caso 2-D, a componente na direção tangencial (u_θ), usando coordenadas cilíndricas, pode ser expressa por (figura 4.7):

$$\Delta \mathbf{q} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.17)$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (4.18)$$

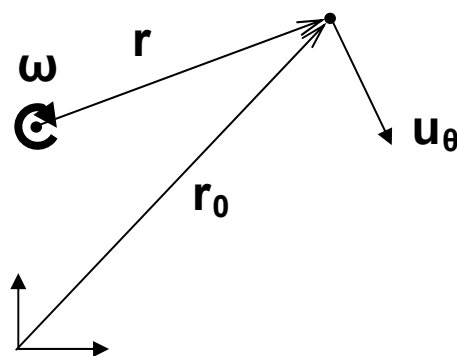


Figura 4.7 – Diagrama esquemático para o cálculo da velocidade induzida por um vórtice linha em um escoamento 2D.

No modelo de vórtice potencial verifica-se uma singularidade quando $r \rightarrow 0$, fazendo a velocidade induzida tender a infinito. Tal característica não é observada nos vórtices reais, que possuem uma velocidade finita em seu núcleo. Sendo assim, foram desenvolvidos modelos que mais se aproximem do que é observado na prática. Dois

modelos de vórtices reais com núcleo finito podem ser visualizados na figura 4.8. O vórtice de Rankine assume uma vorticidade constante no núcleo e nula no restante da região. A descontinuidade existente em $r = R$ provoca uma singularidade na derivada da velocidade na periferia do núcleo. Já o vórtice de Lamb possui uma distribuição Gaussiana de vorticidade a partir do centro do núcleo. Essa é a modelagem que mais se aproxima dos vórtices reais e é muito utilizada na discretização do escoamento em métodos de partículas, como o Método de Vórtices, pois conduz a melhores resultados, uma vez que o campo de velocidades e sua derivada são contínuos e finitos em todo o domínio.

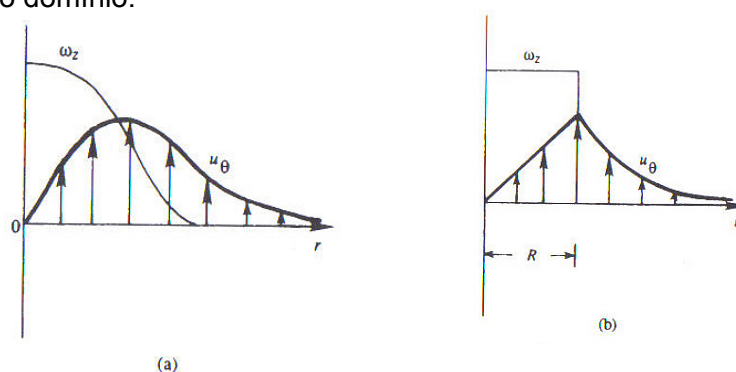


Figura 4.8 – Vórtice de Lamb (a) e Vórtice de Rankine (b)

4.5 – MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

Essa dissertação toma como base para a modelagem do problema os trabalhos de MARTENSEN (1959) e LEWIS (1991). Sendo assim, sua formulação segue os mesmos critérios neles apresentados. Com isso, as possíveis diferenças nos resultados serão função apenas da metodologia de resolução, que é o que se deseja comparar.

4.5.1 – Geometria e Região Fluida

Uma grade de uma turbomáquina axial é composta de várias pás montadas sobre uma roda (ou um tambor rotativo). Toma-se uma seção no contorno da grade, transversal às pás, na altura de sua linha média, de forma a planificar a geometria para análise (Fig. 4.9).

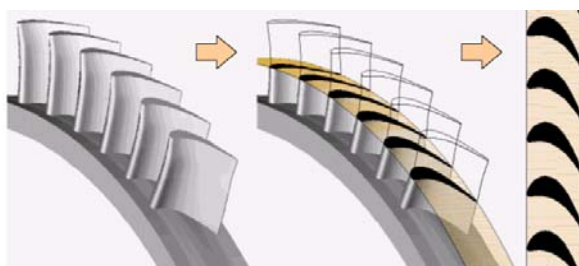


Figura 4.9 – Planificação de uma grade de pás (SILVA, 2005).

A Figura (4.10) apresenta o esquema de uma grade linear infinita, móvel, com espaçamento t entre os perfis aerodinâmicos idênticos, de comprimento de corda igual a l e dispostos com um ângulo de montagem β em relação ao eixo horizontal. O diagrama de velocidades correspondente também é representado (LEWIS, 1991). O escoamento incidente é definido pela velocidade de aproximação uniforme \mathbf{W}_1 e a região fluida, pelo domínio Ω , formado pela união das seguintes fronteiras:

$$\Omega = S_0 \cup S_{\pm 1} \cup S_{\pm 2} \cup \dots \cup S_{\pm \infty} \cup S_{+\infty} \cup S_{-\infty} \quad \text{onde} \quad (4.19)$$

S_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$, representa o contorno exterior dos perfis aerodinâmicos que formam a grade linear infinita; $S_{-\infty}$ representa a superfície infinita a montante da grade ($x \rightarrow +\infty$); $S_{+\infty}$ representa a superfície infinita a jusante da grade ($x \rightarrow -\infty$).

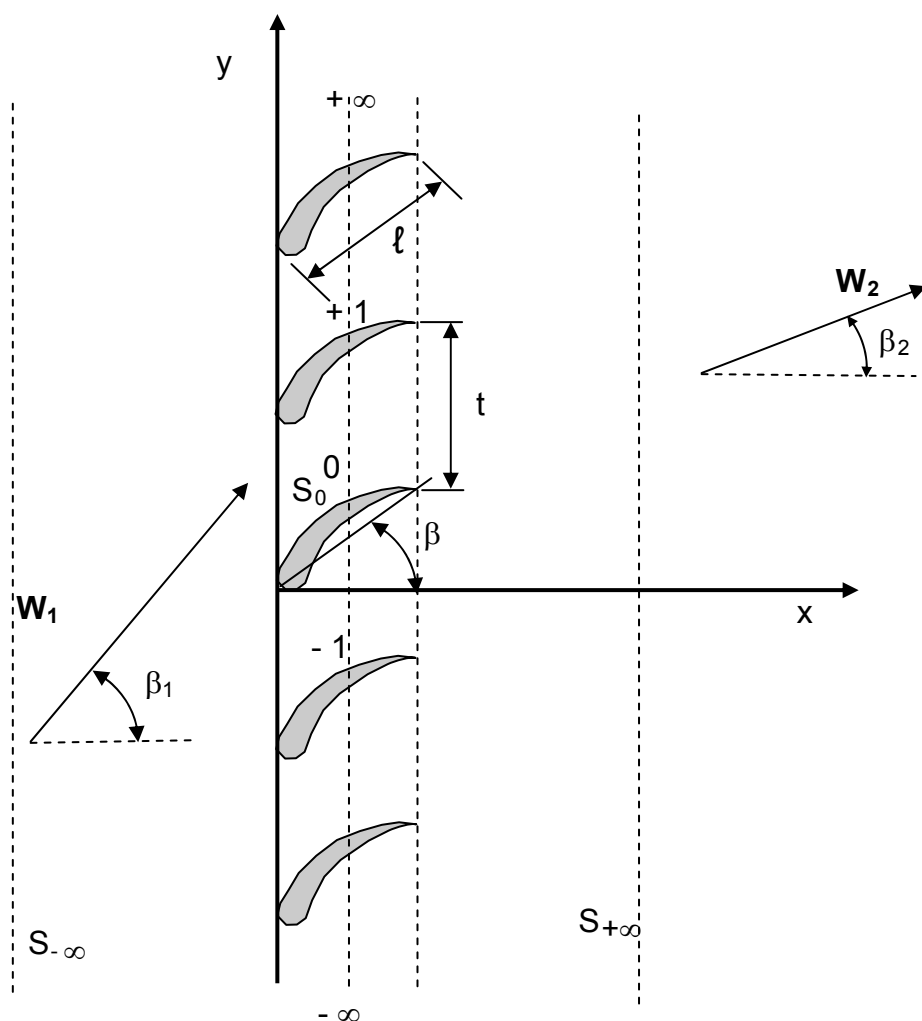


Figura 4.10 – Definição da geometria e da região fluida com o sistema de coordenadas fixo na grade linear infinita (MARTENSEN, 1959)

4.5.2 – Hipóteses Simplificadoras da Formulação Matemática

As hipóteses que sustentam a formulação matemática relacionam-se com as propriedades do fluido, com as propriedades do escoamento e com a geometria da grade linear infinita.

- a) o fluido é ideal;
- b) o escoamento se realiza de forma incompressível;
- c) o escoamento incidente é uniforme, com regime permanente;
- d) o movimento do fluido ao redor da grade linear se processa em uma região fluida bidimensional de grandes dimensões;
- e) todas as perturbações ocorridas no escoamento devem-se, exclusivamente, à presença da grade linear, que está montada com infinitos perfis aerodinâmicos;
- f) o efeito da rotação não se faz presente na grade linear.

A partir dessas hipóteses e com a geometria definida, segue-se com a formulação matemática para o escoamento bidimensional, incompressível, invíscido e em regime permanente em torno de uma grade linear montada com infinitos perfis aerodinâmicos idênticos, de forma arbitrária e igualmente espaçados.

4.5.3 – Formulação Matemática do Problema de Valores de Contorno (PVC)

O fenômeno é governado pelas equações originadas dos princípios de conservação. As expressões desenvolvidas nesse capítulo de forma geral e que expressam a conservação da massa (Eq. 4.3) e a conservação da quantidade de movimento linear (Navier-Stokes, Eq. 4.7) podem ser simplificadas de acordo com as hipóteses formuladas além de reescritas de acordo com a representação da Figura 4.10. A notação indicial é utilizada nessas equações e $\mathbf{q}(u, v)$ é o vetor velocidade do fluido.

- Conservação da Massa

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0; \quad (4.20)$$

- Conservação da Quantidade de Movimento Linear

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (4.21)$$

As condições de contorno devem ser estabelecidas para se completar a formulação. Na superfície dos perfis aerodinâmicos verifica-se a condição de aderência, composta pelas condições de impenetrabilidade e de escorregamento nulo.

Na superfície dos perfis (S_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$):

$$q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (4.22)$$

$$q_t = \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (4.23)$$

Por fim, a grandes distâncias ($x \rightarrow \pm \infty$), assume-se que a perturbação causada pela grade linear no escoamento, tanto a montante, como a jusante, deve-se desfazer gradualmente.

$$\mathbf{q}(-\infty, y) = \mathbf{W}_1 \quad (\text{infinito a montante}) \quad (4.24)$$

$$\mathbf{q}(+\infty, y) = \mathbf{W}_2 \quad (\text{infinito a jusante}) \quad (4.25)$$

4.5.4 – Adimensionalização do Problema de Valores de Contorno Proposto

Em mecânica dos fluidos, é sempre conveniente a adimensionalização do problema em estudo. Essa prática contempla inúmeras vantagens, além da trivial que consiste na generalização da formulação para uma gama de problemas semelhantes. Entre inúmeras vantagens, destaca-se o auxílio na solução do modelo, indicando a dependência entre as grandezas, sugerindo aquelas mais relevantes e facilita a

apresentação dos resultados pela relação funcional existente entre as grandezas. Isso ajuda, em muito, a comparação com outros trabalhos e com dados experimentais.

Devem-se escolher escalas características de comprimento, velocidade e tempo, através de respectivas grandezas características para adimensionalizar as equações constitutivas. No caso em questão, escolhem-se como comprimento característico, a corda l do perfil, como velocidade característica, a velocidade W_1 de incidência do escoamento uniforme e como tempo característico, a razão entre os anteriores.

As equações (4.20) e (4.21) adimensionalizadas e na forma vetorial, tornam-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{q} \quad (4.27)$$

4.5.5 – Formulação do Problema Potencial

A solução para o escoamento potencial é o que se busca nesse trabalho. Ela também é muito importante para os demais métodos numéricos, como o Método de Vórtices, uma vez que, a partir dela serão gerados vórtices nascentes que se desprendem do perfil e penetram no interior do fluido. Para se desenvolver uma solução numérica do problema potencial, torna-se necessária a sua formulação matemática para o caso da grade linear.

Tendo como referência a figura 4.11, que corresponde a uma adaptação do problema original (Fig. 4.10), uma vez que os efeitos viscosos não estão presentes, expressa-se o problema de valor de contorno em função do potencial de velocidades ϕ . A partir das equações (4.12), (4.13) e (4.14), temos:

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ na região fluida;} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ no contorno exterior de cada perfil;} \quad (4.29)$$

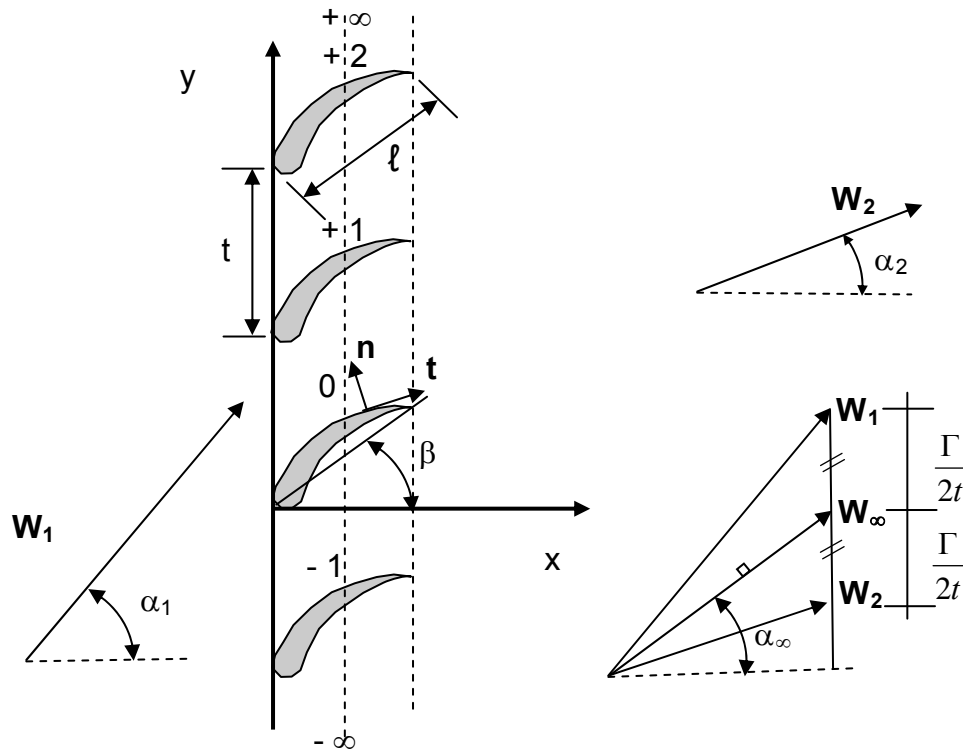


Figura 4.11 –Grade linear infinita e diagrama de velocidades para a formulação do Problema Potencial (LEWIS, 1991)

$$\mathbf{q}(-\infty, y) = \mathbf{W}_1, \text{ no infinito, a montante da grade linear;} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{q}(+\infty, y) = \mathbf{W}_2, \text{ no infinito, a jusante da grade linear.} \quad (4.31)$$

A velocidade do escoamento não perturbado pela grade é \mathbf{W}_∞ e é definida como a média aritmética vetorial entre a velocidade incidente e de saída da grade,

$$\mathbf{W}_\infty = \frac{\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2}{2}. \quad (4.32)$$

Sendo Γ a circulação em torno do perfil de referência da grade, as velocidades \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 relacionam-se com a velocidade \mathbf{W}_∞ , da seguinte maneira (Fig. 4.11):

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_\infty + \frac{i\Gamma}{2t} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_\infty - \frac{i\Gamma}{2t} \quad (4.33)$$

A utilização dessa formulação coma a condição de contorno de impenetrabilidade para a solução do escoamento potencial através do Método dos Painéis em alguns casos não conduz a resultados convergentes. Uma vez que o potencial de velocidade é obtido pela distribuição de vorticidade na superfície do corpo, o problema de valor de contorno anterior pode ser modificado com a substituição da equação (4.28) pela condição de contorno de Dirichlet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{t}} = 0, \text{ no contorno exterior de cada perfil.} \quad (4.34)$$

Essa formulação, proposta inicialmente por MARTENSEN (1959) e seguida tanto por LEWIS (1991), como por KATZ & PLOTKIN (2001), em alguns casos, mostra-se mais coerente em relação ao seu significado físico em função do tipo de singularidade utilizado. Essa condição de contorno, menos direta, pode ser interpretada como a garantia de ser nulo o potencial de velocidades no interior do corpo. A solução para esse problema recai, então, em uma equação integral, a partir da condição de ser nula a velocidade tangencial à superfície em cada ponto. Esta integral é, então, transformada em um sistema de equações lineares que apresenta as vorticidades como incógnitas. A partir de sua determinação, calculam-se os campos de pressão e velocidades.

A solução para o problema potencial, utilizando a identidade de Green, pode ser dada por (KATZ & PLOTKIN,2001):

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{Corpo+esteira}} -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{\partial(\ln \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_{\text{Corpo}} \frac{\sigma}{2\pi} \ln \mathbf{r} dS + \phi_{\infty} \quad (4.35)$$

Nessa equação os termos do lado direito podem ser interpretados, na respectiva ordem, como o potencial de um vórtice de intensidade γ , o potencial devido a uma fonte de intensidade σ e o potencial do escoamento externo (uniforme). Aplicando a condição de contorno de Neumann (4.29):

$$\left\{ \int_{\text{Corpo+esteira}} -\frac{\gamma}{2\pi} \nabla \left[\frac{\partial(\ln \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right] dS + \int_{\text{Corpo}} \frac{\sigma}{2\pi} \nabla [\ln \mathbf{r}] dS + \nabla \phi_{\infty} \right\} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.36)$$

Essa solução é utilizada na implementação numérica por KATZ & PLOTKIN (2001), com a discretização do corpo através de painéis e sobre os quais são distribuídas as singularidades. As condições de contorno são impostas aos pontos de

controle dos painéis. A solução do problema reduz-se, então à resolução de um sistema de equações lineares onde as incógnitas são as intensidades das singularidades escolhidas. Com sua determinação, o campo de velocidades pode enfim ser obtido.

LEWIS (1986) segue a metodologia conhecida como método de MARTENSEN (1959) para a solução do escoamento potencial. A técnica utilizada aplica a condição de Dirichlet em cada ponto da superfície, levando à seguinte equação integral, que iguala a velocidade do escoamento na proximidade da superfície do corpo a zero.

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_m) + \frac{1}{2\pi} \oint k(s_m, s_n)\gamma(s_n)ds_n + \mathbf{W}_\infty \cdot \mathbf{ds}_m = 0 \quad (4.37)$$

Nessa equação, γ corresponde à vorticidade por unidade de área distribuída sobre a superfície do perfil, s_m e s_n , elementos infinitesimais de área e $k(s_m, s_n)$ a influência do elemento s_n sobre o elemento de área s_m . O primeiro termo do lado direito representa a descontinuidade da velocidade tangencial entre o centro da folha de vorticidade e a vizinhança do corpo, o segundo termo corresponde às velocidades tangenciais induzidas pela vorticidade da superfície sobre cada ponto desta e o último termo é a contribuição do escoamento uniforme de velocidade \mathbf{W}_∞ paralela à superfície em cada ponto (Fig. 4.12).

Demonstra-se que a interferência da grade pode ser incluída no escoamento em torno de um único perfil de referência, com as equações corrigidas por um termo que traduz a periodicidade existente nesse tipo de problema. Esse caminho será seguido na implementação numérica do estudo para a grade linear de uma turbomáquina (MARTENSEN, 1959 e LEWIS, 1991).

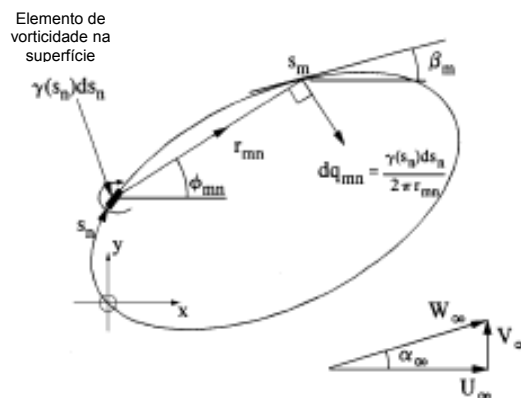


Figura 4.12 – Modelo para a formulação integral do problema potencial para um corpo bidimensional representado por de superfícies de vorticidade. (LEWIS, 1991)

CAPÍTULO 5

MÉTODO DOS PAINÉIS

FUNDAMENTOS TEÓRICOS E IMPLEMENTAÇÃO

O Método dos Painéis (KATZ & PLOTKIN, 2001), diretamente aplicado, constitui-se em poderosa ferramenta para a simulação de escoamentos potenciais, onde os efeitos viscosos são desprezados. Porém, quando for necessária a consideração da viscosidade, este método mostra-se muito útil na representação de corpos de geometrias de qualquer tipo inseridos no escoamento, uma vez que a vorticidade é produzida a partir da parede do contorno.

5.1 INTRODUÇÃO

O Método dos Painéis pode ser resumido como uma técnica numérica de discretização da superfície de um corpo através da utilização de painéis planos ou curvos (segmentos no caso 2D) sobre os quais distribuem-se singularidades, que podem ser fontes, vórtices, dipolos, ou associação desses em casos mais complexos. A escolha da singularidade apropriada é função da condição de contorno especificada. De acordo com LEWIS (1991), para o estudo do escoamento potencial, ambas as técnicas, por ele denominadas de “painéis fonte”, como a das “superfícies de vorticidade”, são adequadas, conduzindo aos mesmos resultados. Na primeira, a condição de contorno especificada é a de Neumann (impenetrabilidade), já na segunda, a condição de Dirichlet é satisfeita. Essa escolha, apesar de possuir um certo grau de arbitrariedade, deve levar em consideração o fenômeno físico estudado (SILVA, 2005), além de possibilitar a correta representação do escoamento em análise, como na hipótese de ser necessária a simulação de uma assimetria no escoamento (escoamento ao redor de perfis aerodinâmicos com desenvolvimento de força de sustentação). Para aplicações em que se utilizem o Método dos Vórtices acoplado ao Método dos Painéis (PEREIRA, 2002 e SILVA, 2005), a distribuição de vorticidade sobre a superfície do perfil tende a ser a escolha natural.

De acordo com LEWIS (1991), em um escoamento potencial, uma grande vantagem consiste em a vorticidade por unidade de comprimento do painel em simulações 2D com a utilização da teoria de MARTENSEN (1959) corresponder à velocidade próxima à superfície, sendo esse resultado diretamente obtido sem nenhum cálculo adicional. (Fig. 5.1)

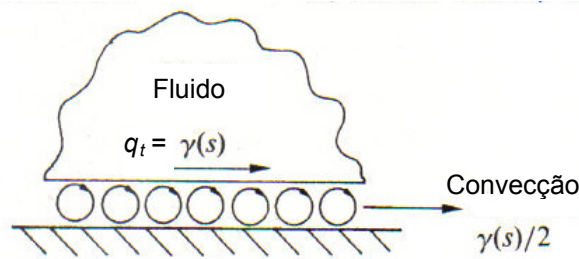


Figura 5.1 – Escoamento potencial próximo a uma superfície com distribuição de vórtices em sua superfície. A grandeza s representa a posição ao longo da superfície (LEWIS, 1991).

Quanto à interpretação física da evolução de escoamentos reais, a utilização de vórtices como singularidades para a representação da superfície se mostra mais condizente com a realidade. Todo fluido possui viscosidade, mesmo que pequena. Assim as partículas em contato com as superfícies sólidas permanecem solidárias com essa. Como já exposto, tradicionalmente, estudam-se os escoamentos de fluidos reais divididos em duas partes: o escoamento interno, dentro da chamada camada limite, onde os efeitos viscosos são intensos e o escoamento externo, afastado da superfície, que pode ser tratado como irrotacional. Nesse contexto, o escoamento potencial pode ser modelado pelo limite para o qual os escoamentos reais são conduzidos ao levarmos o número de Reynolds para o infinito.

Acerca das singularidades, podem estar concentradas no ponto de controle de cada painel, ou distribuídas ao longo do painel com densidade constante, linear ou com alguma suposição de ordem superior. Tudo dependerá da precisão requerida aliada ao custo computacional envolvido e complicações analíticas advindas da escolha.

Para escoamentos potenciais, o método dos painéis é extremamente adequado, representando uma técnica de simples implementação e com resultados bem confiáveis. Com relação a escoamentos ao redor de aerofólios, mesmo que no estudo esteja sendo considerada a viscosidade, o conhecimento da solução potencial é importante e integra a técnica em que se utiliza o Método dos Painéis acoplado ao Método dos Vórtices (LEWIS, 1991).

A escolha da condição de contorno (4.29) ou (4.34) na superfície do corpo, levando às equações integrais (4.36) ou (4.37), é função do tipo de singularidade utilizada e da interpretação física do fenômeno (LEWIS, 1991). Com a utilização da

condição de impenetrabilidade temos o denominado problema de Neumann. Já a solução com a aplicação da condição de escorregamento nulo sobre a superfície consiste no problema de Dirichlet. Por fim, ainda há a possibilidade de uma combinação dessas duas condições na obtenção de uma solução.

Não obstante haver diferenças nas técnicas de resolução, a implementação da solução numérica de um escoamento potencial através do método dos painéis segue, basicamente, a metodologia representada no fluxograma a seguir (Fig. 5.2).

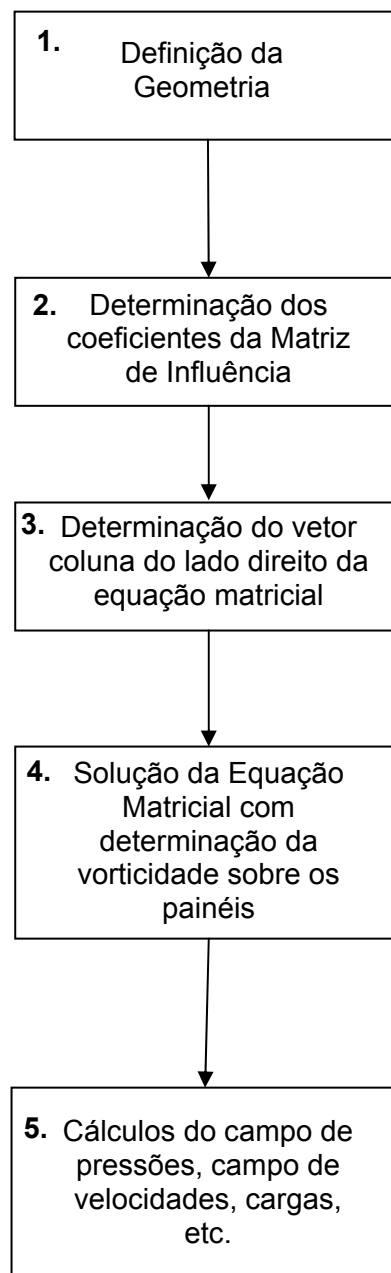


Figura 5.2 – Fluxograma básico de implementação do Método dos Painéis

A explicação de cada etapa é empreendida nas seções seguintes, destacando-se as principais diferenças entre as técnicas estudadas.

5.2 DISCRETIZAÇÃO DA GEOMETRIA

Na primeira etapa do algoritmo, a superfície do corpo imerso no escoamento é representada por segmentos de reta entre um número finito de pontos dessa superfície. Cada segmento constitui-se em um painel. A figura 5.3 ilustra esse procedimento. Quanto maior o número de painéis, mais próximo da superfície original estará a poligonal resultante (caso bidimensional). A escolha da quantidade de painéis está relacionada com a precisão a ser obtida, porém observa-se que, na prática, a partir de uma certa quantidade, o aumento do número de painéis não mais interfere de forma importante na solução obtida. Os erros numéricos provenientes de outras fontes de incertezas passam a ser predominantes.

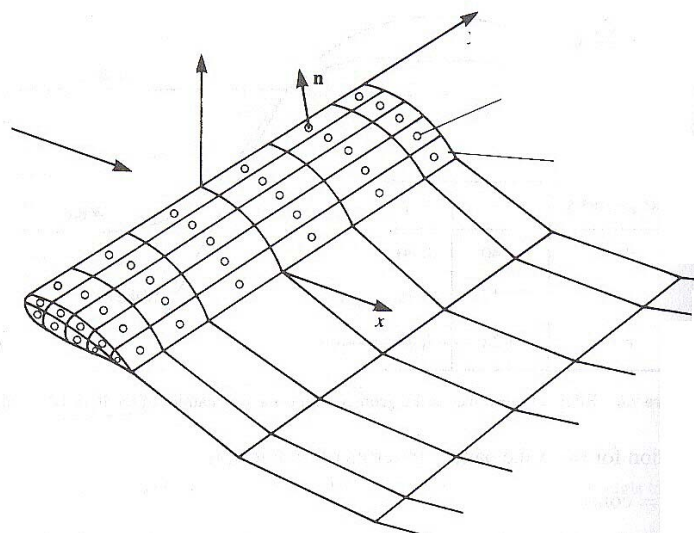


Figura 5.3 – Representação de painéis colocados na superfície de um aerofólio

Para se obter um maior refinamento e, conseqüentemente, melhor acurácia procura-se concentrar um maior número de painéis próximos tanto ao bordo de fuga, como ao de ataque do aerofólio. De acordo com KATZ & PLOTKIN (2001) um método freqüentemente utilizado com bons resultados está ilustrado na figura 5.4. Nesse caso, trata-se de um aerofólio simétrico, com a corda representada por uma linha reta. Os pontos extremos dos painéis são numerados em sentido horário, a partir do bordo de fuga. Devido ao perfil simétrico, os pontos de controle dos perfis superior e inferior encontram-se sobre a mesma abscissa x .

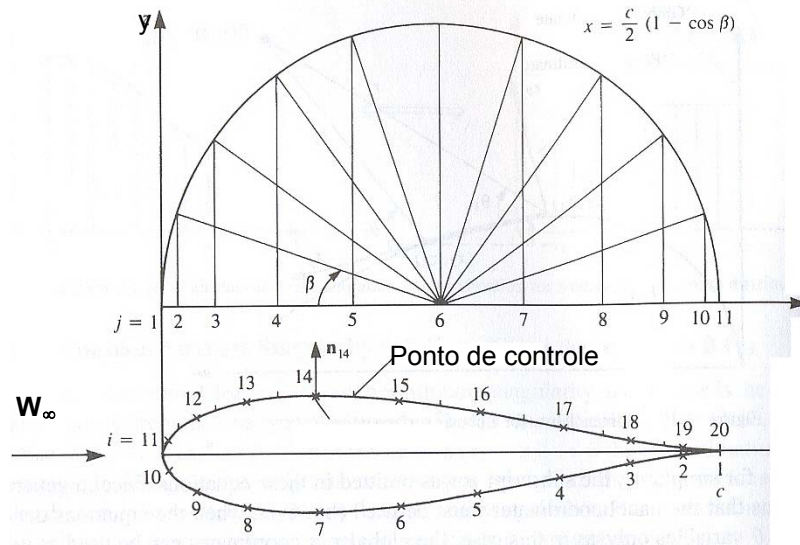


Figura 5.4 – Espaçamento dos painéis em um aerofólio através do método “full-cossine” (KATZ & PLOTKIN, 2001)

Para as turbomáquinas, maior interesse se concentra nos perfis assimétricos, pois são largamente utilizados em seus projetos. A figura 5.5 (LEWIS, 1991) é mais conveniente para a ilustração desse caso.

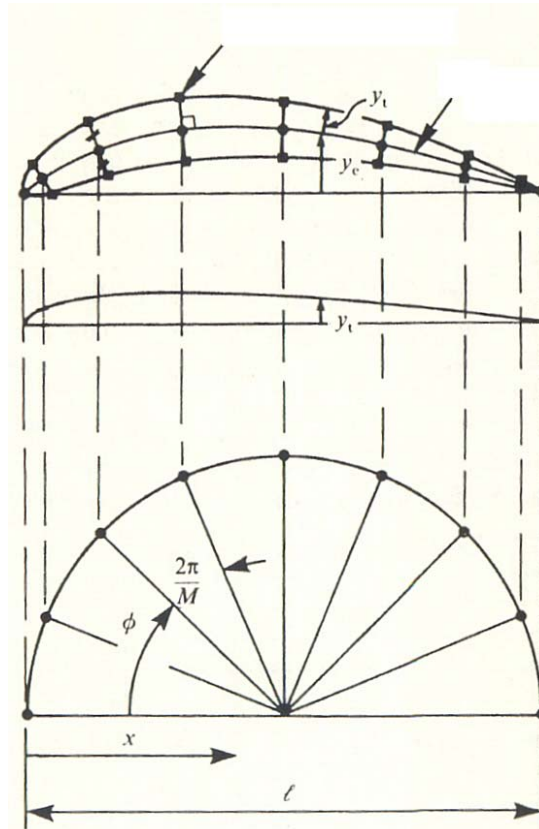


Figura 5.5 – Método de discretização para um aerofólio assimétrico (LEWIS, 1991)

Em ambos os casos, o semicírculo de diâmetro igual à corda é dividido no mesmo número de painéis desejados para a simulação, ou seja, para M painéis, basta dividir o semicírculo em $M/2$ setores de ângulo igual a $\varphi = \pi/M$.

A abscissa x_c de cada ponto extremo do painel projetado sobre a linha de “camber” é dada por

$$x_c = \frac{l}{2}(1 - \cos \varphi). \quad (5.1)$$

As ordenadas da linha de “camber” (y_c) e da espessura do perfil (y_t) são tabeladas em função de x_c , para cada tipo de aerofólio:

$$y_c = f(x) \quad , \quad (5.2)$$

$$y_t = g(x) \quad .$$

Sendo θ_c o ângulo de inclinação do perfil no ponto $(x_c; y_c)$, as coordenadas dos pontos extremos de cada painel podem ser calculadas pelas expressões:

$$x = x_c \pm y_t \operatorname{sen} \theta_c \quad , \quad (5.3)$$

$$y = y_c \pm y_t \operatorname{cos} \theta_c \quad .$$

No caso de utilização de perfis NACA, há várias referências disponíveis para a obtenção da função que representa o perfil desejado, como em LANDSON *et al.* (1996) ou em CARMICHAEL (2001).

É comum, na implementação dos programas, utilizarem-se transformações de coordenadas para simplificações dos cálculos numéricos. Trabalha-se com dois sistemas de coordenadas: um absoluto, fixo ao corpo, denominado global e outro, local, referente ao painel considerado. A transformação utilizada para a conversão das coordenadas entre os dois sistemas é representada por uma operação matricial de rotação dos eixos, conforme abaixo (Figura 5.6):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\operatorname{sen} \alpha_i \\ \operatorname{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

As coordenadas (x',y') referem-se ao referencial local e o subscrito i , ao painel considerado, onde $i = 1, \dots, M$. O ponto (x_0,y_0) corresponde à origem do sistema de coordenadas local, geralmente colocado sobre o ponto inicial do painel considerado. Para a velocidade induzida em P, pelo painel i , temos:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

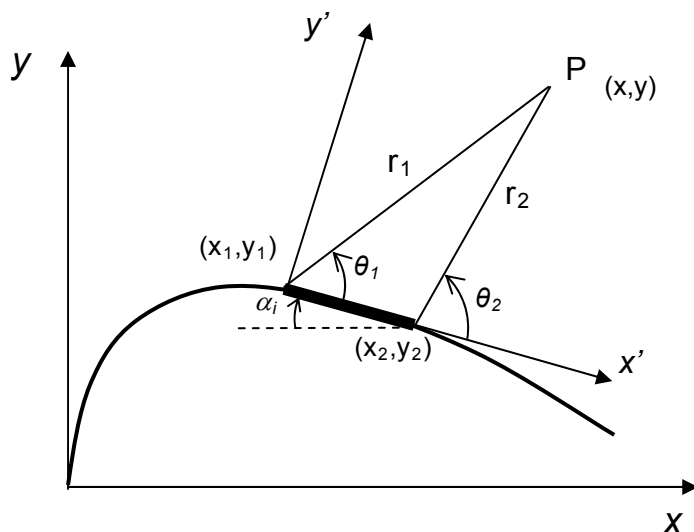


Figura 5.6 – Coordenadas globais do perfil e locais do painel: determinação da velocidade induzida no ponto P por um painel da superfície do corpo. (KATZ & PLOTKIN, 2001)

No caso da grade de uma turbomáquina, há de se considerar também a inclinação de montagem da grade, que representa uma rotação do eixo global do ângulo correspondente a essa inclinação (Fig. 5.7).

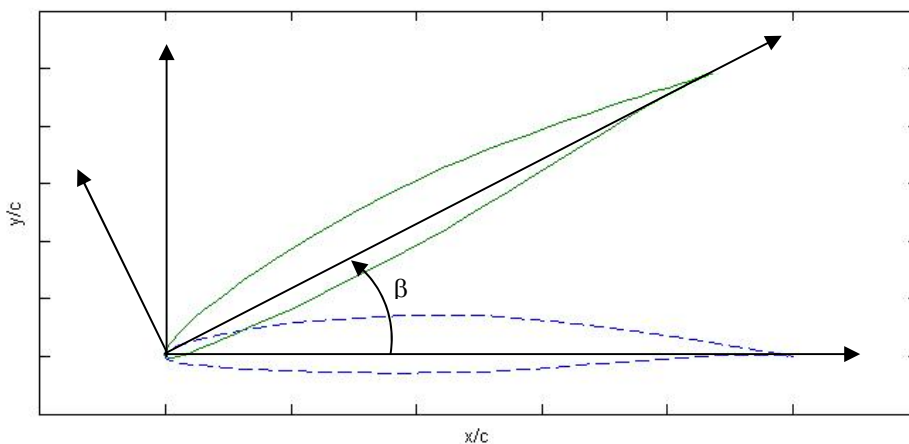


Figura 5.7 – Rotação de eixos de acordo com a inclinação β da grade.

Sendo assim as coordenadas dos pontos extremos de cada painel do perfil considerado deve ser expresso em função do eixo global, já considerando o ângulo β de inclinação da grade. A seguinte equação matricial representa essa transformação:

$$\begin{pmatrix} x_{pg_i} \\ y_{pg_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p_i} \\ y_{p_i} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Nessa equação os sub-índices “pg” e “p” representam, respectivamente, as coordenadas do ponto do painel a partir de um referencial global e as coordenadas a partir de um referencial preso ao perfil no bordo de ataque. Maiores detalhes sobre as transformações lineares para a mudança do sistema de eixos coordenados encontram-se no Apêndice A.

Com essa representação, a equação integral (4.35) ou (4.36) que necessita ser resolvida transforma-se em um somatório de elementos discretos.

A figura 5.8 ilustra esse procedimento. Conforme técnica de Lewis, para a solução numérica da integral na equação (4.36), divide-se a superfície através de um número finito M de segmentos de reta de comprimento Δs_n , transformando a equação integral em uma equação linear. Os pontos centrais desses segmentos são denominados de pontos pivotais ou pontos de controle, nos quais são concentradas as singularidades (no caso vórtices) de cada painel. Nessa etapa determina-se também as propriedades geométricas do perfil representado, necessárias à solução.

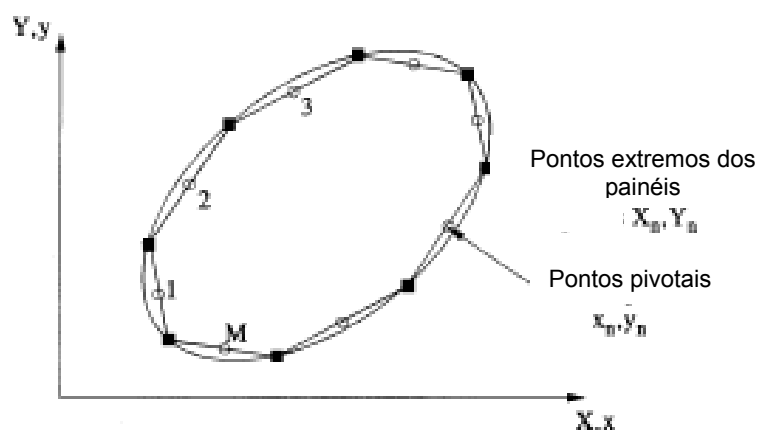


Figura 5.8 – Representação da superfície do corpo 2D por segmentos de reta, com identificação dos pontos pivotais (LEWIS, 1991). Nesse caso a numeração dos painéis se faz no sentido anti-horário, a partir do bordo de ataque.

A técnica de KATZ & PLOTKIN (2001) em pouco difere da apresentada, apenas detalhes quanto à identificação dos painéis e cálculos do ângulo de inclinação são observados, mas isso é devido à forma de implementação do código de programação.

5.2.1 - Singularidades

A escolha das singularidades que irão representar o perfil de referência é de suma importância, pois interfere decisivamente no método de resolução do problema e na acurácia dos resultados. Após a discretização da geometria em painéis retos, são distribuídas singularidades ao longo de sua superfície. No caso em questão, da mesma maneira que em PEREIRA (2002) e em SILVA (2005), são utilizados vórtices. Uma vez escolhido o tipo de singularidade, ainda há de se definir como esta será distribuída ao longo do perfil. Várias possibilidades são encontradas nas diversas referências consultadas.

LEWIS (1991) concentra a vorticidade de cada painel sobre seu ponto de controle, através de um vórtice linha. Para obter melhores resultados com esse modelo, lança mão de artifícios como a correção quanto à curvatura do perfil, utilização de sub-painéis ou técnicas de condicionamento da matriz de coeficientes de acoplamento (correção da diagonal oposta) que deverá ser invertida.

KATZ & PLOTKIN (2001) sugerem várias possibilidades, aumentando progressivamente a ordem da singularidade empregada em busca de refinamento dos resultados. No caso da utilização de vórtices, utilizam vorticidade uniforme ou linear sobre a superfície, que, no segundo caso, consiste em uma singularidade de segunda ordem, com resultados previsivelmente melhores (Fig. 5.9).

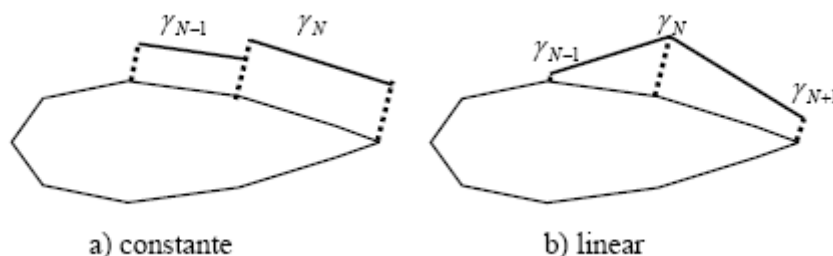


Figura 5.9 – Distribuição de singularidade (SILVA, 2005). Na figura, N é um índice representativo do painel considerado.

Nos trabalhos analisados, PEREIRA (2002) utiliza a metodologia proposta pelo primeiro, já SILVA (2005) segue pela utilização da distribuição linear de vórtices sobre o perfil. Singularidades de ordem superior também podem ser aplicadas, porém sempre com uma maior complexidade analítica (GOMES PEREIRA, 2005).

A maior diferença na forma de implementação dos métodos reside no cálculo das velocidades induzidas, quer sobre a superfície, quer no interior da massa fluida, de acordo com a forma de distribuição de vorticidade sobre os painéis. Dessa forma temos, para o cálculo das velocidades induzidas diversas expressões, que se tornam cada vez mais complexas, quanto maior for o grau da singularidade utilizada. Além disso, quando se insere o conceito de periodicidade do escoamento para a análise em grades lineares de turbomáquinas, a complexidade analítica tende a aumentar consideravelmente, devido às funções hiperbólicas que passam a ser inseridas nas expressões para o cálculo analítico. A seguir, apresenta-se um resumo das equações utilizadas para a determinação das velocidades induzidas e que serão utilizadas na etapa de determinação dos coeficientes da matriz de influência, de acordo com o algoritmo utilizado para a implementação do método. Inicialmente se desenvolvem as expressões para um perfil isolado e, em seguida, acrescenta-se a modificação para se lidar com grades lineares.

- Para uma distribuição concentrada de vorticidade sobre os painéis (LEWIS, 1991).

Referindo-se à figura 4.12, a partir da lei de Biot-Savart (Eq. 4.15), a velocidade induzida em um ponto m da superfície por um elemento de vórtice de densidade $\gamma(s_n)ds_n$, onde $\gamma(s_n)$ é a densidade de vorticidade do elemento s_n , situado em n é dada por:

$$dq_{mn} = \frac{\gamma(s_n)ds_n}{2\pi r_{mn}}. \quad (5.7)$$

Considerando Δl o comprimento do painel n e β_m , sua inclinação em relação ao sistema de coordenadas local, têm-se para as componentes u e v da velocidade assim induzida por um vórtice unitário, as expressões:

$$u = \frac{\Delta l}{2\pi} \left\{ \frac{(y_m - y_n)\cos\beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right\}, \quad (5.8)$$

$$v = \frac{\Delta l}{2\pi} \left\{ \frac{(x_m - x_n) \text{sen } \beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right\}. \quad (5.9)$$

Ao introduzir-se a interferência da grade sobre o escoamento, de forma a resumir o estudo a um único perfil, as expressões anteriores são modificadas da seguinte forma (t corresponde ao espaçamento entre os perfis):

$$u = \frac{\Delta l}{2t} \left\{ \frac{\text{sen } \frac{2\pi}{t}(y_m - y_n)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x_m - x_n) - \cos \frac{2\pi}{t}(y_m - y_n)} \right\}, \quad (5.10)$$

$$v = \frac{\Delta l}{2t} \left\{ \frac{-\text{senh } \frac{2\pi}{t}(x_m - x_n)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x_m - x_n) - \cos \frac{2\pi}{t}(y_m - y_n)} \right\}. \quad (5.11)$$

- Para uma distribuição constante de vorticidade sobre os painéis (KATZ & PLOTKIN, 2001).

Com referência à figura 5.10, onde γ é a vorticidade por unidade de área (ou por unidade de comprimento no caso 2D) o potencial de velocidades ϕ e as componentes u e v da velocidade induzida são dados pela solução das seguintes integrais:

$$\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \tan^{-1} \frac{y}{x - x_p} dx_p, \quad (5.12)$$

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \frac{y}{(x - x_p)^2 + y^2} dx_p, \quad (5.13)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \frac{x - x_p}{(x - x_p)^2 + y^2} dx_p. \quad (5.14)$$

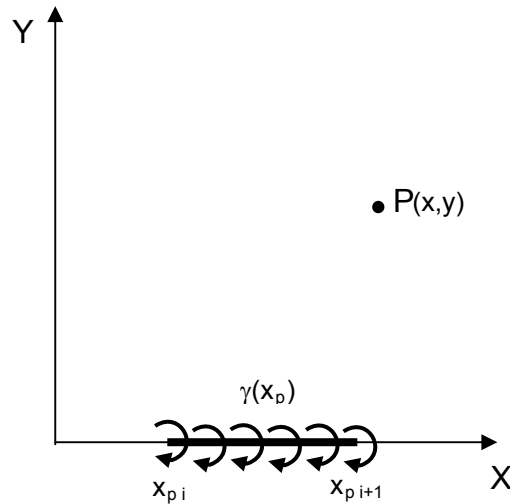


Figura 5.10– Distribuição constante de vorticidade (coordenadas do painel)

A solução dessas integrais leva às componentes das velocidades induzidas pelo painel em questão sobre um ponto (x,y) qualquer:

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y - y_{p_{i+1}}}{x - x_{p_{i+1}}} - \tan^{-1} \frac{y - y_{p_i}}{x - x_{p_i}} \right], \quad (5.15)$$

$$v = -\frac{\gamma}{4\pi} \left[\ln \frac{(x - x_{p_i})^2 + (y - y_{p_i})^2}{(x - x_{p_{i+1}})^2 + (y - y_{p_{i+1}})^2} \right]. \quad (5.16)$$

As integrais (5.15 e 5.16) para o caso da grade, são dadas, em coordenadas do painel, por:

$$u = \frac{\gamma}{2t} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{t}(y)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y)} dx_p, \quad (5.17)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2t} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi}{t}(x - x_p)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y)} dx_p. \quad (5.18)$$

onde t representa o espaçamento entre os perfis. A solução analítica dessas integrais fornece, então:

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \left[-\frac{1}{\pi/t} \left(\tan^{-1} \left(\cot \left(\frac{\pi}{t} y \right) \tanh \left(\frac{\pi}{t} (x_{p_{i+1}} - x) \right) \right) \right) - \tan^{-1} \left(\cot \left(\frac{\pi}{t} y \right) \tanh \left(\frac{\pi}{t} (x_{p_i} - x) \right) \right) \right], \quad (5.19)$$

$$v = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi/t} \left(\log \left(\cos \left(\frac{2\pi}{t} y \right) - \cosh \left(\frac{2\pi}{t} (x_{p_{i+1}} - x) \right) \right) \right) - \log \left(\cos \left(\frac{2\pi}{t} y \right) - \cosh \left(\frac{2\pi}{t} (x_{p_i} - x) \right) \right) \right]. \quad (5.20)$$

- Para uma distribuição linear de vorticidade sobre os painéis (Fig. 5.11), de acordo com KATZ & PLOTKIN (2001).

Considerando, inicialmente, o escoamento ao redor de um único aerofólio, as equações empregadas são as seguintes:

$$\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} x_p \tan^{-1} \frac{y}{x - x_p} dx_p, \quad (5.21)$$

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} \frac{x_p y}{(x - x_p)^2 + y^2} dx_p, \quad (5.22)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} \frac{x_p (x - x_p)}{(x - x_p)^2 + y^2} dx_p. \quad (5.23)$$

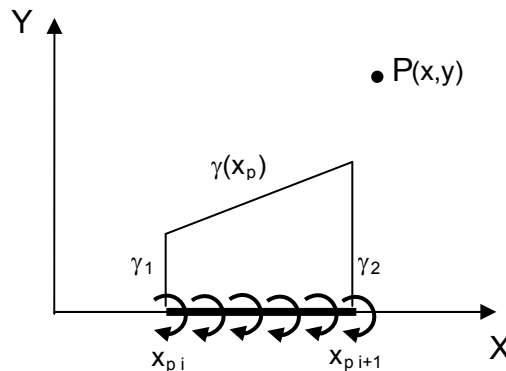


Figura 5.11– Distribuição linear de vorticidade (coordenadas do painel)

Utilizando a notação apresentada na figura referenciada, têm-se como solução para as velocidades induzidas, as expressões:

$$u = \frac{\gamma_1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y}{x - x_{p_{i+1}}} - \tan^{-1} \frac{y}{x - x_{p_i}} \right] + \frac{\gamma_2}{4\pi} \left[y \ln \frac{(x - x_{p_i})^2 + y^2}{(x - x_{p_{i+1}})^2 + y^2} + \right. \\ \left. + 2x \left(\tan^{-1} \frac{y}{x - x_{p_{i+1}}} - \tan^{-1} \frac{y}{x - x_{p_i}} \right) \right] \quad (5.24)$$

$$v = -\frac{\gamma_1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_{p_i})^2 + y^2}{(x - x_{p_{i+1}})^2 + y^2} - \frac{\gamma_2}{2\pi} \left[\frac{x}{2} \ln \frac{(x - x_{p_i})^2 + y^2}{(x - x_{p_{i+1}})^2 + y^2} + (x_{p_i} - x_{p_{i+1}}) + \right. \\ \left. + y \left(\tan^{-1} \frac{y}{x - x_{p_{i+1}}} - \tan^{-1} \frac{y}{x - x_{p_i}} \right) \right] \quad (5.25)$$

As equações (5.24) e (5.25) já demonstram a complexidade analítica que se enfrenta na implementação da solução no caso de um único aerofólio. Tal fato torna-se dramático quando da adaptação do método para a aplicação em grades lineares de perfis aerodinâmicos, pois a solução das integrais que calculam as componentes da velocidade induzida representam a maior dificuldade encontrada e de difícil resolução direta. Nesse caso, as integrais a resolver aparecem nas expressões seguintes (t é o espaçamento entre os perfis):

$$u = \frac{\gamma}{2t} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} \frac{x \operatorname{sen} \frac{2\pi}{t}(y)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y)} dx_p, \quad (5.26)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2t} \int_{x_{p_i}}^{x_{p_{i+1}}} \frac{x \operatorname{senh} \frac{2\pi}{t}(x - x_p)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y)} dx_p. \quad (5.27)$$

A solução na análise de grades lineares de turbomáquinas, tanto com vorticidade constante concentrada no ponto de controle, quanto com distribuição uniforme sobre todo o perfil, não apresenta dificuldades em sua implementação. Já no caso de distribuição linear, que pode ser aplicada com relativa facilidade no caso de um único aerofólio (SILVA, 2005), ao se considerar a modificação das equações (5.17) e (5.18) para incluir o efeito da interferência da grade, a solução analítica das integrais resultantes torna-se extremamente complexa, de difícil implementação. Dois caminhos são possíveis e testados nesse trabalho: a integração numérica, que adicionará erros numéricos, inexistentes no caso analítico, ou uma aproximação que calcula a vorticidade média de cada painel como a média aritmética da vorticidade em seus extremos. A segunda opção constitui-se em um desenvolvimento novo, contribuição dessa dissertação e que, a princípio, apresenta boas perspectivas. Acredita-se que esse método, além de possibilitar um aumento de ordem de singularidade para o estudo de grades de turbomáquinas, poderá, aliado a outros refinamentos, resolver o problema de convergência da solução no bordo de fuga de aerofólios muito esbeltos.

5.3 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE INFLUÊNCIA E SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL

Seguindo o algoritmo da figura 5.2, as etapas 2 e 3 consistem, respectivamente, na determinação dos coeficientes de acoplamento da Matriz de Influência e dos termos independentes do sistema de equações lineares em que se transformará o problema. Representa os cálculos principais envolvidos no método. Nessa fase residem as diferenças fundamentais entre as técnicas de resolução e que vão levar, no estudo da grade de turbomáquinas, às principais dificuldades de implementação. Para se ter um visão sistêmica das diferentes possibilidades cada método é estudado de forma separada, com denominações que passarão a identificá-los desse ponto em diante do trabalho e que representam o conjunto de técnicas associadas a cada um.

5.3.1 – Método de Lewis (LEWIS, 1991)

Essa técnica foi inicialmente proposta por MARTENSEN (1959) e desenvolvida e consolidada por LEWIS (1991). De acordo com esse método, são utilizados vórtices concentrados nos pontos de controle de cada painel. A equação integral que governa o problema é obtida pela aplicação da condição de contorno de Dirichlet, válida em

todos os pontos da superfície do corpo. A equação integral (4.37) pode ser escrita como (Equação de Martentensen, LEWIS, 1991):

$$-\frac{1}{2}\gamma_m + \sum_{n=1}^M k_{m,n} \gamma_n ds_n + W_\infty (\cos \alpha_\infty \cos \beta_m + \text{sen } \alpha_\infty \text{sen } \beta_m) = 0, \quad (5.28)$$

onde o perfil em estudo é discretizado em M painéis, sendo os sub-índices m e n seus identificadores. Calcula-se para cada painel m a velocidade induzida por n , cujos comprimentos (ou áreas) elementares são dados por s_n . W_∞ é a velocidade do escoamento incidente e α_∞ , o ângulo de inclinação dessa velocidade em relação ao eixo global das abscissas. Já β_m representa a inclinação de cada painel em relação ao sistema cartesiano local (Fig. 4.12)

A interpretação física dessa equação traduz-se como a especificação de componente da velocidade tangencial à superfície ser igual a zero em toda a sua extensão. Temos que o primeiro termo representa a descontinuidade existente quando saímos do centro da folha de vorticidade para as vizinhanças do corpo. O último termo corresponde à projeção do escoamento incidente na direção tangencial à superfície do contorno e o termo do somatório, às velocidades induzidas pela interação entre os vórtices.

Por transformação de variáveis, passando a coordenadas locais, e algumas relações trigonométricas, o termo $k_{m,n}$ pode ser obtido pela projeção de dq_{mn} na direção tangencial à superfície. É então definido como coeficiente de acoplamento entre os pontos m e n e é calculado através da seguinte expressão, a partir das equações (5.8) e (5.9), para o caso de um único aerofólio:

$$k_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(y_m - y_n) \cos \beta_m - (x_m - x_n) \text{sen } \beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right\}. \quad (5.29)$$

A equação (5.28) deve ser satisfeita para todos os M pivôs e pode se escrita como um conjunto de equações lineares,

$$\sum_{n=1}^M K_{m,n} \gamma_n = -U_\infty \cos \beta_m - V_\infty \text{sen } \beta_m, \quad (5.30)$$

onde: U_∞ e V_∞ são, respectivamente, as componentes do vetor velocidade incidente nas direções X e Y globais e

$$K_{m,n} = \frac{\Delta l_n}{2\pi} \left\{ \frac{(y_m - y_n) \cos \beta_m - (x_m - x_n) \sin \beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right\}, \quad (5.31)$$

sendo

$$K_{m,n} = k_{m,n} \Delta l_n. \quad (5.32)$$

O termo $\left(-\frac{1}{2}\gamma_m\right)$ está incluído em $K_{m,m}$, que também incorpora a auto-indução.

Nesta equação, os únicos termos desconhecidos são as intensidades γ da folha de vorticidade em cada pivô. Como a equação (5.30) representa um sistema de equações lineares, pode ser escrita na forma matricial, conforme abaixo:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_\infty \cos \beta_1 - V_\infty \sin \beta_1 \\ -U_\infty \cos \beta_2 - V_\infty \sin \beta_2 \\ \vdots \\ -U_\infty \cos \beta_M - V_\infty \sin \beta_M \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Para o escoamento potencial através de grades lineares, para o caso de vorticidade constante concentrada nos pontos pivotais de cada painel, LEWIS (1991) propõe a inserção do conceito de periodicidade na direção perpendicular aos perfis, o que transforma o problema, novamente, na análise de um único aerofólio componente da grade. Matematicamente isso se traduz, a partir das equações (5.10) e (5.11), nos seguintes coeficientes de acoplamento modificados:

$$K_{m,n} = \frac{\Delta l_n}{2t} \left\{ \frac{\sin \frac{2\pi}{t} (y_m - y_n) \cos(\beta_m + \beta) - \sinh \frac{2\pi}{t} (x_m - x_n) \sin(\beta_m + \beta)}{\cosh \frac{2\pi}{t} (x_m - x_n) - \cos \frac{2\pi}{t} (y_m - y_n)} \right\}. \quad (5.34)$$

Nessa expressão, denominando β_m , a inclinação de cada painel em relação ao eixo de coordenadas globais e β , a inclinação de montagem da grade, tem-se que a inclinação total de cada painel em relação a um referencial fixo preso à grade é igual a $\beta_m + \beta$.

Já o vetor de termos independentes é função da velocidade de entrada na grade \mathbf{W}_1 . Sendo α_1 o ângulo de inclinação desse vetor em relação à horizontal (Fig. 4.11), os termos do lado direito da equação matricial (Rhs_i), do vetor independente são dados por:

$$Rhs_i = -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_i - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_i. \quad (5.35)$$

A equação matricial, representativa do sistema de equações lineares a ser resolvido, torna-se, de acordo com a equação (5.30):

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \\ -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_2 - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_2 \\ \vdots \\ -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_M - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_M \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

LEWIS (1991) procura, em seu trabalho, adicionar algumas modificações em sua Matriz de Influência para a melhoria da acurácia de seus resultados. Esses podem ser melhorados através de uma correção que considera a curvatura da superfície entre duas extremidades do segmento de reta representativo do painel. Este efeito é sentido no termo de auto-indução $K_{i,i}$, onde $i=1\dots M$. Utiliza-se, para isso, uma modificação geométrica no termo de auto-indução que representa a velocidade paralela à superfície em m , induzida pelo próprio elemento m por um vórtice de intensidade unitária. Observando a Figura 5.12, caso consideremos um segmento de reta, a velocidade induzida em m será sempre normal à superfície, resultando em uma auto-indução nula. Já no caso de um elemento que apresente curvatura (Figura 5.13), haverá sempre uma resultante paralela à superfície do corpo. LEWIS (1991) demonstra que o elemento $K_{m,m}'$, termo incluso em $K_{m,m}$ e que representa a auto-indução, pode ser determinado pelas expressões:

$$K_{m,m} = -\frac{1}{2} + K_{m,m}', \quad (5.37)$$

$$K_{m,m}' = \frac{\Delta s_m}{4\pi r_m} \approx \frac{\Delta \beta_m}{4\pi}. \quad (5.38)$$

Nessa equação, r_m representa o raio interno de curvatura em m e $\Delta\beta_m$ a variação da inclinação do perfil de uma ponta à outra do elemento.

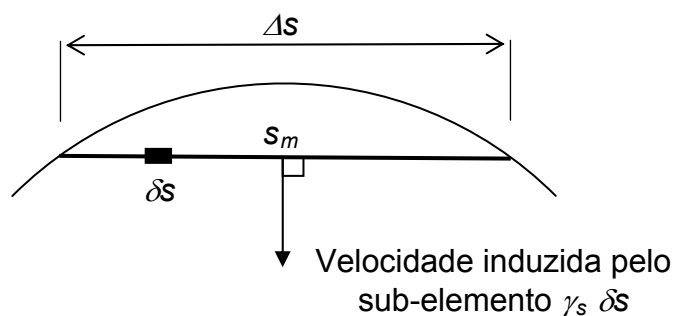


Figura 5.12 – Velocidade auto-induzida devido a um segmento de reta com distribuição de vorticidade (LEWIS, 1991).

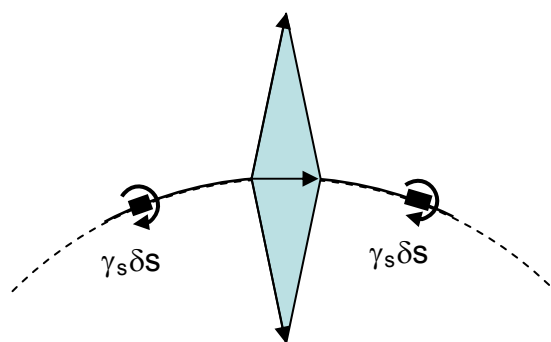


Figura 5.13 – Velocidade auto-induzida levando-se em consideração a curvatura da superfície de vorticidade (LEWIS, 1991).

Nas simulações efetuadas, considera-se a validade dessa correção um tanto quanto duvidosa, afastando a solução do esperado em alguns casos ou nada representando em outro. Tais observações vão de encontro com as conclusões apresentadas no trabalho de GOMES PEREIRA (2005).

Outra correção praticada por LEWIS (1991) consiste no ajuste dos termos da diagonal oposta da Matriz de Influência. Segundo JACOB & RIEGELS (1963) consiste em uma forma de garantir uma circulação líquida igual a zero no interior do perfil, de forma a satisfazer o teorema de Kelvin, como já comentado anteriormente. Assim, cada elemento da diagonal oposta é substituído pelo simétrico do somatório de cada termo da coluna a qual pertence, multiplicado pelo comprimento dos respectivos painéis e dividido pelo comprimento do painel correspondente ao coeficiente dessa diagonal. Isso faz com que cada equação passe a ser o simétrico da soma de todas as

outras, podendo, em alguns casos, levar a algumas dificuldades, mas que podem ser superadas por diversos métodos, como, por exemplo, especificando um ponto de controle sobre o bordo de fuga e garantindo vorticidade nula nesse ponto. Outra técnica consiste na utilização de sub-painéis, além de diversos outros métodos que vêm sendo propostos no desenvolvimento dessa metodologia. O que se pode afirmar é que, sem a correção da diagonal oposta, proposta por LEWIS (1991), os resultados tendem a se afastar dos dados experimentais quando da utilização de singularidades de menor ordem. Como já comentado por GOMES PEREIRA (2005), essa técnica é a maior responsável pela grande precisão do método, mesmo com a utilização de número relativamente reduzido de painéis.

5.3.2 – Método de Katz & Plotkin (KATZ & PLOTKIN, 2001)

O método de Katz e Plotkin, embora baseado na mesma teoria, apresenta algumas diferenças quanto à sua implementação. Enquanto Lewis considera a vorticidade concentrada nos pontos de controle de cada painel, como um vórtice linha, Katz e Plotkin utilizam vorticidade constante em cada painel do perfil ou, com melhores resultados, uma distribuição linear da singularidade sobre os painéis. Seguindo a metodologia de Katz e Plotkin, passa-se à montagem do sistema de equações lineares através da aplicação da condição de contorno de Dirichlet (4.34) em cada ponto de controle dos painéis, que só é utilizada no caso de singularidades tipo vórtices, ou de Neumann (4.29). Nos casos simulados não se verifica convergência com a utilização da condição de Neumann com vorticidade constante distribuída sobre os painéis.

Com isso, no caso de vorticidade constante, os coeficientes da matriz de influência representam as projeções na direção tangencial das velocidades induzidas por todos os painéis sobre cada ponto de controle, sendo os coeficientes de auto-indução constantes e iguais a -0,5 (Katz & Plotkin, 2001). O vetor dos termos independentes, da mesma maneira que em LEWIS (1991), é calculada como função da velocidade do escoamento incidente e da inclinação de cada painel. Com isso temos, para M painéis um sistema de M equações e M incógnitas representado pela seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_\infty \cos \beta_1 - V_\infty \sin \beta_1 \\ -U_\infty \cos \beta_2 - V_\infty \sin \beta_2 \\ \vdots \\ -U_\infty \cos \beta_M - V_\infty \sin \beta_M \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Tal sistema é muito semelhante àquele obtido por Lewis, sendo que cada termo K_{ij} agora é obtida pelo uso das equações (5.15) para u_{ij} e (5.16) para v_{ij} , com vorticidade unitária. Assim:

$$K_{ij} = u_{ij} \cos \beta_i - v_{ij} \sin \beta_i. \quad (5.40)$$

Quando se passa à utilização de vorticidade linear sobre o perfil, tem-se, inicialmente, um sistema de M equações e $M+1$ incógnitas, pois agora passam a ser $M+1$ valores de vorticidade a se determinar. Na utilização das equações (5.24) e (5.25), efetua-se uma manipulação algébrica de forma a agrupar os termos de acordo com os γ_i ($i = 1, \dots, M$) correspondentes (SILVA,2005). Os coeficientes da matriz de influência são então determinados, sendo que os da primeira coluna dependem apenas das velocidades induzidas por γ_1 e os de última, por γ_M . O vetor dos termos independentes é idêntico ao do caso anterior.

O sistema resultante, na forma matricial, é então:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M+1} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \\ \gamma_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_\infty \cos \beta_1 - V_\infty \sin \beta_1 \\ -U_\infty \cos \beta_2 - V_\infty \sin \beta_2 \\ \vdots \\ -U_\infty \cos \beta_M - V_\infty \sin \beta_M \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Para o escoamento através de uma grade linear de turbomáquina, devem ser feitas adaptações para se incluir a influência sofrida por cada perfil em função da presença dos demais. Para tal, as velocidades induzidas u_{ij} e v_{ij} são calculadas pelas equações (5.19) e (5.20), respectivamente, no caso de uma vorticidade de densidade constante sobre o perfil ou pela solução das integrais apresentadas nas equações (5.26) e (5.27), no caso de uma distribuição linear de vorticidade. O vetor dos termos independentes também deve ser modificado, considerando \mathbf{W}_1 como a velocidade de entrada na grade e conforme a condição de contorno utilizada. Além disso, há de se inserir o efeito da rotação da grade, ou seja, o ângulo de montagem β . Para vorticidade constante sobre a superfície dos aerofólios da grade, os coeficientes da matriz de influência são obtidos pela expressão:

$$K_{ij} = u_{ij} \cos(\beta_i + \beta) - v_{ij} \sin(\beta_i + \beta), \quad (5.42)$$

e os termos independentes do vetor coluna:

$$Rhs_i = -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_i - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_i. \quad (5.43)$$

Para a implementação do método com vorticidade linear sobre os painéis, não há uma resolução direta das integrais que aparecem nas equações (5.26) e (5.27). Devido a isso, duas rotas podem ser seguidas. A primeira consiste na resolução numérica, procurando-se utilizar métodos otimizados que não representem um excessivo custo computacional, mas que também não introduzam erros numéricos consideráveis. Como rota alternativa, desenvolve-se nesse trabalho um método que será denominado de Linear Adaptado, cujos detalhes do desenvolvimento são apresentados a seguir.

5.3.3 – Método Linear Adaptado

Essa técnica constitui-se em um método matemático para simular a distribuição linear de vorticidade na superfície do perfil a partir da vorticidade constante e uniforme. Seguindo metodologia de Katz & Plotkin (2001), que desenvolvem a teoria matemática tanto para a distribuição constante de vorticidade, como para a distribuição linear, para um único aerofólio, pode-se fazer uma análise similar para adaptá-la ao caso de grades lineares.

A velocidade induzida em um ponto qualquer do espaço por um painel com vorticidade constante, incluindo os efeitos da periodicidade é dada pelas expressões (5.17) e (5.18) desenvolvidas anteriormente. Definindo u_{ij} e v_{ij} como as componentes cartesianas das velocidades induzidas pelo painel j sobre o ponto de controle i de outro painel qualquer, têm-se, utilizando as notações correntes nesse trabalho, as equações 5.44 e 5.45:

$$u_{ij} = \frac{\gamma_j}{2t} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \frac{\sin \frac{2\pi}{t}(y_{ci})}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x_{ci} - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y_{ci})} dx_p, \quad (5.44)$$

$$v_{ij} = -\frac{\gamma_j}{2t} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \frac{\sinh \frac{2\pi}{t}(x_{ci} - x_p)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x_{ci} - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y_{ci})} dx_p. \quad (5.45)$$

De forma a simplificar as notações, denominam-se as integrais anteriores, respectivamente, por I_{ij}^{U1} e I_{ij}^{U2} . Assim as equações podem ser reescritas como:

$$u_{ij} = \frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U1}, \quad (5.46)$$

$$v_{ij} = -\frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U2}. \quad (5.47)$$

Essas equações estão representadas em coordenadas do painel. Para transformá-las para coordenadas globais, utiliza-se a transformação linear (A.7) (Apêndice A):

$$\begin{pmatrix} u_{g_{ij}} \\ v_{g_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta + \beta_m) & -\text{sen}(\beta + \beta_m) \\ \text{sen}(\beta + \beta_m) & \cos(\beta + \beta_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Ao se considerar a distribuição linear, pode-se adaptá-la considerando o cálculo das velocidades induzidas como uma média aritmética entre as distribuições constantes de cada extremo do painel considerado. A figura 5.14 representa esquematicamente essa idéia.

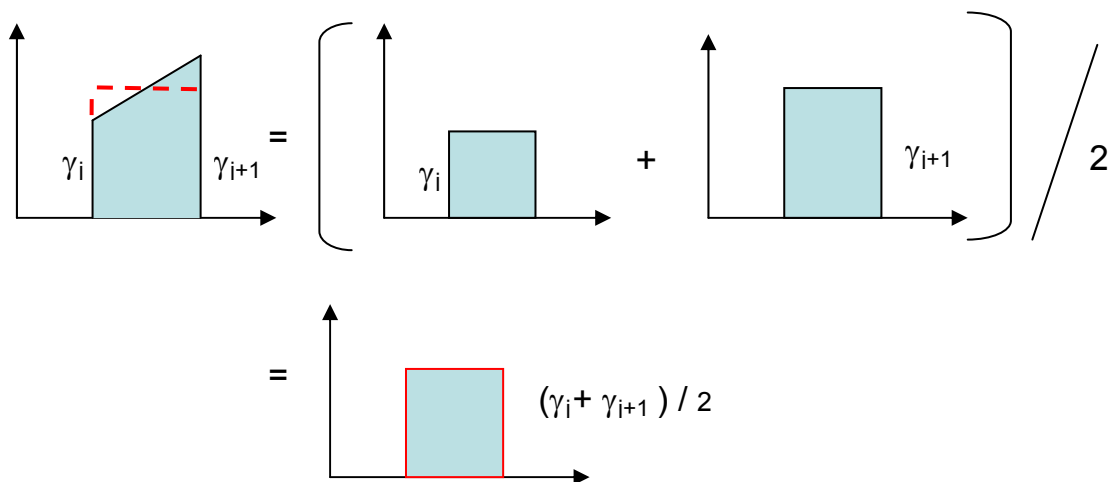


Figura 5.14 – Representação esquemática da aproximação da distribuição linear por distribuições uniformes

Assim, ao invés de se resolver a integral correspondente à distribuição linear, fonte do problema analítico, resolvem-se duas integrais de distribuição uniforme.

As integrais referidas, da distribuição linear, aparecem no cálculo das velocidades induzidas (5.49 e 5.50):

$$u = \frac{1}{2t} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \frac{\gamma(x_p) x \operatorname{sen} \frac{2\pi}{t}(y)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y)} dx_p, \quad (5.49)$$

$$v = -\frac{1}{2t} \int_{x_{pi}}^{x_{pi+1}} \frac{\gamma(x_p) x \operatorname{senh} \frac{2\pi}{t}(x - x_p)}{\cosh \frac{2\pi}{t}(x - x_p) - \cos \frac{2\pi}{t}(y)} dx_p. \quad (5.50)$$

De forma análoga à anterior, denominam-se as integrais agora por I_{ij}^{L1} e I_{ij}^{L2} . Pode-se escrever, para uma distribuição linear de vorticidade :

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x, \text{ em coordenadas do painel.} \quad (5.51)$$

Na prática, isso corresponde a uma composição de uma parcela uniforme com outra linear. As velocidades induzidas são, por conseguinte:

$$u = \frac{\gamma_0}{2t} I^{U1} + \frac{\gamma_1}{2t} I^{L1}, \quad (5.52)$$

$$v = -\frac{\gamma_0}{2t} I_{ij}^{U1} - \frac{\gamma_1}{2t} I^{L2}. \quad (5.53)$$

Para o painel j , induzindo velocidade sobre o painel i , obtêm-se as expressões (5.54) e (5.55) em coordenadas do painel j :

$$u_{ij} = \frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U1} + \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2t dl_j} I_{ij}^{L1}, \quad (5.54)$$

$$v_{ij} = -\frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U2} - \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2t dl_j} I_{ij}^{L2}. \quad (5.55)$$

A dificuldade analítica consiste na solução das integrais I_{ij}^{L1} e I_{ij}^{L2} .

A proposta de resolução consiste em considerar sobre a superfície de cada painel uma vorticidade de intensidade constante e uniforme igual à média das contribuições de cada um dos seus pontos extremos (5.56):

$$\gamma_{med\ j} = \frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{2}. \quad (5.56)$$

Com isso, passa-se a ter de resolver apenas as integrais I_{ij}^{U1} e I_{ij}^{U2} , de solução analítica conhecida.

As velocidades induzidas pelo painel j sobre o painel i , com esse método, expressam-se por:

$$u_{ij} = \frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{4t} I_{ij}^{U1}, \quad (5.57)$$

$$v_{ij} = -\frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{4t} I_{ij}^{U2}. \quad (5.58)$$

As velocidades em coordenadas globais, novamente são dadas pela transformação (A.7).

Para o cálculo dos coeficientes da Matriz de Influência, utiliza-se a projeção de u_{gij} e v_{gij} sobre a direção tangencial do painel i (condição de contorno de Dirichlet). A velocidade tangencial induzida no painel i é calculada pelo somatório das contribuições de cada painel na direção $(\cos(\beta + \beta_i), \text{sen}(\beta + \beta_i))$, onde β é a inclinação da grade e β_i a inclinação do eixo de coordenadas do painel em referência em relação ao eixo preso ao perfil. A velocidade tangencial induzida no painel i é, assim, dada por:

$$q_i^t = \sum_{j=1}^M u_{g\ ij} \cos(\beta_i + \beta) + v_{g\ ij} \text{sen}(\beta_i + \beta). \quad (5.59)$$

Para a expressão dos coeficientes de influência, devem-se reagrupar os termos da expressão anterior em função dos γ_i , ou seja, a vorticidade por unidade de comprimento no ponto inicial do painel i . Com as componentes nas direções globais x e y da velocidade q sendo dadas por u_{gi} e v_{gi} , respectivamente para cada painel i , tem-se:

$$u_{gi} = \sum_{j=1}^M u_{gij} \quad , \quad (5.60)$$

$$v_{gi} = \sum_{j=1}^M v_{gij} \quad . \quad (5.61)$$

Assim, de acordo com a transformação (5.48):

$$u_{gi} = \sum_{j=1}^M u_{ij} \cos(\beta_j + \beta) - v_{ij} \sin(\beta_j + \beta), \quad (5.62)$$

$$v_{gi} = \sum_{j=1}^M u_{ij} \sin(\beta_j + \beta) + v_{ij} \cos(\beta_j + \beta). \quad (5.63)$$

Expandindo as velocidades locais:

$$u_{gi} = \sum_{j=1}^M \frac{1}{4t} (\gamma_j I_{ij}^{U1} + \gamma_{j+1} I_{ij}^{U1}) \cos(\beta_j + \beta) + \frac{1}{4t} (\gamma_j I_{ij}^{U2} + \gamma_{j+1} I_{ij}^{U2}) \sin(\beta_j + \beta), \quad (5.64)$$

$$v_{gi} = \sum_{j=1}^M \frac{1}{4t} (\gamma_j I_{ij}^{U1} + \gamma_{j+1} I_{ij}^{U1}) \sin(\beta_j + \beta) - \frac{1}{4t} (\gamma_j I_{ij}^{U2} + \gamma_{j+1} I_{ij}^{U2}) \cos(\beta_j + \beta). \quad (5.65)$$

Rearranjando os termos:

$$u_{gi} = \frac{1}{4t} \sum_{j=1}^M \gamma_j (I_{ij}^{U1} \cos(\beta_j + \beta) + I_{ij}^{U2} \sin(\beta_j + \beta)) + \gamma_{j+1} (I_{ij}^{U1} \cos(\beta_j + \beta) + I_{ij}^{U2} \sin(\beta_j + \beta)). \quad (5.66)$$

$$v_{gi} = \frac{1}{4t} \sum_{j=1}^M \gamma_j (I_{ij}^{U1} \sin(\beta_j + \beta) - I_{ij}^{U2} \cos(\beta_j + \beta)) + \gamma_{j+1} (I_{ij}^{U1} \sin(\beta_j + \beta) - I_{ij}^{U2} \cos(\beta_j + \beta)). \quad (5.67)$$

A título de exemplo, para o primeiro painel, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_{gi} = & \frac{1}{4t} \left[\left[\gamma_1 \left(I_{11}^{U1} \cos(\beta_1 + \beta) + I_{11}^{U2} \sin(\beta_1 + \beta) \right) + \gamma_2 \left(I_{11}^{U1} \cos(\beta_1 + \beta) + I_{11}^{U2} \sin(\beta_1 + \beta) \right) \right] + \right. \\
 & + \left[\gamma_2 \left(I_{12}^{U1} \cos(\beta_2 + \beta) + I_{12}^{U2} \sin(\beta_2 + \beta) \right) + \gamma_3 \left(I_{12}^{U1} \cos(\beta_2 + \beta) + I_{12}^{U2} \sin(\beta_2 + \beta) \right) \right] + \dots + \\
 & + \left[\gamma_n \left(I_{1n}^{U1} \cos(\beta_n + \beta) + I_{1n}^{U2} \sin(\beta_n + \beta) \right) + \gamma_{n+1} \left(I_{1n}^{U1} \cos(\beta_n + \beta) + I_{1n}^{U2} \sin(\beta_n + \beta) \right) \right] + \dots + \\
 & \left. + \left[\gamma_M \left(I_{1M}^{U1} \cos(\beta_M + \beta) + I_{1M}^{U2} \sin(\beta_M + \beta) \right) + \gamma_{M+1} \left(I_{1M}^{U1} \cos(\beta_M + \beta) + I_{1M}^{U2} \sin(\beta_M + \beta) \right) \right] \right],
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
 v_{gi} = & \frac{1}{4t} \left[\left[\gamma_1 \left(I_{11}^{U1} \sin(\beta_1 + \beta) - I_{11}^{U2} \cos(\beta_1 + \beta) \right) + \gamma_2 \left(I_{11}^{U1} \sin(\beta_1 + \beta) - I_{11}^{U2} \cos(\beta_1 + \beta) \right) \right] + \right. \\
 & + \left[\gamma_2 \left(I_{12}^{U1} \sin(\beta_2 + \beta) - I_{12}^{U2} \cos(\beta_2 + \beta) \right) + \gamma_3 \left(I_{12}^{U1} \sin(\beta_2 + \beta) - I_{12}^{U2} \cos(\beta_2 + \beta) \right) \right] + \dots + \\
 & + \left[\gamma_n \left(I_{1n}^{U1} \sin(\beta_n + \beta) - I_{1n}^{U2} \cos(\beta_n + \beta) \right) + \gamma_{n+1} \left(I_{1n}^{U1} \sin(\beta_n + \beta) - I_{1n}^{U2} \cos(\beta_n + \beta) \right) \right] + \dots + \\
 & \left. + \left[\gamma_M \left(I_{1M}^{U1} \sin(\beta_M + \beta) - I_{1M}^{U2} \cos(\beta_M + \beta) \right) + \gamma_{M+1} \left(I_{1M}^{U1} \sin(\beta_M + \beta) - I_{1M}^{U2} \cos(\beta_M + \beta) \right) \right] \right],
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

o que fornece:

$$\begin{aligned}
 u_{gi} = & \frac{1}{4t} \left[\left[\gamma_1 \left(I_{11}^{U1} \cos(\beta_1 + \beta) + I_{11}^{U2} \sin(\beta_1 + \beta) \right) \right] + \left[\gamma_2 \left(I_{11}^{U1} \cos(\beta_1 + \beta) + I_{11}^{U2} \sin(\beta_1 + \beta) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(I_{12}^{U1} \cos(\beta_2 + \beta) + I_{12}^{U2} \sin(\beta_2 + \beta) \right) \right] + \dots + \right. \\
 & \left. + \gamma_n \left[\left(I_{1n-1}^{U1} \cos(\beta_{n-1} + \beta) + I_{1n-1}^{U2} \sin(\beta_{n-1} + \beta) \right) + \left(I_{1n}^{U1} \cos(\beta_n + \beta) + I_{1n}^{U2} \sin(\beta_n + \beta) \right) \right] + \dots + \right. \\
 & \left. + \left[\gamma_{M+1} \left(I_{1M}^{U1} \cos(\beta_M + \beta) + I_{1M}^{U2} \sin(\beta_M + \beta) \right) \right] \right],
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned}
 v_{gi} = & \frac{1}{4t} \left[\left[\gamma_1 \left(I_{11}^{U1} \sin(\beta_1 + \beta) - I_{11}^{U2} \cos(\beta_1 + \beta) \right) \right] + \left[\gamma_2 \left(I_{11}^{U1} \sin(\beta_1 + \beta) - I_{11}^{U2} \cos(\beta_1 + \beta) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(I_{12}^{U1} \sin(\beta_2 + \beta) - I_{12}^{U2} \cos(\beta_2 + \beta) \right) \right] + \dots + \right. \\
 & \left. + \gamma_n \left[\left(I_{1n-1}^{U1} \sin(\beta_{n-1} + \beta) + I_{1n-1}^{U2} \cos(\beta_{n-1} + \beta) \right) + \left(I_{1n}^{U1} \sin(\beta_n + \beta) + I_{1n}^{U2} \cos(\beta_n + \beta) \right) \right] + \dots + \right. \\
 & \left. + \left[\gamma_{M+1} \left(I_{1M}^{U1} \sin(\beta_M + \beta) - I_{1M}^{U2} \cos(\beta_M + \beta) \right) \right] \right].
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Em resumo, com base nas equações anteriores, os coeficientes de acoplamento da Matriz de Influência serão dados por:

- Para a primeira coluna

$$K_{i1} = \frac{1}{4t} \left[\left(I_{i1}^{U1} \cos(\beta_1 + \beta) + I_{i1}^{U2} \sin(\beta_1 + \beta) \right) \cos(\beta_i + \beta) + \right. \\ \left. + \left(I_{i1}^{U1} \sin(\beta_1 + \beta) - I_{i1}^{U2} \cos(\beta_1 + \beta) \right) \sin(\beta_i + \beta) \right] \quad (5.72)$$

- Para a última coluna

$$K_{iM+1} = \frac{1}{4t} \left[\left(I_{iM}^{U1} \cos(\beta_M + \beta) + I_{iM}^{U2} \sin(\beta_M + \beta) \right) \cos(\beta_i + \beta) + \right. \\ \left. + \left(I_{iM}^{U1} \sin(\beta_M + \beta) - I_{iM}^{U2} \cos(\beta_M + \beta) \right) \sin(\beta_i + \beta) \right] \quad (5.73)$$

- Para os demais elementos:

$$K_{ij} = \frac{1}{4t} \left[\left(I_{ij-1}^{U1} \cos(\beta_{j-1} + \beta) + I_{ij-1}^{U2} \sin(\beta_{j-1} + \beta) \right) + \left(I_{ij}^{U1} \cos(\beta_j + \beta) + I_{ij}^{U2} \sin(\beta_j + \beta) \right) \right] \cos(\beta_i + \beta) + \\ + \left[\left(I_{ij-1}^{U1} \sin(\beta_{j-1} + \beta) - I_{ij-1}^{U2} \cos(\beta_{j-1} + \beta) \right) + \left(I_{ij}^{U1} \sin(\beta_j + \beta) - I_{ij}^{U2} \cos(\beta_j + \beta) \right) \right] \sin(\beta_i + \beta) \quad (5.74)$$

Com isso, não se passa pelo problema de um sistema sobre-determinado e, de certa forma, acredita-se no aumento da ordem da singularidade.

Para facilitar a implementação numérica, definem-se os parâmetros trigonométricos da seguinte forma:

$$A_{ij} = \cos(\beta_j + \beta) \cos(\beta_i + \beta) \quad , \quad (5.75)$$

$$B_{ij} = \sin(\beta_j + \beta) \sin(\beta_i + \beta) \quad , \quad (5.76)$$

$$C_{ij} = -\sin(\beta_j + \beta) \cos(\beta_i + \beta), \quad (5.77)$$

$$D_{ij} = \cos(\beta_j + \beta) \sin(\beta_i + \beta). \quad (5.78)$$

Os coeficientes de acoplamento são implementados, então, de acordo com as expressões (5.75) a (5.78):

- Para a primeira coluna

$$K_{i1} = \frac{1}{4t} [I_{i1}^{U1} A_{i1} + I_{i1}^{U1} B_{i1} + I_{i1}^{U2} C_{i1} - I_{i1}^{U2} D_{i1}]; \quad (5.79)$$

- Para a última coluna

$$K_{iM+1} = \frac{1}{4t} [I_{iM}^{U1} A_{iM} + I_{iM}^{U1} B_{iM} + I_{iM}^{U2} C_{iM} - I_{iM}^{U2} D_{iM}]; \quad (5.80)$$

- Para os demais elementos:

$$K_{ij} = \frac{1}{4t} [I_{ij-1}^{U1} A_{ij-1} + I_{ij}^{U1} A_{ij} + I_{ij-1}^{U1} B_{ij-1} + I_{ij}^{U1} B_{ij} + I_{ij-1}^{U2} C_{ij-1} + I_{ij}^{U2} C_{ij} - I_{ij-1}^{U2} D_{ij-1} - I_{ij}^{U2} D_{ij}]. \quad (5.81)$$

A outra técnica disponível, a princípio de maior esforço computacional, consiste em resolver as integrais relativas à distribuição linear de forma numérica, de acordo com um dos métodos tradicionais existentes, como o método do trapézio, adequado para essa configuração. Detalhes da implementação, seguindo o mesmo procedimento dessa seção, encontram-se no Apêndice C.

5.3.4 – A Condição de Kutta

Os sistemas obtidos com uso de vorticidade concentrada (Método de Leis), ou com vorticidade constante (Método de Katz & Plotkin) são, a princípio, completamente determinados, uma vez que temos M equações e M incógnitas. Porém, quando da aplicação de distribuição linear de vorticidade, há apenas M equações para $M+1$ incógnitas. Assim, para a solução potencial, é necessário se especificar uma condição adicional para o bordo de fuga, de maneira a se estabelecer uma solução única e fisicamente consistente: a condição de Kutta. Esta pode ser interpretada como a condição necessária a se estabelecer para que o perfil possa gerar uma circulação e, conseqüentemente, uma força de sustentação em um escoamento potencial. A

condição de Kutta, então, é aquela que estabelece a posição do ponto de estagnação de um aerofólio, em um escoamento irrotacional, em seu bordo de fuga (KUNDU & COHEN, 2004), ou seja, em escoamentos bidimensionais sobre um corpo com um bordo de fuga agudo e delgado, desenvolve-se uma circulação de magnitude suficiente para se mover o ponto de estagnação da parte de trás do perfil para o bordo de fuga.

A figura (5.15) apresenta as possibilidades matemáticas de solução de um escoamento potencial, sendo a última a representativa da condição de Kutta que, de acordo com observações experimentais, é a única fisicamente possível, pois conduz a velocidades finitas no bordo de fuga do aerofólio.

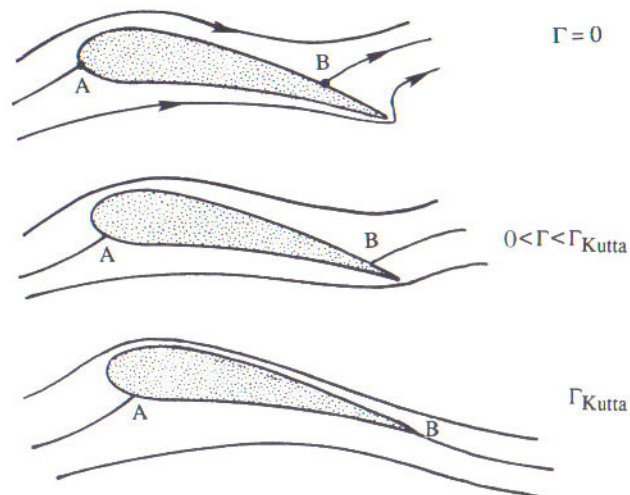


Figura 5.15– Escoamentos potenciais sobre um aerofólio, comparados ao caso da condição de Kutta. B é o ponto de estagnação na parte traseira do aerofólio. (KUNDU & COHEN, 2004)

Assim, não obstante o método, a condição de Kutta deve sempre ser estabelecida e adicionada à matriz dos coeficientes de influência. De acordo com a técnica utilizada e com o tipo de singularidade estabelecido, diferentes formas de inclusão dessa condição são possíveis. Verifica-se que a maneira de inseri-la afeta a precisão dos resultados obtidos quando da aplicação em grades de turbomáquinas. Sob uma ótica matemática, a condição de Kutta determina que, no caso de vorticidade concentrada nos pontos de controle ou distribuição constante sobre os painéis, a seguinte equação deve ser satisfeita (TE corresponde ao índice representativo do bordo de fuga):

$$\gamma_{TE} + \gamma_{TE+1} = 0, \quad (\text{Método de Lewis}) \quad (5.82)$$

$$\gamma_1 + \gamma_M = 0. \text{ (Método de Katz e Plotkin)} \quad (5.83)$$

Já com distribuição linear de vorticidade sobre cada painel, tem-se que:

$$\gamma_1 + \gamma_{M+1} = 0. \quad (5.84)$$

Voltando a Lewis, os sistemas representados tanto pela expressão (5.33), como pela (5.36), passam a ser sobre-determinado, uma vez que há $M+1$ equações (incluindo Kutta) e apenas M incógnitas. A inserção da condição de Kutta pode então ser feita substituindo simplesmente uma das equações do bordo de fuga ou combinando-se as duas equações do bordo de fuga em uma, o que reduz a ordem do sistema para $M-1$, e depois acrescentar a equação (5.82) para a solução final. Simulações mostram que a segunda opção leva a melhores resultados.

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{TE+1-TE1} & K_{TE+1-TE2} & \vdots & K_{TE+1-TEM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{TE+1} - \gamma_{TE} \\ \vdots \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rhs_1 \\ Rhs_2 \\ \vdots \\ Rhs_{TE+1-TE} \\ \vdots \\ Rhs_M \end{pmatrix}. \quad (5.85)$$

Já no caso do Método de Katz e Plotkin, o sistema representado pela equação matricial (5.39) é ajustado com a substituição da última linha (associada ao bordo de fuga) por Kutta.

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_\infty \cos \beta_1 - V_\infty \sin \beta_1 \\ -U_\infty \cos \beta_2 - V_\infty \sin \beta_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.86)$$

Para a análise de grades lineares de perfis aerodinâmicos, apenas substituem-se os elementos do vetor coluna de termos independentes pelos obtidos através da equação (5.43) na expressão (5.86).

Quando da distribuição linear de vorticidade, a indeterminação do sistema (5.41) é levantada acrescentando-se uma linha a mais, ou seja, uma equação a mais, utilizando-se a condição de Kutta (5.84). Assim,

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M+1} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM+1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \\ \gamma_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_\infty \cos \beta_1 - V_\infty \sin \beta_1 \\ -U_\infty \cos \beta_2 - V_\infty \sin \beta_2 \\ \vdots \\ -U_\infty \cos \beta_M - V_\infty \sin \beta_M \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.87)$$

Da mesma forma, o vetor de termos independentes pode ser substituído pelos elementos calculados com a utilização da expressão (5.43), no caso de grades lineares. Logicamente, os coeficientes da Matriz de Influência serão aqueles que incluem os efeitos da periodicidade do escoamento. A equação matricial torna-se, então:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M+1} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{2M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & \cdots & K_{MM+1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \\ \gamma_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \\ -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_2 - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_2 \\ \vdots \\ -W_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_M - W_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_M \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

Uma vez estabelecida a equação matricial, passa-se à sua resolução. Basicamente, sua solução é obtida através da inversão da matriz dos coeficientes de acoplamento, da seguinte forma esquemática:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (5.89)$$

Com a solução obtida, ficam determinadas as vorticidades sobre os painéis. Procedese, então, a todos os cálculos requeridos para o campo de pressões, velocidades, cargas, e assim por diante, cujos detalhes encontram-se na seção seguinte.

Sobre a resolução da equação matricial, observa-se que, no caso de aerofólios simples e com a metodologia de Katz e Plotkin, como a Matriz de Influência é de diagonal dominante, sua inversão não apresenta dificuldade, podendo ser obtida através de técnicas numéricas tradicionais. O recurso de resolver o sistema por

eliminação gaussiana com redução pivotal também é possível. Já, quando da modificação dos coeficientes de acoplamento para levar em consideração a influência da grade, algumas vezes obtêm-se matrizes mal-condicionadas, porém com inversão ainda possível, necessitando, em alguns casos, de um tratamento matemático prévio. A utilização de ferramentas constantes em programas comerciais, como o MATLAB®, ou de algoritmos otimizados, obtidos no conjunto do “*Numerical Recipes*”, é suficiente.

5.4 CAMPO DE PRESSÕES E CARGAS AERODINÂMICAS

Com as intensidades das vorticidades γ_m determinadas para cada painel m , a velocidade do escoamento próximo à superfície já está calculada, pois conforme LEWIS (1991), as velocidades tangenciais ao perfil próximos à superfície são numericamente iguais aos valores de vorticidade da superfície (Figura 5.1),. Em região próxima a cada ponto de controle, tem-se então:

$$q_{tm} = \gamma_m. \quad (5.90)$$

Nessa expressão, q_{tm} representa a velocidade tangencial ao perfil m no ponto de controle considerado. Caso se utilize a distribuição linear de vorticidade, a velocidade tangencial passa a ser calculada pela vorticidade média no perfil:

$$q_{tm} = \frac{\gamma_m + \gamma_{m+1}}{2}, \quad (5.91)$$

onde os índices m e $m + 1$ representam os pontos extremos do painel m considerado.

Com as velocidades conhecidas, o campo de pressões sobre a superfície pode ser determinado diretamente pela equação de Bernoulli (5.92), uma vez que se trata de um escoamento potencial:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho q_t^2. \quad (5.82)$$

Nessa equação, p_∞ é a pressão de referência para o escoamento não perturbado. De forma prática, a pressão p_1 , na entrada da grade, é um parâmetro mais útil no estudo de turbomáquinas.

Desejando-se expressar as grandezas de forma adimensional, calculam-se os coeficientes de pressão sobre a superfície. Definindo-se um coeficiente de pressão local, tendo por base a velocidade do escoamento incidente na grade W_1 , calcula-se C_p através da equação (5.93). Essa referência tem maior utilidade no estudo das turbomáquinas do que a velocidade distante da grade do escoamento não perturbado W_∞ . Já no caso da análise para um único perfil, utiliza-se, como referência, a velocidade incidente Q_∞ , bastando inserir esse termo nas equações seguinte, em substituição a W_1 .

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho W_1^2}. \quad (5.93)$$

Pela equação de Bernoulli e com uso de (5.90) ou (5.91), conforme o caso, para cada painel m da superfície do perfil:

$$C_{p_m} = 1 - \left(\frac{\gamma_m}{W_1} \right)^2 \quad (5.94)$$

ou

$$C_{p_m} = 1 - \left(\frac{\gamma_m + \gamma_{m+1}}{W_1} \right)^2. \quad (5.95)$$

Já as cargas aerodinâmicas de sustentação (L) e arrasto (D) podem ser calculadas através de uma integração do campo de pressões sobre a superfície do corpo. Sendo ℓ a dimensão da corda do aerofólio, os respectivos coeficientes são definidos como:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho W_1^2 \ell}, \quad (5.96)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho W_1^2 \ell}. \quad (5.97)$$

O ângulo de deflexão do escoamento imposto pela grade é outro parâmetro importante para análise, pois está diretamente relacionado à transferência de energia entre o escoamento e o estágio axial (Rodrigues, 1991). Referindo-se à figura 4.11, esse ângulo é dado por:

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (5.98)$$

De acordo com as equações (4.32) e (4.33), o ângulo α_2 é calculado a partir de W_1 , α_1 e Γ da seguinte forma:

$$W_{2x} = W_1 \cos \alpha_1, \quad (5.99)$$

$$W_{2y} = W_1 \sin \alpha_1 - \frac{\Gamma}{2t}, \text{ logo} \quad (5.100)$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{W_{2y}}{W_{2x}} \right), \quad (5.101)$$

onde $\Gamma = \sum_{m=1}^M \gamma_m dl_m$ é a circulação total em torno do perfil aerodinâmico.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O estudo numérico visando à simulação de um escoamento potencial bidimensional, incompressível e em regime permanente, adaptado para o escoamento através de uma grade linear de turbomáquina, apresenta peculiaridades que exigem análise mais detalhada das técnicas e parâmetros envolvidos. Apesar das limitações inerentes à sua formulação, a solução para o problema potencial é de grande utilidade para o estudo das turbomáquinas, da mesma forma que a teoria de Euler, principalmente na fase de projeto desse tipo equipamento (LEWIS, 1996).

Quando se deseja simular os efeitos viscosos do escoamento, mesmo para o caso de um único perfil aerodinâmico, com a utilização do Método de Vórtices associado ao Método de Painéis, uma solução numérica convergente e bem comportada para o escoamento potencial torna-se fundamental para o sucesso da análise. Como observado por SILVA (2005), a simulação para perfis com bordo de fuga extremamente delgados não logra êxito devido, entre outros fatos, aos erros numéricos que levam a vorticidades extremamente elevadas na saída do perfil ao longo do tempo. Esse fato é fortemente amplificado quando incluímos o princípio da periodicidade para a simulação da grade linear. Os esforços foram, então, concentrados no refinamento da solução nessa região. A Figura 6.1 apresenta dois tipos de aerofólios de perfil da série NACA, onde se vê a diferença da geometria nessa região de interesse.

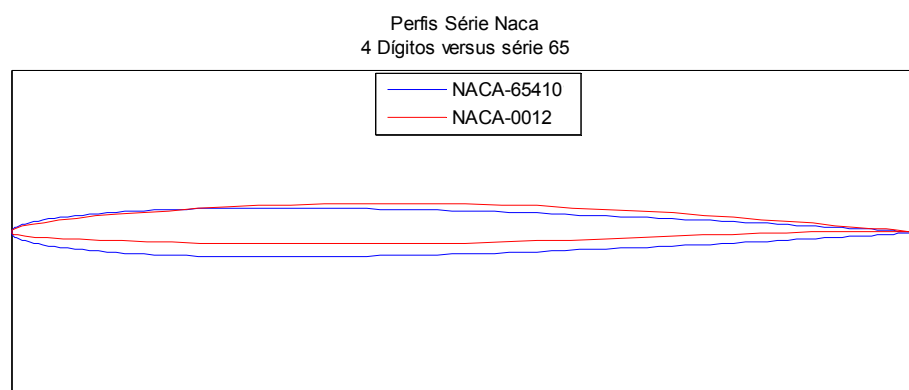


Figura 6.1– Diferença entre perfis NACA 4 dígitos e série 65

Uma ampliação da região do bordo de fuga mostra claramente a dificuldade existente relativa à geometria (Figura 6.2).

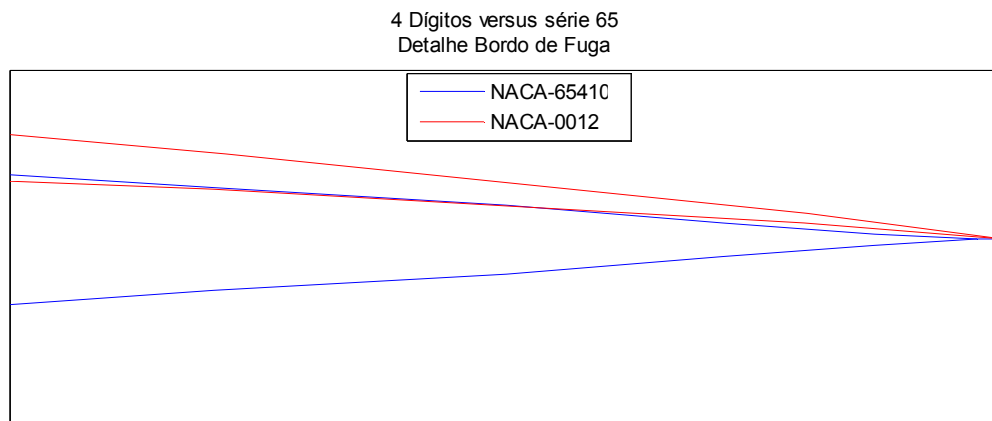


Figura 6.2– Diferença entre perfis NACA 4 dígitos e série 65 – Região do bordo de fuga (TE)

6.1 SUMÁRIO DE SIMULAÇÕES

Em todas as simulações empreendidas nessa dissertação foram utilizados três perfis aerodinâmicos como referência: o aerofólio de Van der Vooren, o perfil simétrico NACA 0012 e o assimétrico NACA 65-410. O primeiro, obtido matematicamente por uma técnica denominada Transformada Conforme (“*Conformal Transformation*”, KATZ & PLOTKIN, 2001), é utilizado em função da existência de solução analítica para o problema potencial. Assim, as técnicas numéricas utilizadas na implementação das simulações podem ser testadas e refinadas. O aerofólio da série NACA 0012, por ser um perfil simétrico, com ângulo de bordo de fuga finito, já foi extensivamente estudado em diversos trabalhos similares, como em SILVA (2005), dentre outros, servindo-se, então, de boa base de comparação. O terceiro perfil foi escolhido em função da série NACA 65 ter sido desenvolvida para uso em projeto de turbomáquinas, principalmente para compressores axiais, e por ser o perfil estudado no trabalho de PEREIRA (2002), além de possuir dados experimentais publicados (EMERY *et al.*, 1953).

O estudo numérico foi dividido em duas partes. Primeiramente estudou-se o escoamento ao redor de um único perfil de referência, para, em seguida, acrescentar-se a interferência da grade linear. A análise, em cada caso, envolveu simulações diversas, onde testaram-se as diferentes distribuições de singularidades sobre os painéis, as implementações de acordo com as metodologias desenvolvidas no capítulo anterior e variados ângulos de ataque. Na tabela 6.1, apresenta-se um resumo dos tipos de simulações realizadas.

Tabela 6.1 – Sumário de Simulações

Método	Singularidade	C. C.	Coef. Acopla.	Observação
Lewis	Concentrada	Dirichlet	Método Analítico	Curvatura e Diagonal Oposta
Katz & Plotkin	Constante	Dirichlet	Método Analítico	Diagonal Oposta
	Linear	Newmann	Método Analítico	-----
			Integração Num.	Somente no caso da grade linear
	Linear Adaptada	Dirichlet	Método Analítico	-----
Integração Num.			Somente no caso da grade linear	

Embora, em todos os casos tenham sido testadas as duas possibilidades de condição de contorno, os resultados contemplam apenas aquelas situações onde houve convergência, tanto para os coeficientes de pressão, como para as cargas aerodinâmicas, principalmente no que se refere ao coeficiente de sustentação. É importante observar que o método de implementação apresenta forte associação tanto com o tipo de singularidade escolhida como com a condição de contorno adotada, como se vê na tabela 6.1.

6.2 – ESCOAMENTO AO REDOR DE UM ÚNICO PERFIL AERODINÂMICO.

No caso do escoamento ao redor de um único aerofólio tal solução não envolve dificuldade excessiva, porém, ao se inserir os efeitos de periodicidade para simular a interferência da grade, a inclusão das funções hiperbólicas torna o problema bem mais complexo. O objetivo básico das simulações empreendidas nessa fase foi separar os desvios inerentes ao método de implementação daqueles que surgem em função da extensão da análise para uma grade linear. Trata-se, então, de uma forma de verificação de vários parâmetros e técnicas utilizados para as simulações, além de ser uma referência comparativa quando da simulação dos efeitos da periodicidade. Os fatores que mais interferem na solução potencial são:

- Número de painéis;
- Tipo de singularidade para a representação da vorticidade;
- Condição de contorno utilizada (Newmann ou Dirichlet);
- Técnica de construção da Matriz de Influência e
- Tipo de correções efetuadas na Matriz de Influência.

6.2.1 – Aerofólio de Van der Vooren

Utiliza-se, nas simulações, um aerofólio de Van der Vooren com 15% de espessura e 20° de ângulo no bordo de fuga. Os ângulos de ataque estudados são 0° (escoamento simétrico) a 10° , visando uma crescente variação de pressão nos bordos de fuga e ataque. As soluções analíticas, que servirão de padrão de comparação para esses casos, são apresentadas na figura 6.3. As figuras 6.4 e 6.5 apresentam, respectivamente, as soluções numéricas para ângulos de ataque de 5° e 10° . Nesse último caso, optou-se, em função da alta assimetria do escoamento, pelo aumento do número de painéis para se obter melhor precisão dos resultados.

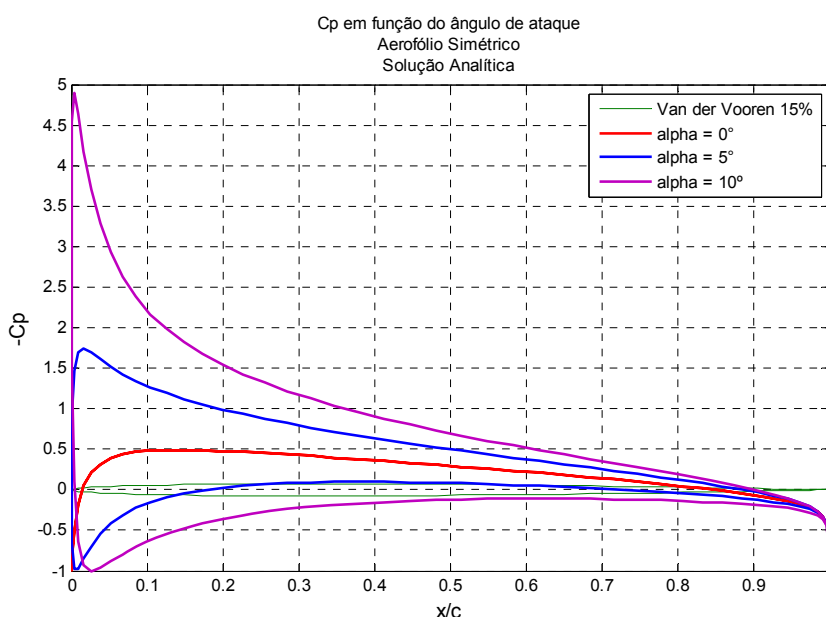


Figura 6.3– Solução analítica para o escoamento potencial para diversos ângulos de ataque – Aerofólio de Van der Vooren .

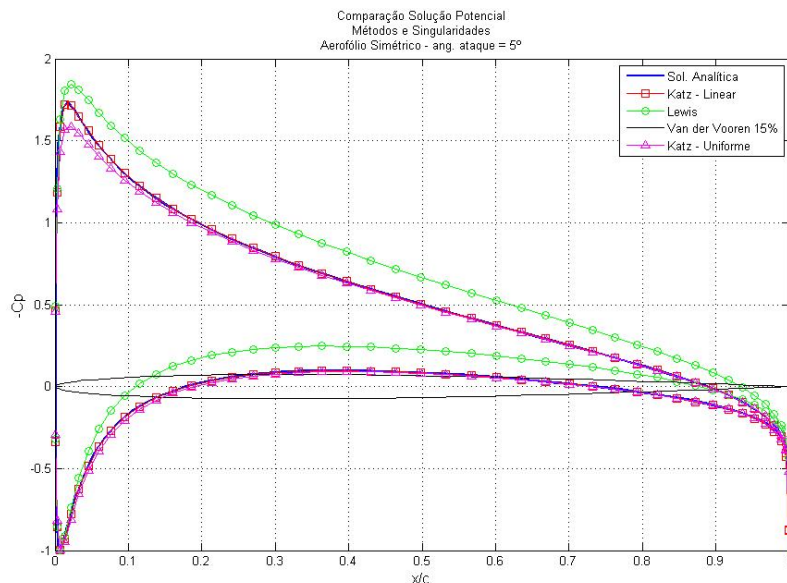


Figura 6.4– Comparação entre os métodos de resolução – Escoamento assimétrico ($\alpha = 5^\circ$) – Aerofólio de Van der Vooren. Número de Painéis = 90.

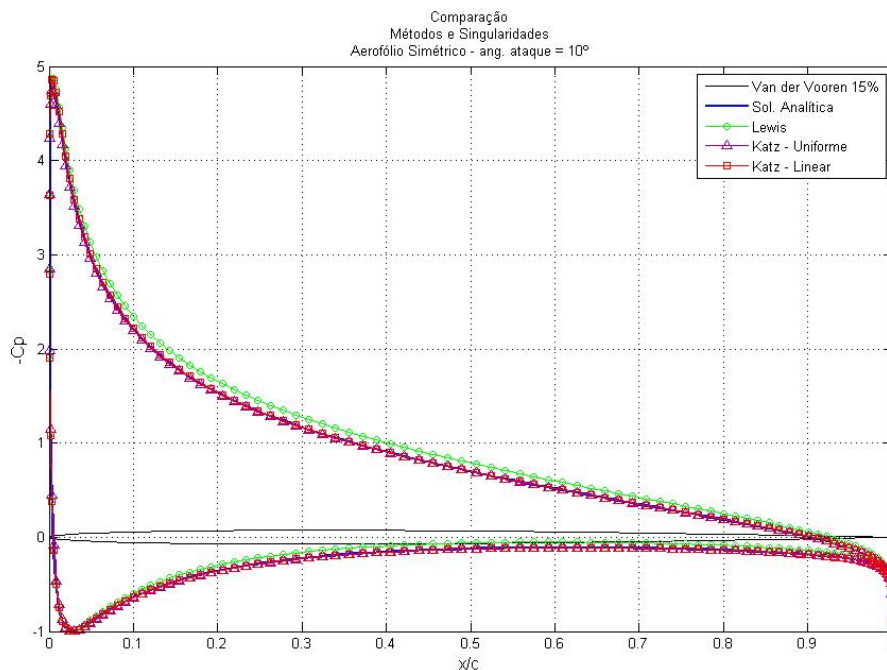


Figura 6.5– Comparação entre os métodos de resolução com aumento do ângulo de ataque ($\alpha = 10^\circ$) – Aerofólio de Van der Vooren com espessura de 15% e ângulo do bordo de fuga de 20° . Número de Painéis = 180.

Todos os métodos testados, com distribuições de singularidades desde concentrada, até linear, apresentam boa convergência. Como era previsto, quanto maior a ordem da singularidade utilizada, maior a precisão. Também se observa que o aumento do número de painéis para a discretização da geometria exerce influência em todos os casos, porém, de forma mais expressiva no Método de Lewis, com vorticidade concentrada. É importante registrar, nesse ponto, que tanto no Método de Lewis, quanto no de Katz & Plotkin, com vorticidade constante sobre painel, a convergência só foi obtida através da utilização do artifício de correção da diagonal oposta. Todos esses resultados encontram-se de acordo com o estudo realizado por GOMES PEREIRA (2005).

6.2.2 – Perfil NACA 0012

Apesar de ser, da mesma forma que o aerofólio de Van der Vooren, um perfil simétrico, o aerofólio NACA 0012 foi utilizado para diversas simulações no trabalho de SILVA (2005), o que fornece boa fonte de comparação. Da mesma forma, foram testadas configurações com ângulos de ataque entre 0° e 10° , apresentando resultados bem coerentes com os do caso anterior. Na figura 6.6, têm-se os resultados da simulação do escoamento potencial para um ângulo de ataque de 5° . Detalhes do comportamento de C_p nos bordos de ataque e de fuga encontram-se na figura 6.7. Verifica-se que as metodologias de Katz & Plotkin, tanto com vorticidade constante

sobre os painéis, quanto com distribuição linear, conduzem a resultados coincidentes sobre quase toda a extensão do perfil, sendo que, nos bordos de fuga e ataque, o uso de singularidade de ordem superior apresenta vantagem.

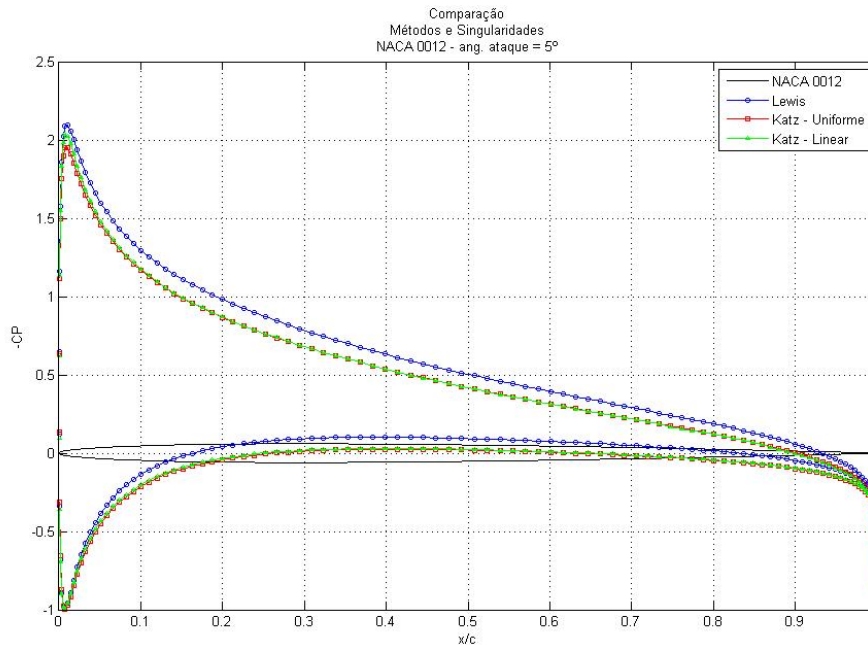


Figura 6.6– Simulações comparando os métodos de resolução para um perfil NACA 0012 com ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$. Número de Painéis = 180.

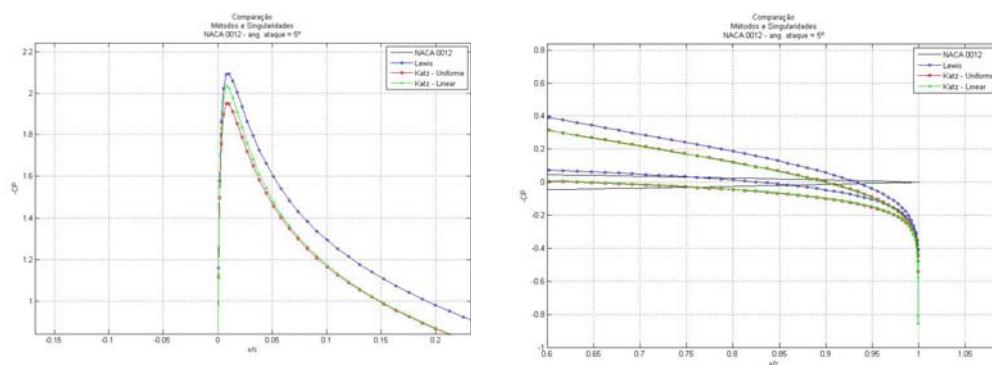


Figura 6.7– Detalhe da distribuição de C_p nos bordos de ataque e de fuga da simulação da fig. 6.6.

Esses resultados estão consoantes com o trabalho de SILVA (2005), onde se observa que, para ângulos de ataque inferiores a 10° , tanto por observações experimentais, como por simulações diversas, o escoamento real permanece razoavelmente aderido à superfície, com formação de regiões de separação somente nas proximidades do bordo fuga do aerofólio, sendo esse o ponto em que a solução potencial mais se afasta do escoamento real.

6.2.3 – Perfil NACA 65-410

Um dos grandes objetivos da análise para um único perfil consiste em desenvolver um método que conduza a uma solução potencial convergente para o escoamento ao longo de perfis que possuam um bordo de fuga muito esbelto. Obtenção do êxito nesse estudo é fundamental para a análise do escoamento quando se considera uma grade linear infinita, principalmente ao se estender o estudo com métodos numéricos que simulem a evolução viscosa do escoamento, como o Método de Vórtices.

O Método de Lewis só alcança tal objetivo através do artifício da correção da diagonal oposta. Isso também é necessário na utilização do Método de Katz & Plotkin com vorticidade constante sobre o painel. Caso não se proceda tal correção, as vorticidades obtidas através da solução do sistema de equações lineares tornam-se muito elevadas no bordo de fuga, fato que, numa evolução temporal que se utiliza do Método dos Painéis associado ao Método de Vórtices, levará a velocidades induzidas de grande magnitude nessa região, impedindo a convergência, como em SILVA (2005).

A figura 6.8 mostra resultados para o coeficiente de pressão obtidos através de simulações pelo Método de Katz & Plotkin, com vorticidade constante sobre o painel e correção de curvatura. É de se esperar que a utilização de vorticidade linear sobre os painéis melhore os resultados. Porém, ao se calcular a velocidade tangencial sobre os painéis como a média aritmética das vorticidades em seus pontos extremos, os valores de C_p no bordo de fuga tornam-se bastante imprecisos (Fig. 6.9), ao contrário do que ocorre com a distribuição constante de vorticidade, com correção da diagonal oposta (Fig. 6.10). Nessa última figura ainda se observa a melhor precisão do Método de Katz & Plotkin quando comparada à de Lewis devido, principalmente, ao aumento de ordem da singularidade.

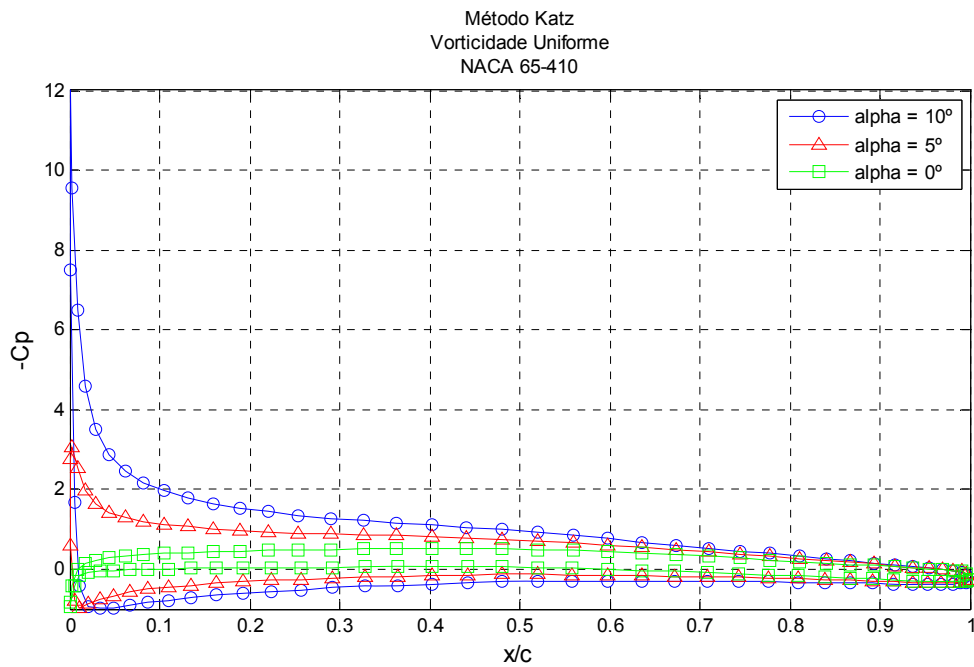


Figura 6.8– Simulações para um perfil NACA 65-410 com ângulos de ataque $\alpha = 0^\circ$, 5° e 10° , utilizando o Método de Katz & Plotkin com vorticidade constante sobre os painéis. Número de Painéis = 90.

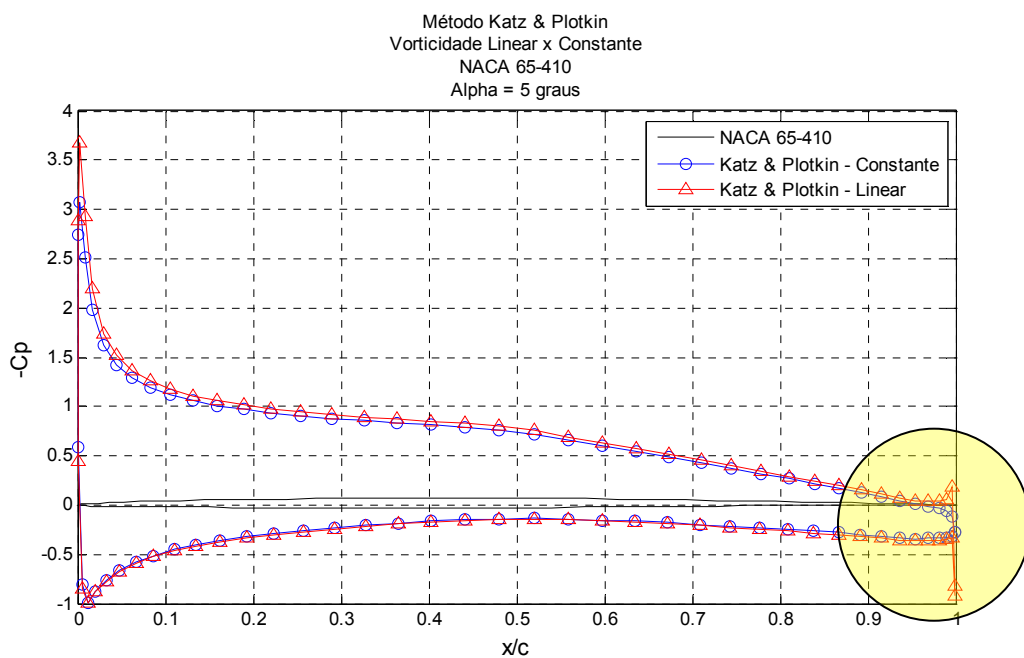


Figura 6.9– Simulações para um perfil NACA 65-410 com ângulos de ataque $\alpha = 5^\circ$, utilizando o Método de Katz & Plotkin com vorticidade constante e vorticidade linear sobre os painéis. Número de Painéis = 90. Em destaque, tem-se a região do bordo de fuga.

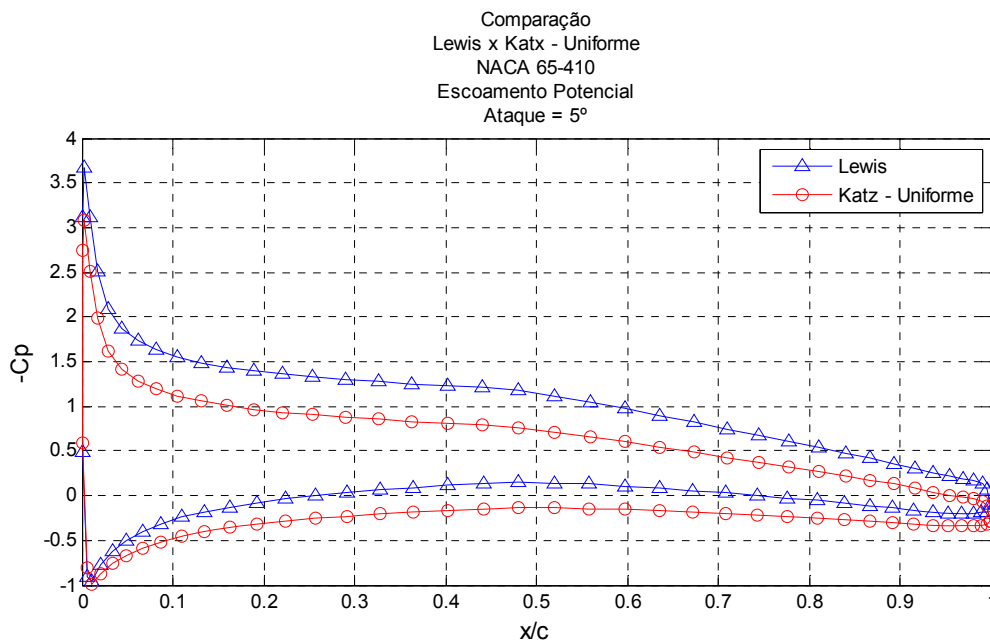


Figura 6.10– Comparação entre os Métodos de Lewis e Katz & Plotkin com distribuição constante de vorticidade sobre os painéis para um perfil NACA 65-410 com ângulos de ataque $\alpha = 5^\circ$. Número de Painéis = 90.

Uma comparação entre os resultados da equação matricial para os casos de vorticidade constante e linear sobre os painéis mostra resultados muito próximos para os valores de γ obtidos, com exceção das regiões do bordo de ataque e, principalmente, do bordo de fuga (Figuras 6.11 e 6.12).

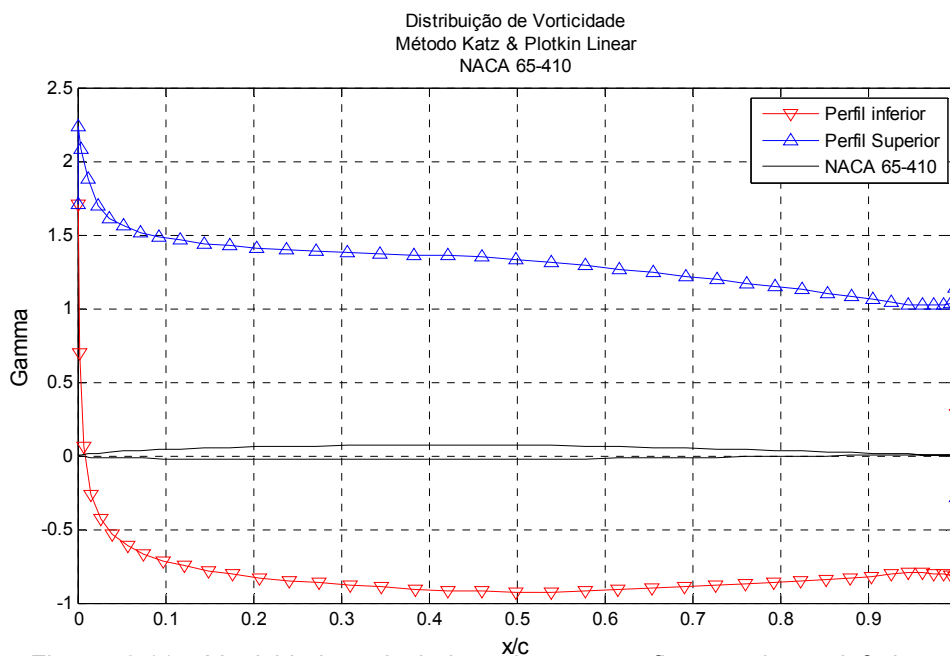


Figura 6.11– Vorticidade calculada sobre os perfis superior e inferior para um aerofólio NACA 65-410, utilizando o Método de Katz & Plotkin com distribuição linear de singularidade, com ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ e número de Painéis = 90. O desvio observado no bordo de fuga explica o problema de convergência apresentado na figura 6.9)

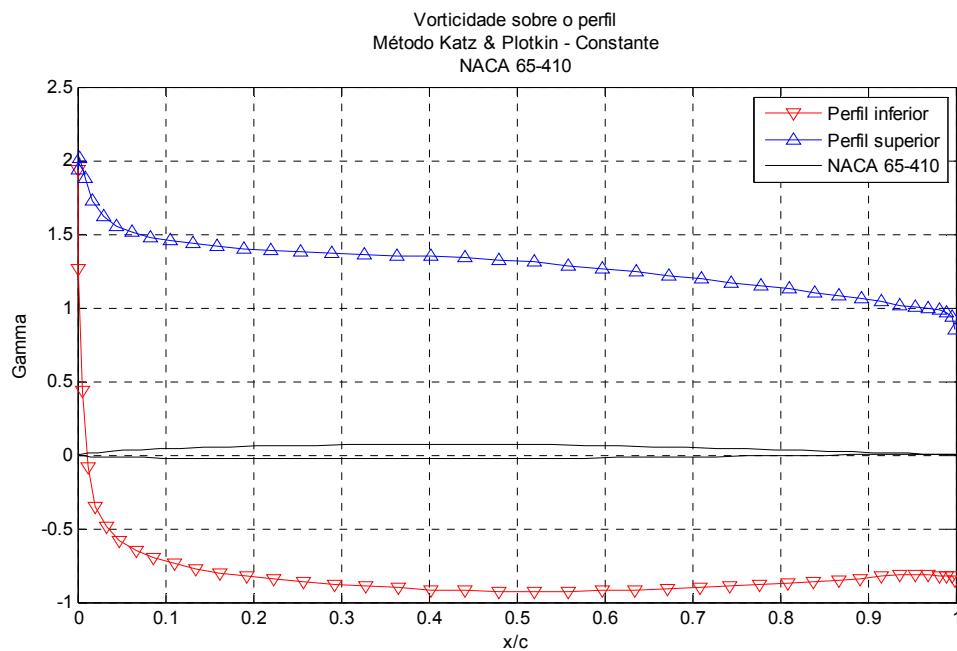


Figura 6.12– Vorticidade calculada sobre os perfis superior e inferior para um aerofólio NACA 65-410, utilizando o Método de Katz & Plotkin com vorticidade constante sobre os painéis, com ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ e número de Painéis = 90. Observa-se que não há desvio no bordo de fuga.

Quando se faz a mesma comparação para um aerofólio simétrico, o forte desvio anterior não é observado. Isso explica o sucesso obtido nas simulações de SILVA (2005) com o aerofólio NACA 0012, mas que não foi repetido ao se utilizar um perfil assimétrico como os da série NACA 63 ou NACA 65.

O estudo das técnicas para a superação do problema apresentado leva a uma série de opções que podem ser testadas nas simulações, tais como: aumento do número de painéis, utilização de sub-painéis no bordo de fuga, substituição da condição de Kutta por uma condição de conservação da vorticidade no escoamento (mais adequada para um regime transiente) ou imposição da vorticidade no bordo de fuga. Porém, nenhuma das alternativas apresentou resultado notavelmente melhor do que aquele obtido com uma distribuição constante de vorticidade sobre os painéis, associada à técnica de correção da diagonal oposta. Essa observação sugere como boa alternativa o método desenvolvido nesse trabalho e aqui denominado de Método Linear Adaptado. Os esforços, então, recaem nos estudos para o refinamento dessa técnica.

Antes de se prosseguir com o estudo da grade linear, uma vez que a solução analítica das integrais que fazem parte do Método de Katz & Plotkin representarão dificuldade, devem-se comparar os resultados até aqui apresentados com aqueles obtidos por integração numérica, como forma de se avaliar a magnitude de erros numéricos porventura inseridos. Pela figura 6.13, pode-se concluir que não há diferença, com concordância praticamente total entre os resultados, mesmo com a utilização de um ângulo de ataque maior.

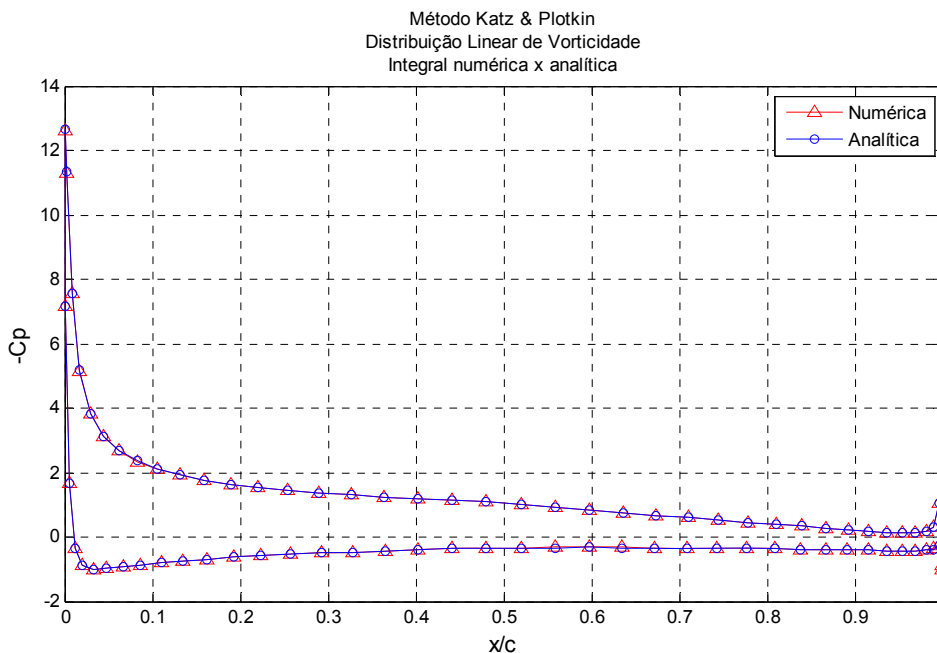


Figura 6.13– Comparação entre a utilização de solução numérica e solução analítica para o cálculo das integrais na implementação do Método de Katz & Plotkin com vorticidade linear sobre os painéis. Perfil aerodinâmico NACA 65-410, com ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ e número de Painéis = 80.

6.3 – ESCOAMENTO AO REDOR DE UMA GRADE LINEAR DE TURBOMÁQUINA.

Da mesma forma que os aerofólios simétricos foram utilizados para a melhor compreensão e otimização das técnicas numéricas de implementação no caso de escoamento ao redor de um único perfil aerodinâmico, utilizar-se-á o mesmo procedimento para o estudo das grades lineares de uma turbomáquina. Uma forma proposta por LEWIS (1991) para se conferir a validade da implementação consiste em testar o algoritmo implementado com aumento do parâmetro relativo ao afastamento entre os perfis cada vez maior e confrontar os resultados com aqueles obtidos na análise de um único aerofólio. A convergência dos dados é, então, um bom indicativo da validade da rotina numérica utilizada.

6.3.1 – Aerofólio de Van der Vooren

Embora uma grade linear de aerofólios simétricos não tenha uma aplicação prática em turbomáquinas, do ponto de vista da simulação numérica, esse estudo possui grande utilidade no desenvolvimento de rotinas robustas, pois permite a correção de erros de implementação e refinamento numérico, sem que se insiram as complicações advindas da utilização de perfis assimétricos e com bordos de fuga esbeltos.

Seguindo-se o plano de simulações apresentado na tabela 6.1, os resultados para uma grade infinita, com razão de solidez (razão entre o espaçamento dos perfis na grade e sua corda) igual a 0,5 e ângulo de ataque de 10° estão apresentados na figura 6.14. Inicialmente são comparados os métodos de Lewis e o de Katz & Plotkin com vorticidade constante. Surpreendentemente, a diferença entre os resultados, que era muito pequena no caso de um único aerofólio, passa a aumentar com a inclusão da interferência da grade. Além disso, o Método de Lewis, que era claramente inferior nos casos anteriores, mostra-se mais consistente para a grade linear. Ao se aumentar o espaçamento entre os perfis, a solução por esse método converge rapidamente para o caso de um único perfil, o que já não acontece com o Método de Lewis.

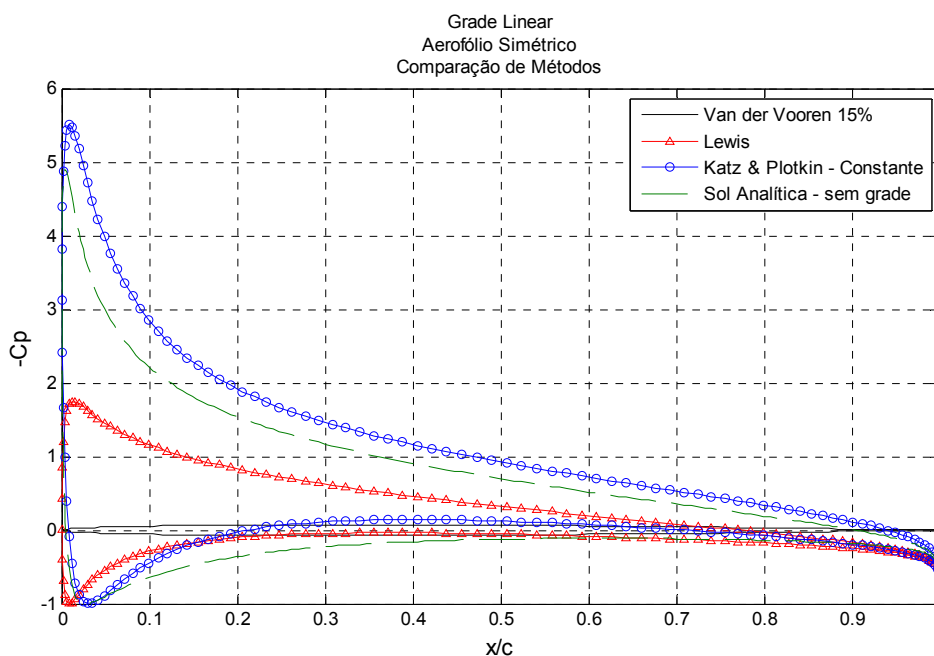


Figura 6.14– Comparação das soluções obtidas com o Método de Lewis e o de Katz & Plotkin com vorticidade constante sobre os painéis, para uma grade linear infinita. Perfil aerodinâmico Van der Vooren, com ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$, razão de solidez da grade igual a 0,5 e número de Painéis =180.

6.3.2 – Perfil NACA 0012

Da mesma forma que no caso anterior, uma grade linear composta de perfis NACA 0012 não apresenta aplicação prática para uso na indústria. Porém, trata-se de um aerofólio muito estudado, com muitas referências na literatura, o que justifica utilizá-lo em uma análise matemática das técnicas de implementação. Além do exposto, o fato de se constituir em um perfil simétrico, com ângulo finito no bordo de fuga, permite que se conduza o estudo sem os erros numéricos que aparecem em função, principalmente, do bordo de fuga muito esbelto de outros perfis NACA. O objetivo precípua é, então, analisar como se comporta a técnica de se incluir a interferência da grade através das funções hiperbólicas, como proposta de LEWIS (1991) e, originalmente, de MARTENSEN (1959).

Comparando-se os resultados obtidos para singularidades de ordem inferior, isto é, utilizando o Método de Lewis, com vorticidade concentrada nos pontos de controle, e o Método de Katz & Plotkin, com vorticidade constante distribuída sobre os painéis, observa-se, pela figura 6.15, forte diferença nos valores de C_p , principalmente nos bordos de ataque e de fuga. As diferenças existentes no caso de uma grade linear não apareciam nas simulações para um único perfil, quando os resultados eram muito próximos. Novamente, o teste de convergência, fazendo-se o espaçamento entre os perfis aumentar, evolui de forma muito mais rápida no Método de Lewis.

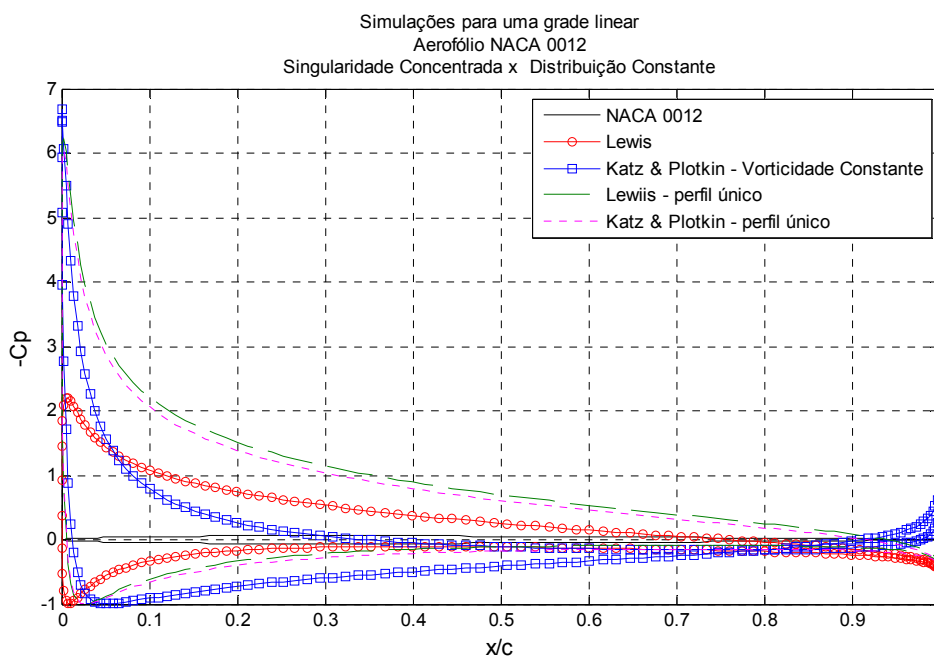


Figura 6.15—Método de Lewis comparado com o de Katz & Plotkin com vorticidade constante sobre os painéis, para uma grade linear infinita. Perfil NACA 0012, com ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$, razão de solidez da grade igual a 0,5 e 200 Painéis.

Em relação aos parâmetros globais de análise, a diferença acompanha o que ocorre para C_p . Na tabela 6.2, encontram-se listados os valores do ângulo de deflexão da grade e do coeficiente de sustentação encontrados, em função do ângulo de ataque. Como uma referência, valores de C_L calculados por SILVA (2005), para escoamento viscoso, ao redor de um único aerofólio, também são apresentados.

Tabela 6.2 – Parâmetros Globais de Análise. Perfil NACA 0012 em grade linear com razão de solidez igual a 0,5.

Ângulo de Ataque	LEWIS		KATZ & Plotkin		SILVA	
	Deflexão	C_L	Deflexão	C_L	Deflexão	C_L
2°	1,0°	0,2202	0,9°	0,1224	-----	0,1220
6°	4,0°	0,8573	5,6°	0,7091	-----	0,4271
10°	7,1°	1,4583	10,9°	1,2918	-----	0,7908

Ao se implementar a distribuição linear de vorticidade sobre os painéis, quer pela integração numérica, quer pelo Método Linear Adaptado, verifica-se que a interferência da grade é pequena, ou seja, os resultados não se afastam muito daqueles obtidos para um único perfil. Nesse caso, ao se aumentar o parâmetro determinante do espaçamento entre os perfis da grade, a convergência é rápida. Também não se observa a distorção no bordo de fuga ocorrida no Método de Katz & Plotkin com distribuição constante de singularidade sobre o painel. Na tabela 6.3, destaca-se a comparação desse método com os resultados de SILVA (2005).

Tabela 6.3 – Parâmetros Globais de Análise para o Método de Katz & Plotkin – Linear. Perfil NACA 0012 em grade linear com razão de solidez igual a 0,5.

Ângulo de Ataque	Linear		SILVA	
	Deflexão	C_L	Deflexão	C_L
2°	1,9°	0,2505	-----	0,1220
6°	6,8°	0,8483	-----	0,4271
10°	12,4°	1,4420	-----	0,7908

6.3.3 – Perfil NACA 65-410

Nesse caso, as simulações realizadas são orientadas de acordo com o esquema experimental desenvolvido no trabalho de EMERY *et al* (1953) e dos dados

utilizados por PEREIRA (2002), para que se tenha uma base comparativa. Na montagem experimental, a inclinação da velocidade incidente é mantida constante, variando-se o ângulo de ataque em função da inclinação da grade. Detalhes geométricos dessa configuração estão incluídas no Apêndice A. Os dados experimentais para o Perfil NACA 65-410 são reproduzidos no Apêndice C.

Para cada análise, foram simulados três casos (tabela 6.4) de acordo com o ângulo de inclinação da grade β e correspondentes ângulos de ataque α , de acordo com a seguinte expressão (onde α_1 é o ângulo de entrada do escoamento incidente, dado por W_1)

$$\alpha = \alpha_1 - \beta . \quad (6.1)$$

Tabela 6.3 – Configurações Geométricas para as Simulações : perfil NACA 65-410); escoamento incidente com $\alpha_1 = 45^\circ$

Configuração	β (em graus)	α (em graus)
I	29,4	15,6
II	33,6	11,4
III	37,3	7,7

Nas simulações realizadas, trabalha-se com o perfil discretizado em 80 ou 350 painéis. A razão de solidez da grade utilizada é igual a 0,5. Os parâmetros utilizados para análise foram o ângulo de deflexão da grade (entre as velocidades de entrada e saída) e o campo de pressões sobre o perfil de referência, de acordo com os dados experimentais disponíveis.

Tabela 6.4 – Parâmetros Globais de Análise – Comparação de Métodos. Perfil NACA 65-410 em grade linear com razão de solidez igual a 0,5.

β (graus)	α_1 (graus)	Lewis		K&P Const		K&P Lin		Experimental	
		$\Delta\alpha$	C_L	$\Delta\alpha$	C_L	$\Delta\alpha$	C_L	$\Delta\alpha$	C_L
29,4	15,6	14,4	1,6324	23,8	2,4482	17,1	1,8784	10,3	0,770
33,6	11,4	11,1	1,3107	16,5	1,8313	11,8	1,3812	8,6	0,680
37,3	7,7	8,2	1,0083	10,8	1,2829	7,56	0,9370	6,2	0,530

Utilizando-se parâmetros de grande importância na análise de desempenho de um estágio axial de uma turbomáquina, a tabela 6.4 apresenta uma comparação entre os métodos de implementação, além de confrontá-los com dados experimentais. O

ponto a se destacar nessa análise consiste no fato de, apesar de apresentar melhores resultados para o caso de um único perfil, ao se considerar a interferência da grade, o Método de Katz & Plotkin, com qualquer tipo de singularidade, mostra-se inferior ao Método de Lewis. Essa aparente contradição pode ser explicada em função de diversos fatores que impactam os resultados. Em primeiro lugar, já foi discutida a dificuldade do Método de Katz & Plotkin em lidar com perfis esbeltos no bordo de fuga. Há uma dispersão dos pontos simulados nessa região, inclusive com singularidades lineares. Também há de se considerar que a forma simplificada de inserir os efeitos da interferência da grade, admitindo-se a periodicidade do escoamento transversalmente à grade, não apresenta o sucesso esperado, em função de surgirem integrais complexas no cálculo. Esse aspecto, de certa maneira, reduz grande parte do benefício das singularidades de ordem superior. Por fim, a correção da diagonal oposta proposta em LEWIS (1991) mostra-se de alta eficiência, sendo a grande responsável pelo sucesso desse método.

Nas figuras 6.16, 6.17 e 6.18, o resultado comparativo entre os métodos, para vários ângulos de inclinação da grade pode ser avaliado. Como se deveria esperar, à medida que aumenta-se o ângulo de ataque, as distorções se intensificam claramente, como foi observado nos parâmetros globais de análise.

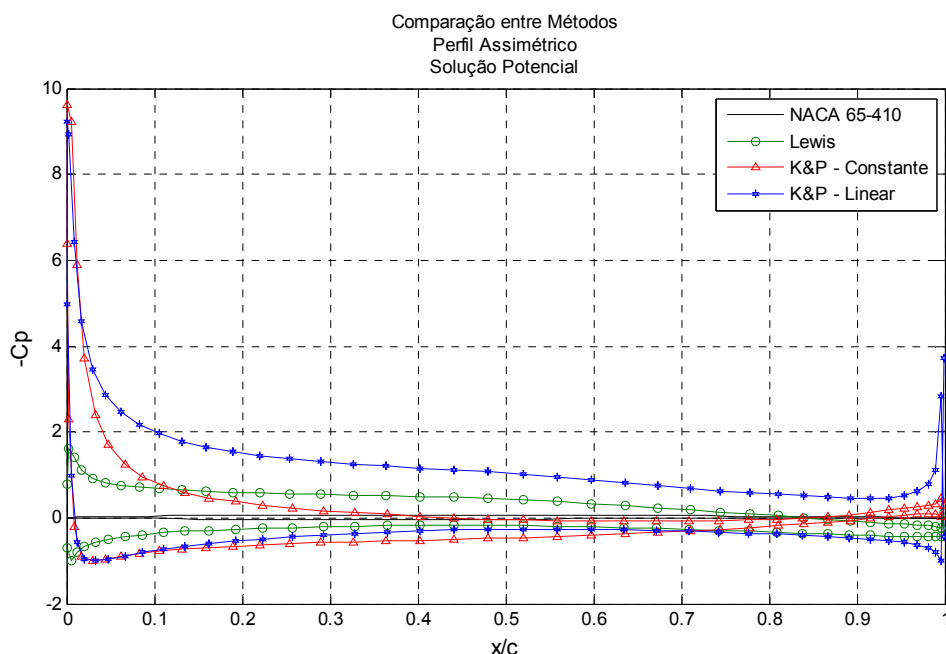


Figura 6.15—Comparação entre os Métodos para a solução potencial aplicada a uma grade linear infinita. Perfil NACA 65-410, com ângulo de ataque $\alpha = 7.7^\circ$, razão de solidez da grade igual a 0,5 e 80 Painéis.

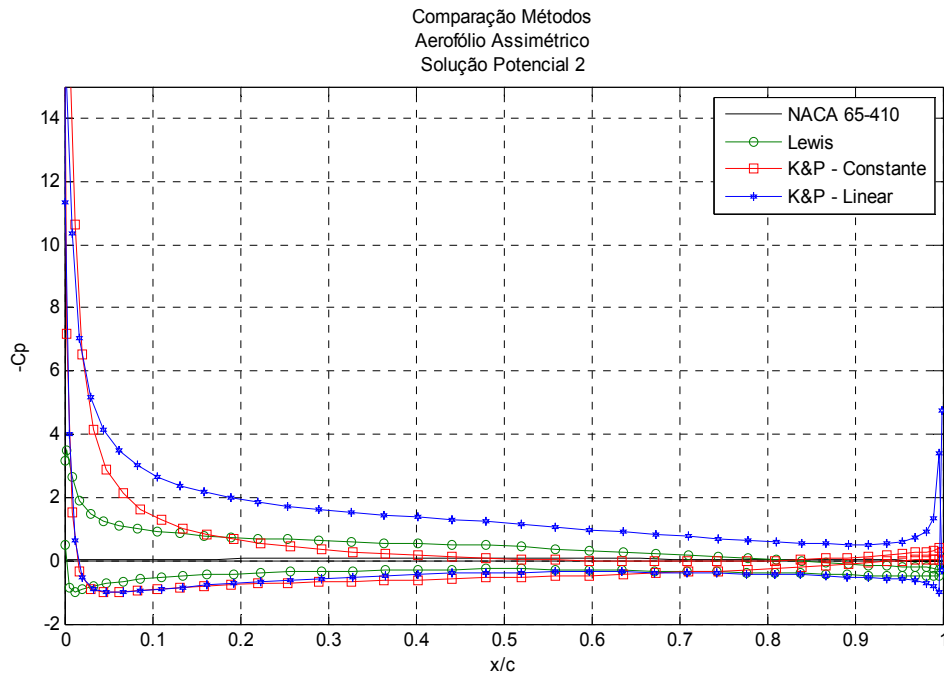


Figura 6.16—Comparação entre os Métodos para a solução potencial aplicada a uma grade linear infinita. Perfil NACA 65-410, com ângulo de ataque $\alpha = 11,4^\circ$, razão de solidez da grade igual a 0,5 e 80 Painéis.

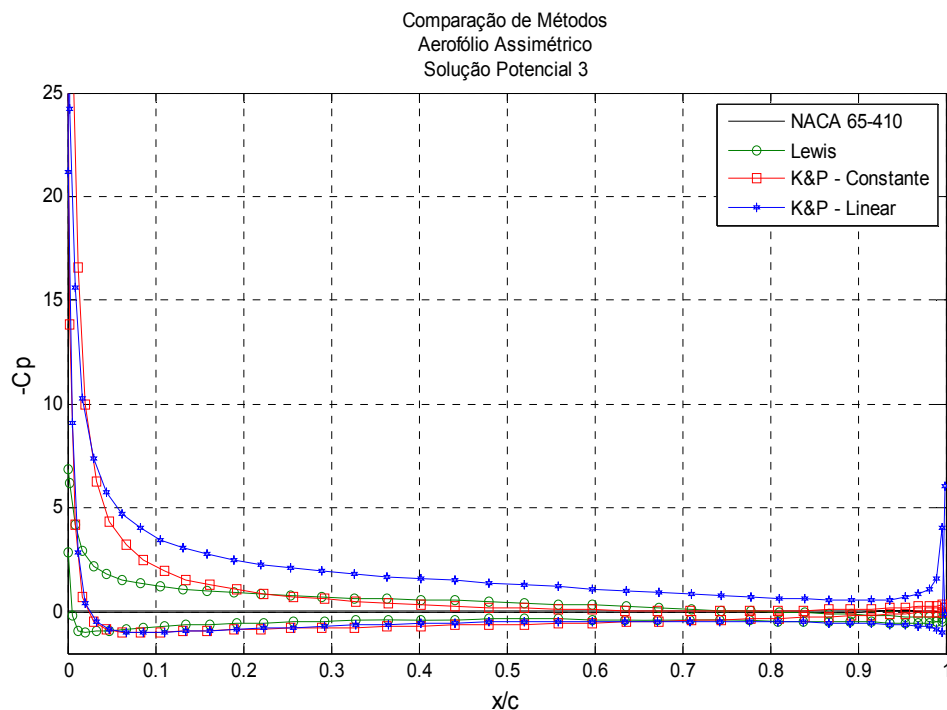


Figura 6.17—Comparação entre os Métodos para a solução potencial aplicada a uma grade linear infinita. Perfil NACA 65-410, com ângulo de ataque $\alpha = 15,6^\circ$, razão de solidez da grade igual a 0,5 e 80 Painéis.

Na figura 6.19, pode-se observar que o número de painéis utilizados na simulação para a construção da tabela 6.4 e das figuras anteriores para C_p , não corresponde ao parâmetro de maior influência. O Método de Lewis tem, inclusive, uma grande vantagem em se obter respostas com relativa precisão, mesmo com um pequeno número de painéis para a discretização da geometria (GOMES PEREIRA, 2005).

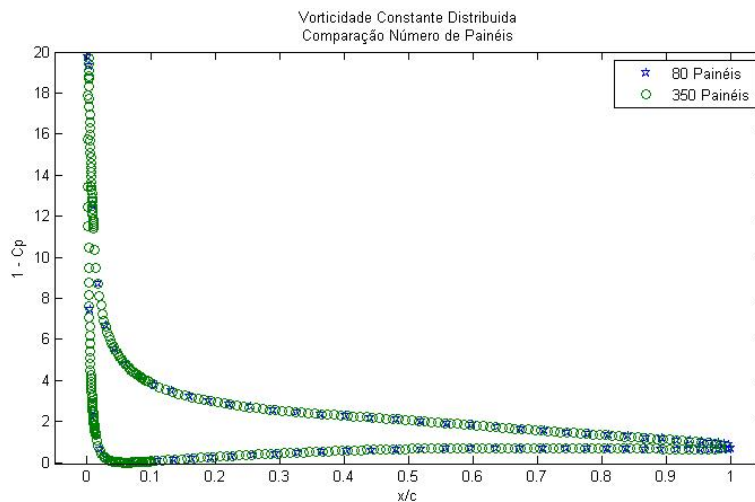


Figura 6.19– Solução Potencial – Método de Katz & Plotkin com 80 e 350 painéis. Vorticidade constante e distribuída sobre o painel. Ângulo de Ataque = $15,6^\circ$

Sobre o Método de Lewis, outra observação importante diz respeito ao método de correção de curvatura por ele proposto e implementado nas simulações. Analisando a figura 6.20, as simulações com e sem correção de curvatura, não apresentam basicamente diferença significativa. Porém, a correção da diagonal oposta é fundamental para o resultado, sem o que não há convergência para solução.

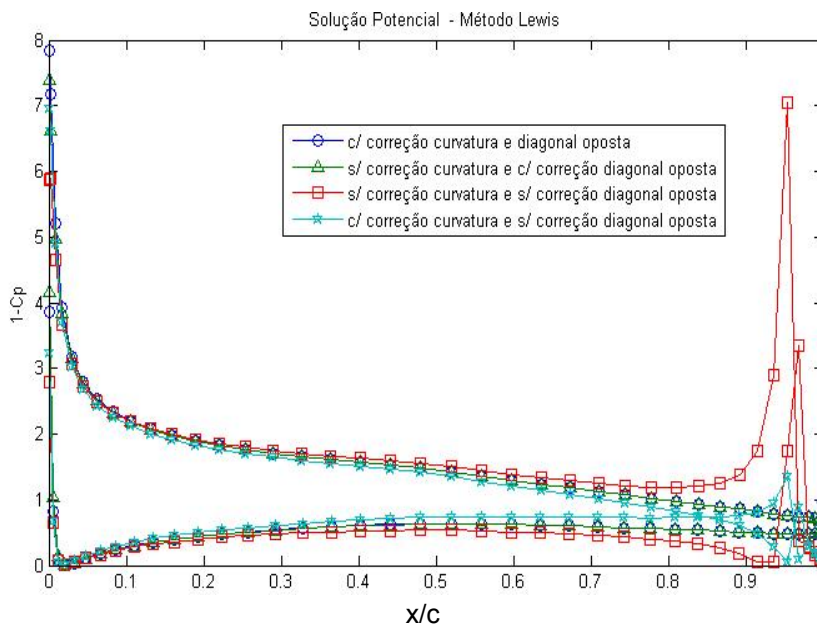


Figura 6.20 – Solução Potencial – Coeficiente de Pressão ao longo do perfil em função da posição relativa à corda. Método de Lewis com 80 painéis

Avaliando o comportamento quanto aos métodos e singularidades empregados, com foco da atenção no bordo de fuga, conclui-se que com o Método de Katz & Plotkin, utilizando distribuição uniforme de vorticidade sobre o painel, consegue-se um bom comportamento do campo de pressões nessa região, mas ainda há necessidade de se implementar melhorias para que, pelo menos, alcance os resultados da técnica de Lewis. Uma utilização de singularidades de ordem superior deve levar, a princípio, ao objetivo traçado, pois isso realmente ocorre com escoamentos ao redor de um único aerofólio. Porém, a implementação direta de uma distribuição linear de vorticidade torna-se complexa do ponto de vista analítico. Nas soluções para as integrais implementadas, os erros numéricos advindos de sua resolução de forma simplificada ou alternativa, podem ser tais que não conduzam ao refinamento perseguido. Através da figura 6.21, percebe-se que a modelagem de uma técnica de resolução utilizando uma adaptação, ou modificação, daquela proposta por Katz & Plotkin para singularidades lineares, apresenta para os valores de C_p dispersão acentuada no bordo de fuga inviabiliza o seu emprego na evolução temporal.

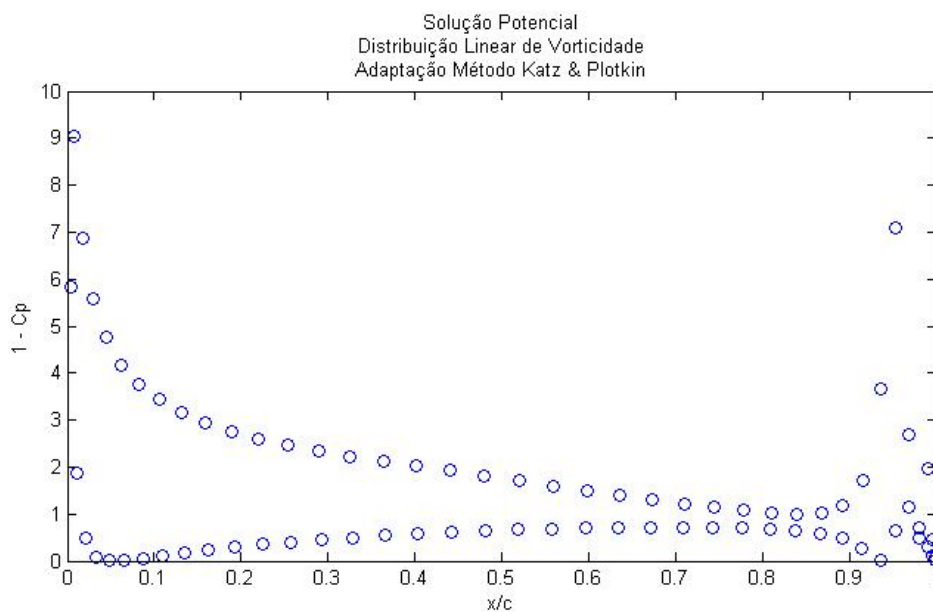


Figura 6.21– Solução Potencial – Método de Katz & Plotkin com distribuição linear de vorticidade adaptada. Ângulo de Ataque = 15,6°

Os valores de vorticidade sobre o perfil (no caso da figura 6.22, mostra-se na parte superior do perfil) corroboram a observação anterior de que os cálculos não alcançam boa precisão ao se aproximar do bordo de fuga.

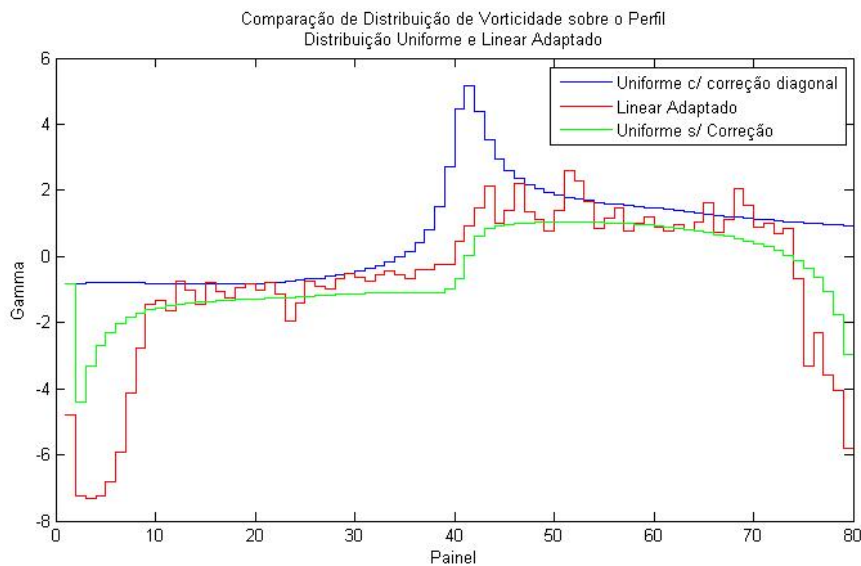


Figura 6.22 – Solução Potencial – Distribuição de Vorticidade – Método de Katz & Plotkin adaptado. Ângulo de Ataque = $15,6^\circ$

Há uma dificuldade inerente à implementação do Método Adaptado devido à singularidade apresentada para o coeficiente $(M, M+1)$ da última coluna da Matriz de Influência. A alternativa encontrada consiste em arbitrar esse valor, porém verifica-se uma grande sensibilidade dos resultados em função da forma de estimá-lo. As maiores dificuldades encontradas convergem, justamente, para esse ponto. Nenhum ajuste de parâmetro de simulação corrige a distorção observada. A necessidade de se refinar a técnica de implementação simplificada da distribuição linear faz-se premente. Consegue-se claramente um aumento de ordem de singularidade, embora, devido à geometria peculiar do tipo de perfil estudado, a convergência da simulação ainda não é alcançada.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Faz-se premente um estudo detalhado da solução potencial que, a princípio, pode ser considerada apenas uma etapa dentro de um contexto mais amplo do estudo envolvendo a simulação de efeitos viscosos de um escoamento, em função da forte influência que esta exerce sobre a precisão dos resultados obtidos. A técnica utilizada em sua implementação, associada à singularidade escolhida, afeta a evolução temporal, onde são simulados os efeitos viscosos, de forma dramática, podendo, inclusive, inviabilizar a convergência da solução (SILVA, 2005).

No caso do algoritmo implementado para o estudo do escoamento bidimensional, invíscido, incompressível e em regime permanente através de uma grade linear infinita de uma turbomáquina, o conceito da periodicidade ao longo do eixo perpendicular a ela simplifica a análise, inserindo sua interferência no escoamento ao redor de um único perfil. Porém, dificuldades numéricas são inseridas no problema e tem de ser resolvidas para a melhor concordância dos resultados com os dados experimentais. Tal tarefa é conduzida, buscando-se melhorar o condicionamento da Matriz de Influência através de diversas técnicas, ou do modelo de resolução, a tal ponto que simplificações necessárias não afetem o resultado. Verifica-se, pela solução potencial, uma grande sensibilidade da formulação no que concerne aos parâmetros que devem ser estimados, como o número de painéis e a forma de distribuí-los sobre o perfil e o tipo de singularidade escolhida, além da forma de distribuí-la na superfície do corpo. A técnica de manipulação da Matriz de Influência, quando da inclusão da condição de Kutta também interfere nos resultados. A combinação de equações, ao invés de substituição pura e simples mostra-se mais adequada para singularidades de ordem inferior. Ao se trabalhar com singularidades de segunda ordem, tal fato já não exerce tanta influência nos resultados.

Quanto à utilização de singularidades de maior ordem, que naturalmente conduz a resultados mais precisos, como observado no estudo de um único perfil isolado, não se mostrou eficiente para a aplicação em grades de turbomáquinas. Não obstante, a utilização de uma distribuição linear de vorticidade sobre os painéis, de relativa facilidade de implementação quando se estuda o escoamento ao redor de um único perfil, mostra-se extremamente complexa ao se considerar a interferência da grade infinita devido à impossibilidade de se obter uma solução analítica das integrais

necessárias ao cálculo dos coeficientes de acoplamento. A técnica alternativa de se calcular uma vorticidade média sobre o painel e concentrá-la no ponto de controle conduz a melhores resultados do que àqueles obtidos com vorticidade constante, todavia podem ainda ser melhorados com a utilização de métodos um pouco mais refinados.

A região do bordo de fuga é altamente problemática para os tipos de perfis da série NACA-65. Valores dispersos nessa região para as velocidades induzidas e, conseqüentemente, para os coeficientes de pressão, chegam a comprometer toda a simulação, inclusive no caso de análise do escoamento ao redor de um único aerofólio (SILVA, 2005)

Como era previsto, à medida que se aumenta a inclinação do escoamento incidente em relação à grade, correspondendo a um maior ângulo de ataque, os resultados tendem a piorar, visto que o ponto de separação caminha em direção ao bordo de ataque. Um fenômeno como o “stall”, importante na análise de um compressor axial, devido à súbita perda de eficiência em função de um aumento dramático no coeficiente de arrasto, deve poder ser identificado em uma simulação, desse tipo, pela comparação com os resultados experimentais, mas para tal, incrementos matemáticos devem ser buscados.

Todo o exposto vem demonstrar a potencialidade do Método, já comprovada em escoamentos ao redor de perfis únicos, e altamente promissora para a aplicação em turbomáquinas. Fenômenos como instabilidades de origem aerodinâmica e vibrações induzidas, altamente danosos, e que podem, inclusive, levar à destruição da máquina, podem ser simulados, previstos e resolvidos com base em estudos do tipo realizado nesse trabalho.

Como sugestões de melhoria e futuros estudos, podemos citar:

- analisar a alternativa de se estudar vários perfis combinados, sem a necessidade de simplificação pela hipótese de periodicidade do escoamento;
- inserir a rotação da grade;

- simular um estágio completo de uma máquina axial, incluindo as pás móveis e as pás fixas;
- realizar um estudo matemático detalhado do condicionamento da Matriz de Influência para os diversos casos de singularidades;
- desenvolver outros métodos para se lidar com a solução das integrais que surgem no caso da distribuição linear de vorticidade;
- estudar as possibilidades de maior refinamento da solução para perfis extremamente delgados no bordo de fuga;
- realizar um estudo acoplado da instabilidade aerodinâmica e vibração mecânica induzida nas pás, com análise de fadiga;
- simular escoamentos tridimensionais;
- aplicação das técnicas de problemas inversos no projeto de turbomáquinas axiais.
- simular o escoamento bidimensional, incompressível, viscoso e em regime transiente, tanto para um único aerofólio com bordo de fuga esbelto, como para grades lineares de turbomáquinas que são montadas a partir desse tipo de perfil, utilizando o método desenvolvido nesse trabalho para um melhor condicionamento da solução potencial para esses casos.

Em suma, conclui-se que os métodos numéricos para o estudo de escoamentos no interior de uma turbomáquina axial constituem-se em mais uma poderosa ferramenta, que, associada à análise tradicional, à experiência e aos testes experimentais, vem fortalecer o conhecimento sobre esse tipo de equipamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PEREIRA, L. A. A., 2002, *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Perfis Aerodinâmicos Montados em Grades Lineares de Turbomáquinas Utilizando o Método de Vórtices Discretos com Modelagem Sub-Malha de Turbulência*, Tese de D.Sc., EFEI, Itajubá, MG, Brasil.

PEREIRA, L. A. A., HIRATA, M. H. 2000, “*Análise do escoamento em perfis aerodinâmicos em grades de turbomáquinas utilizando o método de vórtices discretos*”, In Proceedings of the 8th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT, Porto Alegre, RS, Brasil.

BATCHELOR, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, 1ª ed. Cambridge, Cambridge University Press

CARMICHAEL, R. L., 2001, *Algorithm for Calculating Coordinates of Cambered NACA Airfoils at Specified Chord Locations*, AIAA 2001-5235, American Institute of Aeronautical and Astronautics, Santa Cruz, EUA

CHORIN, A. J., 1973, “*Numerical Study of Slightly Viscous Flows*”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 57, pp. 785-796.

COTTET, G. H., KOUMOUTSAKOS, P. D., 2000, *Vortex Methods: Theory and Practice*, 2ª ed. Cambridge University Press, Cambridge

CUNHA, M. C. C., 2003, *Métodos Numéricos*, 2ª. ed. Campinas, Editora da Unicamp

EMERY, J.C., HERRIG, L.J., ERWIN, J.R. AND FELIX, R., 1957, *Systematic two-dimensional cascade tests of NACA 65-series compressor blades at low speeds*. NASA TR 1368, Virginia, EUA.

GREENGARD, L. & ROKHLIN, V., 1987, “*A Fast Algorithm for Particle Simulations*”, *Journal of Computational Physics*, v. 73, pp. 325-348.

KAMEMOTO, K., 2004, “*On Contribution of Advanced Vortex Element Methods Toward Virtual Reality of Unsteady Vortical Flows in the New Generation of CFD*”,

Invited Lecture - In Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

KAMEMOTO, K., TSUTAHARA, M., 2000, “ *Vortex Methods*” , In *Selected Papers of the First International Conference on Vortex Methods*, Kobe, World Scientific

KAMEMOTO, K., 1994, “*Development of Vortex Methods for Grid-Free Lagrangian Direct Numerical Simulation*”, In Proceedings of the 3th JSME-KSME Fluids Engineering Conference, July 25-27, Sendai, Japan.

KATZ, J., PLOTKIN, A., 2001, *Low-Speed Aerodynamics*, 2^a ed. New York, Cambridge University Press.

KUNDU, K.P., COHEN, I. M., 2004, *Fluid Mechanics*, 3^a ed, San Diego, Elsevier Academic Press.

LADSON, C. L., BROOKS JR., C. W., HILL, A. S., SPROLES, D. W., 1996, *Computer Programs to obtain Ordinates for NACA airfoils*. NASA TM 4741, Virginia, EUA.

LEONARD, A., 1980, “*Vortex Method for Flow Simulation*”, Journal of Computational Physics, v. 37, pp. 289-335.

LEONARD, A., 1985, “*Computing three-dimensional Incompressible Flows with Vortex Elements*”, Annual Review of Fluid Mechanics, v. 17, pp. 523-559.

LEWIS, R. I., 1981, “*Surface vorticity modelling of separated flows from two-dimensional bluff bodies of arbitrary shape*”. J. Mech. Eng. Sci., vol. 23, n° 1, pp. 1-12.

LEWIS, R. I., 1991, *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, 1^a ed. Cambridge, Cambridge University Press.

LEWIS, R. I., 1999, “*Vortex Element Methods, the Most Natural Approach to Flow Simulation – A Review of Methodology with Applications*”, In Proceedings of 1st International Conference on Vortex Methods, Kobe, Japão, pp. 1–15.

LEWIS, R.I., 1986, “*Recent developments and engineering applications of the vortex cloud method* ”. In Proceedings of the First World Congress on Computational

Mechanical, Austin, Texas and also Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 64, pp. 153-176, (1987).

LEWIS, R.I., 1989, "*Application of the vortex cloud method to cascades*". Int. J. Turbo & Jet Engine, vol. 6, pp. 231-245.

LEWIS, R.I., 1999, "*Vortex element methods, the most natural approach to flow simulation – A review of methodology with applications*". In Proceedings of 1st International Conference on Vortex Methods, Kobe, Nov. 4-5, pp. 1-15.

MALISKA, C. R., 2004, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, 2ª ed. Rio de Janeiro, LTC.

MARTENSEN, E., 1959, "*The Calculation of the Pressure Distribution on a Cascade of thick Airfoils by means of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*", Aerodynamics Experimental Station, Göttingen.

MUSTTO, A. A., 1998, *Simulação Numérica do escoamento em torno de um Cilindro Circular com e sem Rotação Utilizando o Método de Vórtices Discretos*, Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PALMER, J.R., PILLIDIS, P., 2006, "*Gas Turbine Theory and Performance*". Cranfield University, UK.

RAMSDEN, K.R., 2005, "*Axial Compressor Design and Performance*". Cranfield University, UK.

RODRIGUES, P. S. B., 1991, *Compressores Industriais*, 1ª ed. Rio de Janeiro, Ed. Didática e Científica.

SARPKAYA, T., 1989, "*Computational Methods with Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture*", Journal of Fluids Engineering, v.111, pp.5-52.

SILVA, D. F. C., 2005, *Simulação Numérica do escoamento ao redor de Aerofólios Via Método de Vórtices Associado ao Método dos Painéis*, Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

WU, J.Z., MA, H.Y., ZHOU, M.D., 2006, *Vorticity and Vortex Dynamics*, 1^a ed. Berlin, Springer.

YING, L., ZHANG, P. *Vortex Methods*, 1997, 1^a ed. Beijing, Science Press.

APÊNDICE A

SISTEMA DE EIXOS COORDENADOS PARA GRADES LINEARES

Ao se estudar o escoamento através de grades de turbomáquinas, trabalha-se com 3 sistemas de coordenadas cartesianas para a representação dos pontos do espaço. As transformações lineares que associam as coordenadas de cada sistema são apresentadas nesse apêndice.

Na figura A.1 está esquematizada uma grade linear de perfis aerodinâmicos e os eixos coordenados global (inercial) e do perfil (preso ao seu bordo de fuga e com rotação em relação ao sistema inercial).

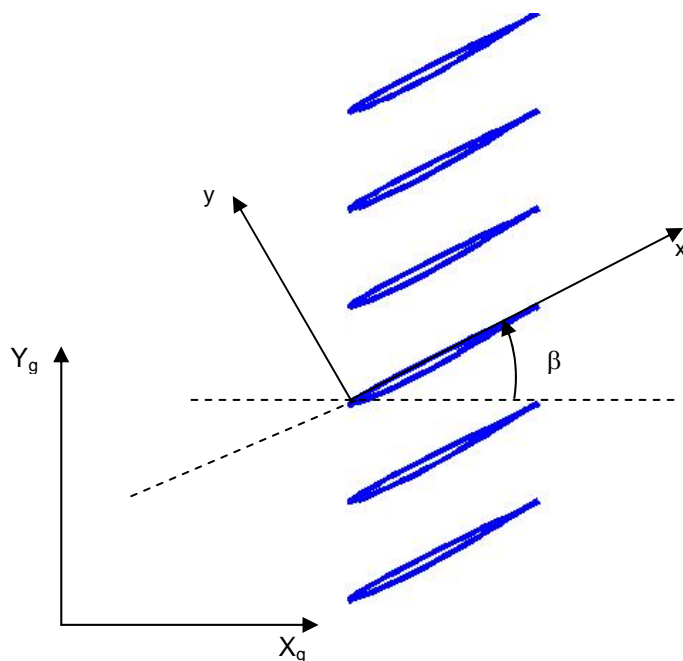


Figura A.1 – Grade linear com representação dos eixos coordenados global e local do perfil. β é o ângulo de rotação do sistema local em relação ao global.

Considerando um ponto qualquer do plano, de coordenadas (x_g, y_g) no sistema global, pode-se utilizar a transformação A.1 para representá-lo a partir do sistema local do perfil.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g - x_0 \\ y_g - y_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde (x_0, y_0) corresponde às coordenadas da origem do eixo do perfil, no sistema global.

Para um vetor velocidade (u_g, v_g) , tem-se a transformação para o sistema do perfil dada por:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_g \\ v_g \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Com base na figura A.2, que apresenta um único perfil da grade, pode-se associar o sistema de coordenadas local do perfil com o sistema de coordenadas do painel (x_p, y_p) , que está preso ao painel, tendo o eixo y_p , normal a este (destrógero).

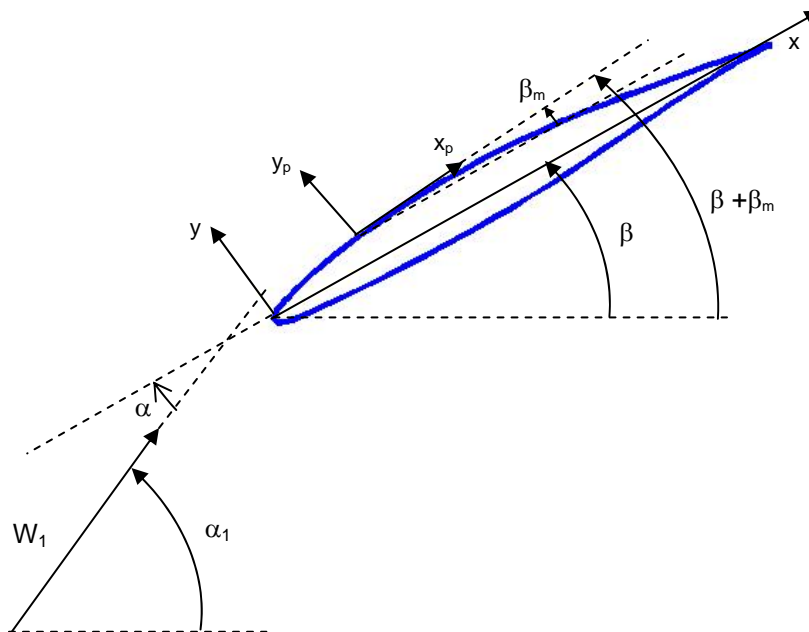


Figura A.2 – Representação de um único aerofólio componente da grade, onde localizamos um sistema local preso a um painel da discretização da geometria.

Representam-se as coordenadas locais do painel, a partir do sistema global, por:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta + \beta_m) & \sin(\beta + \beta_m) \\ -\sin(\beta + \beta_m) & \cos(\beta + \beta_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g - x_{op} \\ y_g - y_{op} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Da mesma forma, (x_{op}, y_{op}) , corresponde ao ponto de origem dos eixos locais, em coordenadas globais.

Na figura têm-se, também representados, os ângulos importantes para a análise:

β - ângulo de inclinação da grade;

β_m - ângulo de inclinação do painel m em relação ao eixo preso ao perfil;

β_{total} - ângulo de inclinação do painel em relação sistema global;

α - ângulo de ataque;

α_1 - ângulo de entrada (inclinação do vetor velocidade W_1 em relação ao eixo global das abscissas).

As equações seguintes representam as relações existentes entre esses ângulos:

$$\alpha = \alpha_1 - \beta, \quad (A.4)$$

$$\beta_{total} = \beta + \beta_m. \quad (A.5)$$

É bom ressaltar que, por convenção aqui adotada, os ângulos medidos no sentido anti-horário são considerados positivos.

Caso a rotação da grade em relação ao sistema inercial seja no sentido horário (ângulos convencionados como negativos), utilizam-se as figuras A.3 e A.4 que ilustram a situação.

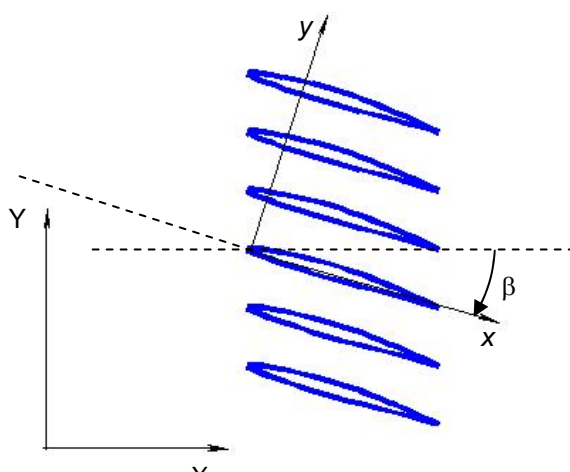


Figura A.3 – Grade linear com rotação do sistema local em relação ao global no sentido horário (negativo).

As mesmas relações anteriores podem ser utilizadas, tomando-se cuidado com o correto sinal dos ângulos de rotação.

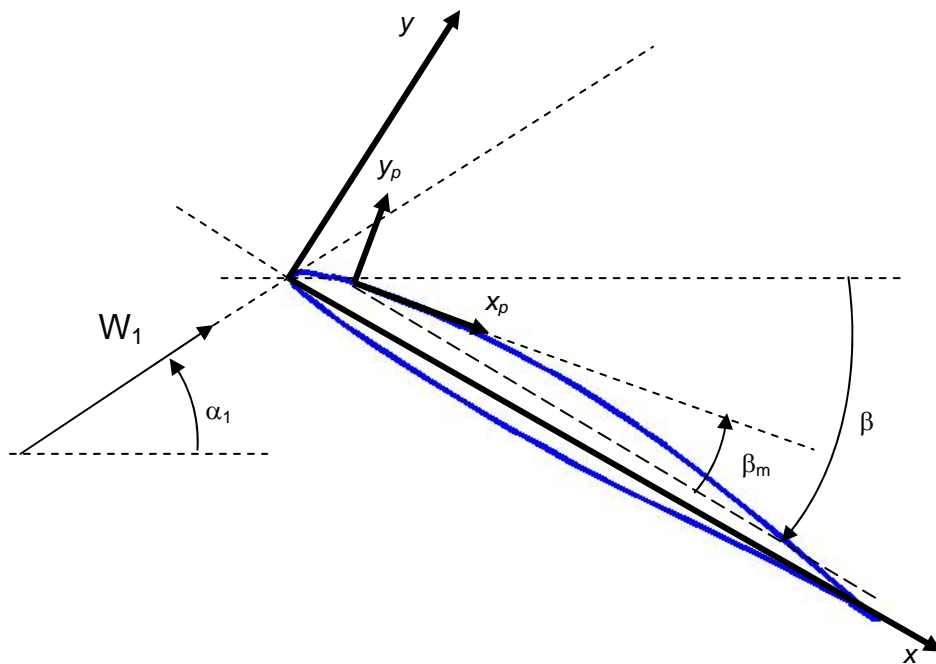


Figura A.4 – Perfil com rotação horária em relação ao sistema global.

Para as transformações inversas, basta inverter a matriz de rotação:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \text{sen } \beta \\ -\text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta \\ \text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta + \beta_m) & \text{sen}(\beta + \beta_m) \\ -\text{sen}(\beta + \beta_m) & \cos(\beta + \beta_m) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\beta + \beta_m) & -\text{sen}(\beta + \beta_m) \\ \text{sen}(\beta + \beta_m) & \cos(\beta + \beta_m) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

A correta manipulação dos sistemas de coordenadas é fundamental na implementação das simulações realizadas.

APÊNDICE B

DISTRIBUIÇÃO LINEAR DE VORTICIDADE

MÉTODO MATEMÁTICO PARA SIMULAR A DISTRIBUIÇÃO LINEAR DE VORTICIDADE NA SUPERFÍCIE DO PERFIL PARA GRADES LINEARES.

Esta técnica consiste em resolver as integrais relativas à distribuição linear de forma numérica, de acordo com um dos métodos tradicionais existentes, como o método do trapézio, adequado para essa configuração. Nesse caso, a velocidade induzida pelo painel j sobre o painel i é composta de uma parcela relativa à vorticidade constante e uniforme e a outra, relativa à distribuição linear pura, conforme esquematizado na figura B.1:

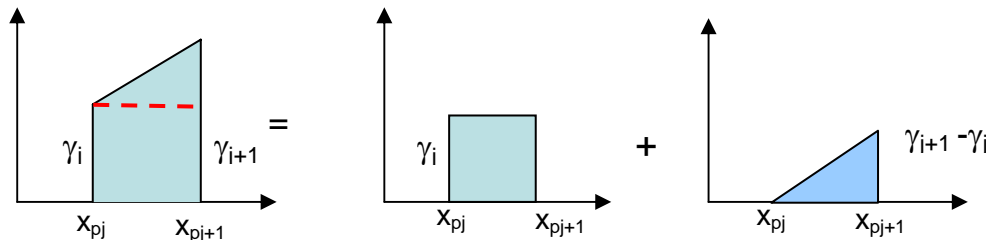


Figura B.1 – Representação esquemática da aproximação da distribuição linear de vorticidade sobre o painel, como uma soma de uma distribuição uniforme e uma distribuição linear pura.

A parcela linear é dada pela equação B.1 (em coordenadas do painel):

$$\gamma(x) = \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{x_{pj+1} - x_p} x. \quad (\text{B.1})$$

E a velocidade induzida no painel i pela distribuição de vorticidade linear do painel j é dada pelas equações (B.2) e (B.3), onde as integrais constituintes da expressão são representadas da mesma forma que na seção 5.2.3:

$$u_{ij} = \frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U1} + \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2t(x_{pj+1} - x_p)} I_{ij}^{L1} \quad (\text{B.2})$$

$$v_{ij} = -\frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U2} - \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2t(x_{pj+1} - x_p)} I_{ij}^{L2} \quad (\text{B.3})$$

Seguindo procedimento análogo ao da seção referida, determinam-se os coeficientes de acoplamento da matriz de influência de acordo, inicialmente, com a condição de contorno de Dirichlet, onde se calcula a componente tangencial da velocidade total induzida em cada painel i (B.4):

$$q_i^t = \sum_{j=1}^M u_{gij} \cos(\beta_i + \beta) + v_{gij} \text{sen}(\beta_i + \beta). \quad (\text{B.4})$$

Nesse caso, u_{gij} e v_{gij} são dadas por:

$$u_{gij} = u_{ij} \cos(\beta_j + \beta) - v_{ij} \text{sen}(\beta_j + \beta), \quad (\text{B.5})$$

$$v_{gij} = u_{ij} \text{sen}(\beta_j + \beta) + v_{ij} \cos(\beta_j + \beta), \quad (\text{B.6})$$

onde u_{ij} e v_{ij} vêm de:

$$u_{ij} = \frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U1} + \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2t dl_j} I_{ij}^{L1}, \quad (\text{B.7})$$

$$v_{ij} = -\frac{\gamma_j}{2t} I_{ij}^{U2} - \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2t dl_j} I_{ij}^{L2}. \quad (\text{B.8})$$

Realizando o somatório de todas as parcelas referentes a cada painel, sobre o painel i , obtêm-se:

$$u_{gi} = \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^M \left[\gamma_j \left(I_{ij}^{U1} - \frac{I_{ij}^{L1}}{dl_j} \right) + \gamma_{j+1} \frac{I_{ij}^{L1}}{dl_j} \right] \cos(\beta_j + \beta) + \left[\gamma_j \left(I_{ij}^{U2} - \frac{I_{ij}^{L2}}{dl_j} \right) + \gamma_{j+1} \frac{I_{ij}^{L2}}{dl_j} \right] \text{sen}(\beta_j + \beta), \quad (\text{B.9})$$

$$v_{gi} = \frac{1}{4t} \sum_{j=1}^M \left[\gamma_j \left(I_{ij}^{U1} - \frac{I_{ij}^{L1}}{dl_j} \right) + \gamma_{j+1} \frac{I_{ij}^{L1}}{dl_j} \right] \text{sen}(\beta_j + \beta) - \left[\gamma_j \left(I_{ij}^{U2} - \frac{I_{ij}^{L2}}{dl_j} \right) + \gamma_{j+1} \frac{I_{ij}^{L2}}{dl_j} \right] \cos(\beta_j + \beta). \quad (\text{B.10})$$

Para facilitar a implementação numérica, definimos os parâmetros trigonométricos da seguinte forma:

$$A_{ij} = \cos(\beta_j + \beta)\cos(\beta_i + \beta), \quad (\text{B.11})$$

$$B_{ij} = \text{sen}(\beta_j + \beta)\text{sen}(\beta_i + \beta), \quad (\text{B.12})$$

$$C_{ij} = -\text{sen}(\beta_j + \beta)\cos(\beta_i + \beta), \quad (\text{B.13})$$

$$D_{ij} = \cos(\beta_j + \beta)\text{sen}(\beta_i + \beta). \quad (\text{B.14})$$

Através da equação (B.4) e aplicando os parâmetros dados por (B.11) a (B.14), chega-se a:

$$q_i^t = \sum_{j=1}^M u_{ij} (A_{ij} + B_{ij}) + v_{ij} (C_{ij} + D_{ij}). \quad (\text{B.15})$$

Desenvolvendo, utilizando (B.7) e (B.8):

$$q_i^t = \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^M \left[\left(\gamma_j I_{ij}^{U1} + \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{(x_{pj+1} - x_p)} I_{ij}^{L1} \right) (A_{ij} + B_{ij}) + \left(-\gamma_j I_{ij}^{U2} - \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{(x_{pj+1} - x_p)} I_{ij}^{L2} \right) (C_{ij} + D_{ij}) \right]. \quad (\text{B.16})$$

Reagrupando:

$$q_i^t = \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^M \left[\gamma_j \left(I_{ij}^{U1} A_{ij} + I_{ij}^{U1} B_{ij} - \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L1} A_{ij} - \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L1} B_{ij} - I_{ij}^{U2} C_{ij} - I_{ij}^{U2} D_{ij} + \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L2} C_{ij} + \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L2} D_{ij} \right) + \gamma_{j+1} \left(\frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L1} A_{ij} + \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L1} B_{ij} - \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L2} C_{ij} - \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L2} D_{ij} \right) \right]. \quad (\text{B.17})$$

De onde decorrem os elementos da Matriz de Influência:

- Para a primeira coluna

$$K_{i1} = \frac{1}{2t} \left[I_{i1}^{U1} A_{ij} + I_{i1}^{U1} B_{i1} - \frac{1}{dl_1} I_{i1}^{L1} A_{i1} - \frac{1}{dl_1} I_{i1}^{L1} B_{i1} - \right. \\ \left. - I_{i1}^{U2} C_{i1} - I_{i1}^{U2} D_{i1} + \frac{1}{dl_1} I_{i1}^{L2} C_{i1} + \frac{1}{dl_1} I_{i1}^{L2} D_{i1} \right], \quad (B.18)$$

- Para a última coluna

$$K_{iM} = \frac{1}{2t} \left[I_{iM}^{U1} A_{iM} + I_{iM}^{U1} B_{iM} - \frac{1}{dl_M} I_{iM}^{L1} A_{iM} - \frac{1}{dl_M} I_{iM}^{L1} B_{iM} - \right. \\ \left. - I_{iM}^{U2} C_{iM} - I_{iM}^{U2} D_{iM} + \frac{1}{dl_M} I_{iM}^{L2} C_{iM} + \frac{1}{dl_M} I_{iM}^{L2} D_{iM} \right], \quad (B.19)$$

- Para os demais elementos:

$$K_{ij} = \frac{1}{2t} \left[\left(I_{ij}^{U1} A_{ij} + I_{ij}^{U1} B_{ij} - \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L1} A_{ij} - \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L1} B_{ij} - \right. \right. \\ \left. \left. - I_{ij}^{U2} C_{ij} - I_{ij}^{U2} D_{ij} + \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L2} C_{ij} + \frac{1}{dl_j} I_{ij}^{L2} D_{ij} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{dl_{j-1}} I_{ij-1}^{L1} A_{ij-1} + \frac{1}{dl_{j-1}} I_{ij-1}^{L1} B_{ij-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{dl_{j-1}} I_{ij-1}^{L2} C_{ij-1} - \frac{1}{dl_{j-1}} I_{ij-1}^{L2} D_{ij-1} \right) \right]. \quad (B.20)$$

A equação matricial que transforma o problema em um sistema de equações lineares é montada, exatamente, da mesma forma que no caso do Método Linear Adaptado.

Para a utilização da condição de Neumann, basta substituir-se a equação (B.4) por:

$$q_i^n = \sum_{j=1}^M -u_{g\ ij} \operatorname{sen}(\beta_i + \beta) + v_{g\ ij} \operatorname{cos}(\beta_i + \beta), \quad (B.21)$$

que fornece a componente normal da velocidade sobre o perfil i e seguir o mesmo procedimento.

APÊNDICE C

DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais disponíveis são apresentados sob forma gráfica, conforme trabalho de Emery et al. (1953). O extrato dessa referência que compõe esse apêndice corresponde a experimentos realizados para o perfil NACA 65-410, com ângulo de entrada de 45° . As figuras C.1 e C.2 referem-se a uma grade com razão de solidez igual a 0,5, já para as figuras C.2 e C.3, a grade é montada com razão de solidez equivalente a 1,0.

As figuras C.4 e C.5 mostram a tendência de variação do ângulo de deflexão da grade, um importante parâmetro físico do escoamento, em função do ângulo de ataque (α_1 , conforme simbologia original)

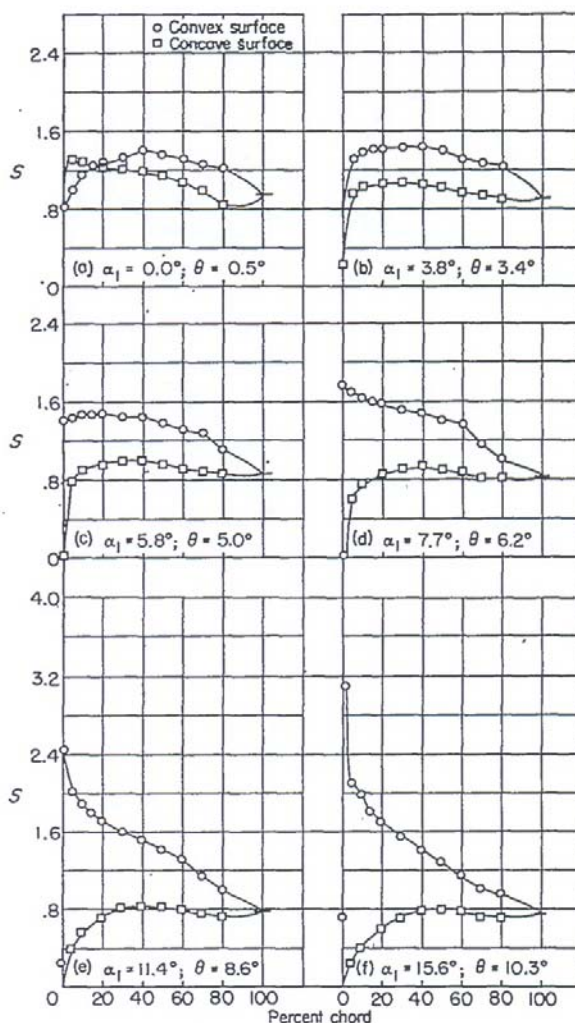


Figura C.1 – Coeficiente de pressão S ao longo da superfície do perfil. O ângulo de ataque corresponde a α_1 e θ ao ângulo de deflexão da grade. (Razão de solidez = 0,5)

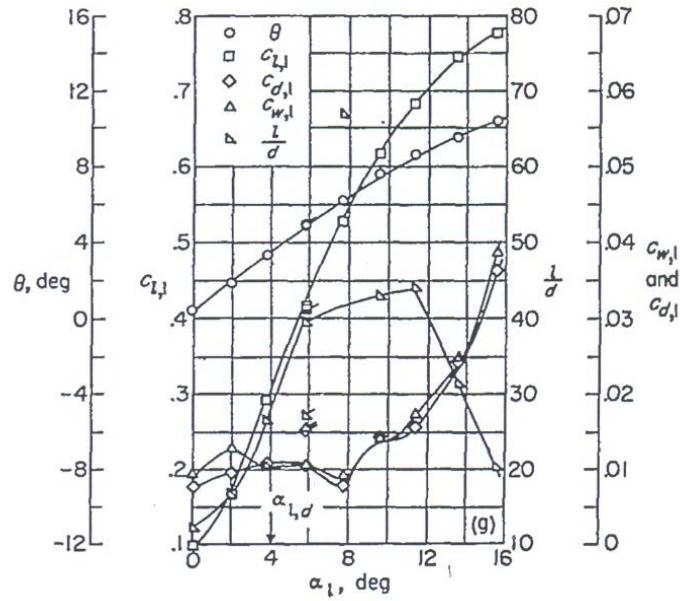


Figura C.2 – Coeficiente de sustentação (C_l) e ângulo de deflexão θ em função do ângulo de ataque α_1 . (Razão de solidez = 0,5)

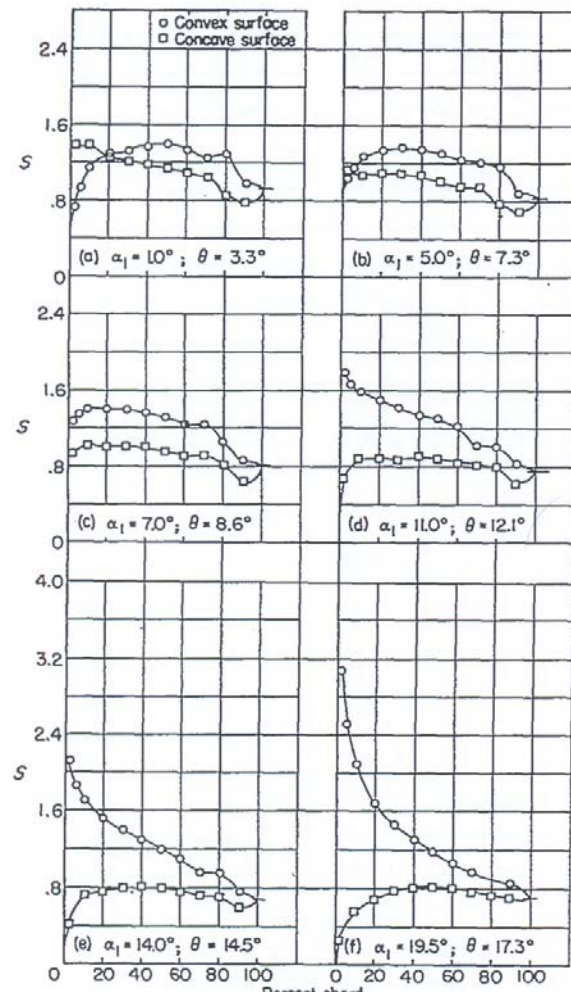


Figura C.3 – Coeficiente de pressão S ao longo da superfície do perfil. O ângulo de ataque corresponde a α_1 e θ . ao ângulo de deflexão da grade. (Razão de solidez = 1,0)

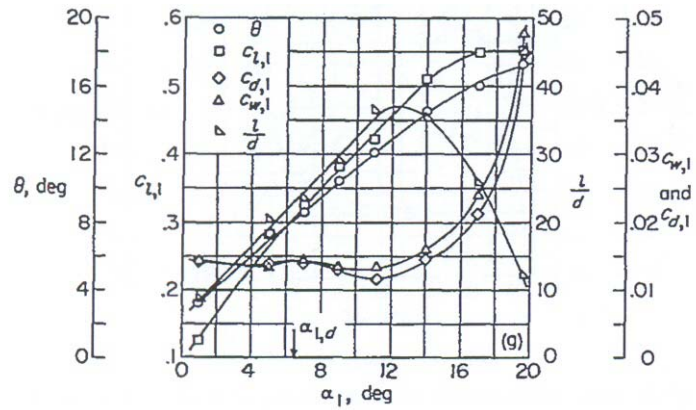


Figura C.4 – Coeficiente de sustentação (C_L) e ângulo de deflexão θ em função do ângulo de ataque α_1 . (Razão de solidez = 1,0)

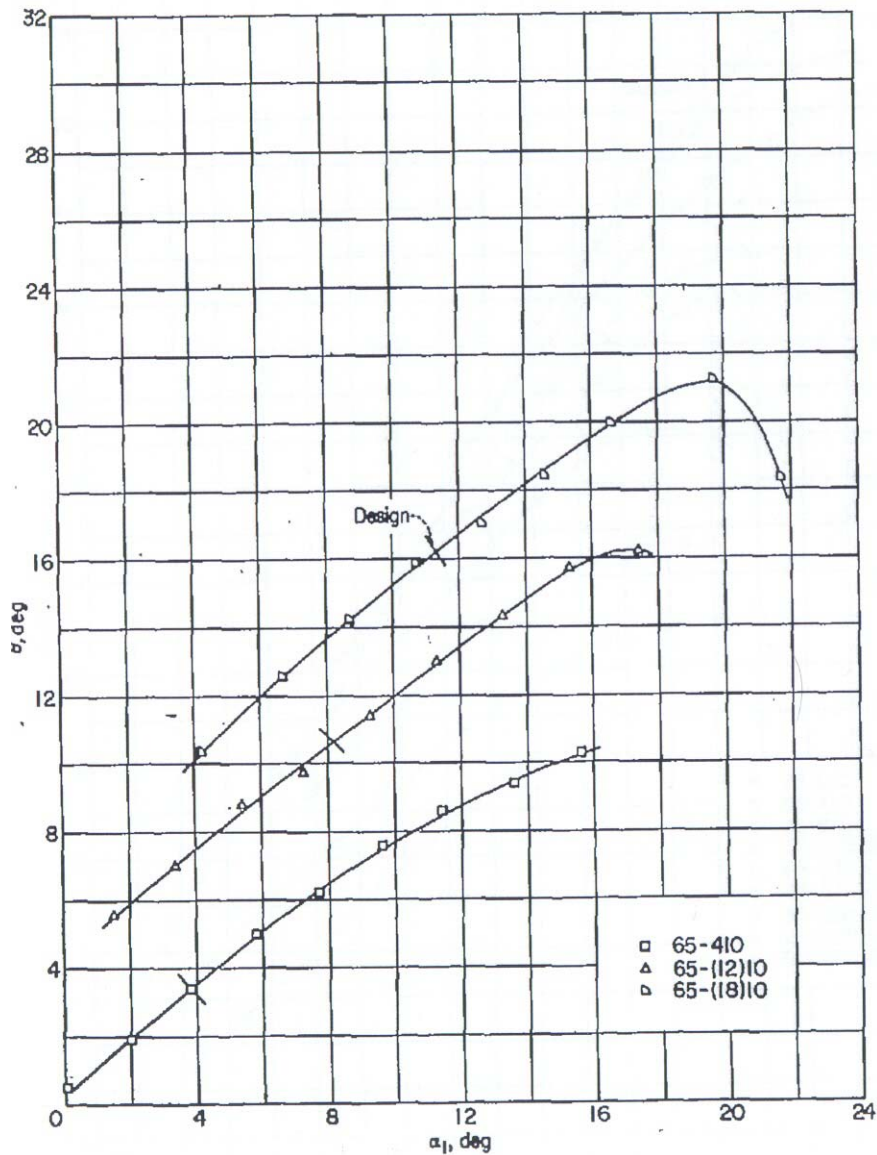


Figura C.5 – Ângulo de deflexão θ em função do ângulo de ataque α_1 para diversos perfis. O ponto de projeto para cada caso é mostrado no gráfico. (Razão de solidez = 0,5)

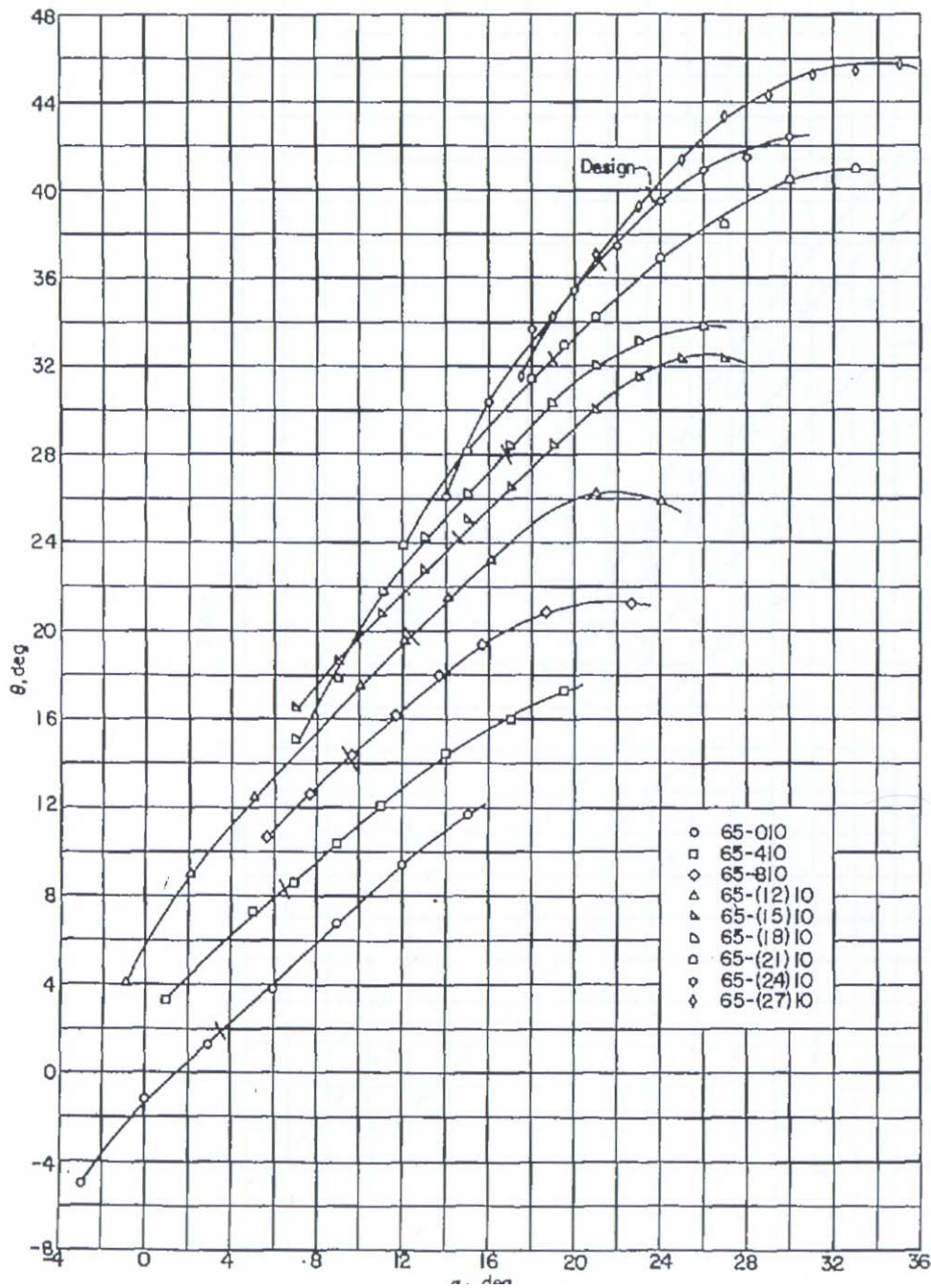


Figura C.6 – Ângulo de deflexão θ em função do ângulo de ataque α_1 para diversos perfis. O ponto de projeto para cada caso também é identificado. (Razão de solidez = 1,0)